

EXERCICES SUR LES DIVISEURS ET LES MULTIPLES

1) Crible (Sieb) d'Eratosthène

Cet exercice a pour but de dresser la liste de tous les nombres premiers inférieurs à un certain nombre, 100 par exemple. Pour cela on écrit tous les entiers de 1 à 100, puis on va biffer tous les nombres de cette liste qui ne sont pas premiers.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- a) 2 est premier, on peut biffer tous les multiples de 2 à partir de $2 \cdot 2 = 4$, pourquoi ?
- b) Le plus petit nombre non biffé, le 3, est forcément premier, pourquoi ?
- c) Sans regarder le tableau, expliquez pourquoi le plus petit multiple de 3 non biffé est $3 \cdot 3 = 9$! Biffez tous les multiples de 3 à partir de 9.
- d) Le plus petit nombre non biffé, le 5, est forcément premier, pourquoi ?
- e) Sans regarder le tableau, expliquez pourquoi le plus petit multiple de 5 non biffé est $5 \cdot 5 = 25$! Biffez tous les multiples de 5 à partir de 25.
- f) Le plus petit nombre non biffé, le 7, est forcément premier, pourquoi ?
- g) Sans regarder le tableau, expliquez pourquoi le plus petit multiple de 7 non biffé est $7 \cdot 7 = 49$! Biffez tous les multiples de 7 à partir de 49.
- h) Expliquez pourquoi tous les nombres qui ne sont pas encore biffés sont premiers !

2) Examinez si les nombres suivants sont premiers :

521, 851, 677, 1247, 953, 481, 1109 et 589

3) Décomposez les nombres suivants en facteurs premiers :

144, 784, 18 876, 68 229, 142 600, 351 575, 551 412 et 1943

4) Déterminez l'ensemble de tous les diviseurs de : 72, 196, 100, 500, 726, et 210

5) Calculez le nombre de diviseurs de chaque nombre de l'exercice 3.

6) Calculez le pgcd, puis déterminez l'ensemble de tous les diviseurs communs de :

a) 48, 36 et 120

b) 77, 110 et 121

c) 220, 252 et 324

d) 270, 432 et 1008

e) 300, 504 et 1260

f) $5^{12} \cdot 7^8$; 385 et 630

g) $2^5 \cdot 3^7 \cdot 7^3 \cdot 19 \cdot 31^7$; $2^9 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 31 \cdot 43^3$ et $2^4 \cdot 3^6 \cdot 7^2 \cdot 17^3 \cdot 31^2$

7) Simplifiez les fractions suivantes:

a) $\frac{20790}{71610}$

b) $\frac{350350}{374850}$

c) $\frac{1274}{2635}$

d) $\frac{980980}{4923765}$

8) Les nombre suivants sont-ils premiers entre eux :

a) 45 et 77 ?

b) 99 et 504 ?

c) 25, 435 et 23 ?

d) 50, 63 et 143 ?

9) Remplacez de toutes les manières possibles les ? par des chiffres pour que:

a) 29?8? soit divisible par 4 et par 3

b) 2903?? soit divisible par 2 et par 11

c) 5104?? soit divisible par 5 et par 9

d) 60?13?? soit divisible par 25 et par 3

e) 187??? soit divisible par 4, 5 et 9

10) Remplacez de toutes les manières possibles les x par des chiffres pour que:

a) 582x6x soit divisible par 12

b) 61xx soit divisible par 6

c) 9x1xx soit divisible par 75

d) 3x7x2 soit divisible par 36

e) 7x054x soit divisible par 88

11) Quel est le nombre de diviseurs du produit des 10 premiers entiers non nuls ?

12) Calculez le ppcm des nombres suivants :

a) 60 et 25

b) 30 et 72

c) 350 et 450

d) 42, 54 et 56

e) 220, 252 et 324

f) 144, 468 et 688

g) 12, 72, 144 et 60

h) $a = 2^3 \cdot 5^4 \cdot 17$, $b = 2 \cdot 5^2 \cdot 11^3 \cdot 17^5$ et $c = 2^7 \cdot 3^5 \cdot 17^3 \cdot 31$

13) Les affirmations suivantes sont-elles exactes:

a) Tout entier naturel est un multiple de 1 ?

b) Tout entier naturel est un diviseur de 0 ?

c) Tout entier naturel est un multiple de 0 ?

d) Il existe un entier naturel qui est diviseur de tous les entiers naturels ?

e) Il existe un entier naturel qui est multiple de tous les entiers naturels ?

14) Que peut-on dire des entiers non nuls a et b si:

a) $\text{pgcd}(a;b) = 1$?

b) $\text{ppcm}(a;b) = 1$?

c) $\text{pgcd}(a;b) = a$?

d) $\text{ppcm}(a;b) = a$?

e) $\text{ppcm}(a;b) = ab$

15) Trouvez trois multiples consécutifs de 7 dont la somme vaut 147.

16) Montrez que la somme de trois multiples consécutifs d'un entier a est divisible par 3.

17) Analysez si la somme et le produit de deux nombres impairs est un nombre pair ou impair.

18) Montrez que la somme de 5 entiers pairs consécutifs est divisible par 10. Trouvez 5 entiers pairs consécutifs dont la somme vaut 3280.

- 19) Que peut-on dire des entiers non nuls a et b si :
- $\text{pgcd}(a;b) = 1$?
 - $\text{ppcm}(a;b) = 1$?
 - $\text{pgcd}(a;b) = a$?
 - $\text{ppcm}(a;b) = a$?
 - $\text{ppcm}(a;b) = ab$
- 20) Monsieur Méchoui est éleveur de moutons. Il en a près de 800. Le soir, avant de s'endormir, il les compte par dizaines, par douzaines et par quinzaines. Il trouve chaque fois un nombre exact. Combien de moutons a-t-il ?
- 21) Trouve le volume de la plus petite caisse cubique dans laquelle on pourra placer un nombre entier de briques de dimensions 22 cm sur 11 cm sur 6 cm. Détermine également le nombre de briques.
- 22) Pierre veut ranger ses petites voitures. Qu'il les range 2 par 2, 3 par 3, 4 par 4 ou 5 par 5, il lui en reste toujours une de trop. Calculez le nombre de ses voitures sachant que ce nombre est premier et plus petit que 150.
- 23) Un escalier qui comprend 3 parties, mesurant respectivement 336 cm, 448 cm et 528 cm, doit avoir le moins de marches possible, mais elles doivent toutes avoir la même hauteur mesurée avec un nombre entier de cm. Calculez cette hauteur.
- 24) Une caisse en forme de pavé a pour dimensions 720 mm, 1512 mm et 1584 mm. On veut remplir cette caisse entièrement de cubes identiques. Quelle est la longueur maximale d'un côté de ces cubes? Quelle est la valeur la plus proche de 10 mm? Calculez à chaque fois le nombre de cubes que peut contenir la caisse.
- 25) Trois coureurs parcourent un circuit fermé. Le premier fait un tour en 12', le deuxième en 18', le troisième en 20' et le quatrième en 15'. Ils partent ensemble du même endroit à 9 heures. A quelle heure repasseront-ils pour la première fois ensemble au point de départ? La troisième fois?
- 26) Un vigneron veut commander des caisses pour emballer les bouteilles de sa dernière récolte. S'il prend des caisses de 42 bouteilles, il en restera 39; s'il prend des caisses de 35 bouteilles, il en restera 32 et s'il prend des caisses de 30 bouteilles, il en restera 27. Calculez le nombre de bouteilles sachant qu'il y en a entre 1000 et 1200.
- 27) Voici une propriété des nombres impairs : *la somme de deux nombres impairs consécutifs est un multiple de 4.*
- Vérifiez cette propriété sur 5 exemples.
 - Démontrez-la !
 - Cette propriété est-elle vraie également pour les nombres pairs ?
 - Que peut-on dire de la somme de 3 nombres pairs consécutifs ?
 - Que peut-on dire de la somme de 4 nombres pairs consécutifs ?
- 28) Complétez, puis démontrez :
- La somme de deux nombres pairs est
 - La somme de deux nombres impairs est
 - Le produit de deux nombres pairs est
 - Le produit de deux nombres impairs est
- 29) La somme de 5 nombres pairs consécutifs vaut 140. Calculez ces nombres !
- 30) La somme de 4 nombres impairs consécutifs vaut 560. Calculez ces nombres !
- 31) La somme de 3 multiples consécutifs de 7 vaut 273. Calculez ces nombres !
- 32) Trouvez les nombres de 4 chiffres divisibles à la fois par 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.
- 33) Calculez la somme des 2 premiers nombres impairs consécutifs, puis des 3, 4, 5, 6 premiers nombres impairs consécutifs. Que constatez-vous ? Montrez comment on peut calculer *rapidement* la somme des 100 premiers nombres impairs.
- 34) Rangez par inclusion les ensembles $20\mathbb{N}$, $2\mathbb{N}$, $12\mathbb{N}$ et $4\mathbb{N}$.

35) Ecrivez en extension les ensembles:

$$A = \{ x \in \mathbb{N} / x \leq 24 \}$$

$$B = \{ x \in 5\mathbb{N} / 5 < x < 45 \}$$

$$C = \{ x \in 3\mathbb{N} / 9 \leq x < 39 \}$$

$$D = \{ x \in 7\mathbb{N} / 20 \leq x \leq 30 \}$$

$$E = \{ x \in 13\mathbb{N} / 100 > x > 80 \}$$

$$F = \{ x \in 58\mathbb{N} / 120 \leq x < 140 \}$$

$$G = \{ x \in 3\mathbb{N} \cap 2\mathbb{N} / x < 20 \}$$

$$H = \{ x \in 5\mathbb{N} \cup 7\mathbb{N} / x \leq 18 \}$$

36) Ecrivez en compréhension les ensembles:

$$A = \{ 45, 60, 75, 90, 105 \}$$

$$B = \{ 81, 90, 99, 108 \}$$

$$C = \{ 20, 21, 24, 25, 27, 30 \}$$

$$D = \{ 18, 36, 54, 72, 90, 108 \}$$

37) Trouvez trois multiples consécutifs de 7 dont la somme vaut 147.

38) Les affirmations suivantes sont-elles exactes:

a) Tout entier naturel est un multiple de 1.

b) Tout entier naturel est un diviseur de 0.

c) Tout entier naturel est un multiple de 0.

d) Il existe un entier naturel qui est diviseur de tous les entiers naturels.

e) Il existe un entier naturel qui est multiple de tous les entiers naturels.

39) Ecrivez l'inégalité et l'égalité de la division euclidienne

a) de 385 par 13

b) de 5301 par 29

c) de 972 par 18

40) Trouvez:

a) le plus petit entier qui, divisé par 13, donne pour reste 8.

b) le plus petit entier supérieur à 35 qui, divisé par 8, donne pour reste 5.

41) Ecrivez l'égalité de la division euclidienne de 2057 par 29.

a) Quel est le plus grand nombre qu'on peut ajouter à 2057 sans changer le quotient de cette division?

b) Quel est le plus grand nombre qu'on peut retrancher à 2057 sans changer le quotient de cette division?

c) Quel est le plus petit nombre qu'il faut ajouter à 2057 si on veut que le quotient de cette division augmente de 1? de 2?

d) Quel est le plus petit nombre qu'il faut retrancher à 2057 si on veut que le quotient de cette division diminue de 1? de 2?

42) Ecrivez toutes les divisions euclidiennes dont

a) le dividende vaut 23 et le quotient 3

b) le dividende vaut 547 et le quotient 42

c) le dividende vaut 37 et le reste 7

d) le diviseur vaut 5 et le quotient 9.

43) Déterminez si les nombres suivants sont premiers:

589; 601; 703; 541; 793; 799; 1097; 1517

44) Décomposez en facteurs premiers, puis déterminez l'ensemble des diviseurs des nombres suivants:

756; 924; 935; 45^2 ; $(9 \cdot 14)^3$

45) Déterminez le nombre de diviseurs des nombres suivants:

61200; 15367968; $(468 \cdot 37975)^5$; $400 \cdot (135 \cdot 187^3)^4$

46) Calculez le ppcm et le pgcd des nombres suivants:

a) 48, 36 et 120

b) 77, 110 et 121

c) 300, 504 et 1260

d) $(5^3 \cdot 7^2)^4$; 385 et 630

e) $2^5 \cdot 3^7 \cdot 7^3 \cdot 19 \cdot 31^7$; $2^9 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 31 \cdot 43^3$ et $2^4 \cdot 3^6 \cdot 7^2 \cdot 17^3 \cdot 31^2$

47) Calculez: **a)** $\frac{5}{9828} + \frac{11}{1260} =$

b) $\frac{11}{140} + \frac{7}{30} - \frac{33}{126} =$

48) Le 5 avril 1993 est un lundi. Quels jours de la semaine correspondent aux dates 9/7/1990 et 2/10/1997?