

CHAPITRE IV

LIEUX GEOMETRIQUES

Exercice 1

- 1) Pour chacun des systèmes d'équations paramétriques suivants, trouvez une équation cartésienne puis dessinez sa courbe :

a)
$$\begin{cases} x = 2t - 4 \\ y = 3t + 1 \end{cases} \quad (t \in]-3; 2])$$

b)
$$\begin{cases} x = -u + 3 \\ y = 2u - 4 \end{cases} \quad (u \in [3; +\infty))$$

c)
$$\begin{cases} x = 4 \cos \theta \\ y = 3 \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \in [0; \pi])$$

d)
$$\begin{cases} x = 3 \cos t + 2 \\ y = 2 \sin t - 3 \end{cases} \quad \left(t \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{4} \right] \right)$$

e)
$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t^2 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

f)
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos t \\ y = \cos 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

g)
$$\begin{cases} x = \frac{2}{t} \\ y = 3 - t \end{cases} \quad (t \in]0; 2])$$

h)
$$\begin{cases} x = \frac{1}{\cos \theta} \\ y = 2 \tan \theta \end{cases} \quad \left(\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$$

- 2) Trouvez des systèmes d'équations paramétriques pour les courbes suivantes données par des équations cartésiennes :

a) $y = 2x - 3$

b) $x^2 + y^2 = 4$

c) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$

- 3)** Pour les courbes paramétrées suivantes, étudiez les symétries et la périodicité éventuelles, faites un tableau des variations, puis dessinez-les :

a) $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos 2t \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \tan t \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = \sin t \\ y = t \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = 5 \sin \frac{2t}{3} \\ y = 3 \cos t \end{cases}$ (courbe de Lissajous)

c) $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$

4) Soit $F \equiv \begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} + t \\ y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases}$.

a) Etude de F : éléments de symétrie, tableau des variations, courbe G_F .

b) Trouvez une équation cartésienne de F .

c) Que constatez-vous ? Que faut-il en conclure ?

- 5)** Dans un R.O.N. $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ on considère le cercle \mathcal{C} de diamètre $[OI]$ et g sa tangente au point I . Une droite variable d de pente réelle t passant par O coupe \mathcal{C} en P (avec $P \neq O$) et g en Q . On note Γ le lieu des points M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PQ}$ quand d varie.

a) Montrez que $\Gamma \equiv \begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{t^3}{1+t^2} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

b) Etude de F : éléments de symétrie, tableau des variations et courbe.

c) Trouvez une équation cartésienne de Γ .

(d'après examen juin 2006)

- 6)** Dans un R.O.N. (O, \vec{i}, \vec{j}) on donne un point M et ses projections orthogonales A et B sur (Ox) et (Oy) respectivement. Déterminez les lieux suivants :

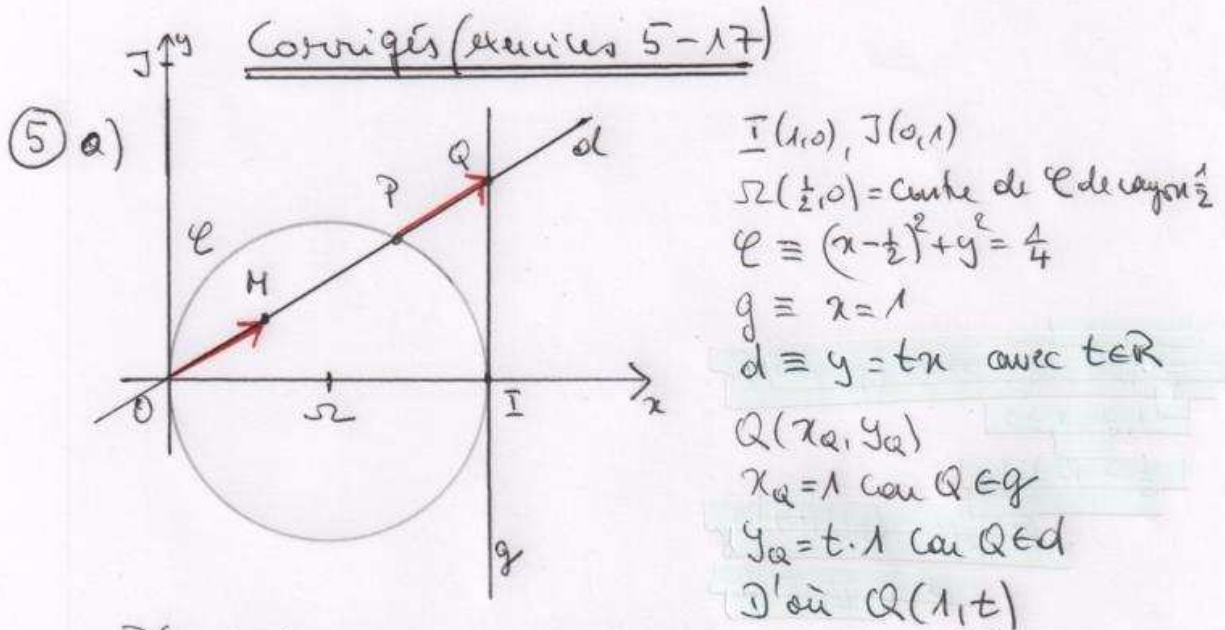
a) $\mathbb{L} = \{M / OA + OB = 1\}$

b) $\mathbb{K} = \{M / OA - OB = 2\}$

c) $\mathbb{H} = \{M / \text{la pente de } (AB) \text{ vaut } 2\}$

- 7) Soient deux droites perpendiculaires. Un segment de droite de longueur fixe glisse de manière telle que l'une de ses extrémités demeure sur la première droite et la seconde extrémité sur la deuxième droite. Déterminez le lieu du milieu de ce segment.
- 8) Soit un triangle quelconque $\Delta(ABC)$ et $(DEFG)$ un rectangle tel que $D \in]AB[$, $E \in]BC[$ et $F, G \in [AC]$.
- a) Déterminez le lieu \mathbb{L} du point d'intersection des diagonales du rectangle $(DEFG)$ en supposant que $\Delta(ABC)$ est rectangle en A.
 - b) Même question pour un triangle $\Delta(ABC)$ qui n'est rectangle ni en A, ni en C.
- 9) Déterminez le lieu des points du plan tels que la valeur absolue de la différence des carrés de leurs distances à deux droites fixes soit constante :
- a) lorsque les deux droites sont parallèles.
 - b) lorsque les deux droites sont perpendiculaires.
- 10) Soient A, B deux points fixes tel que $AB = 4$ et k un nombre réel.
- a) Déterminez le lieu $\mathbb{L}_k = \{M / |MA^2 - MB^2| = k\}$.
 - b) Déterminez le lieu $\mathbb{B}_k = \{M / |MA^2 - MB^2| < k\}$.
 - c) Déterminez le lieu $\mathbb{K}_k = \left\{M / \frac{MA^2}{MB^2} = k\right\}$.
- 11) Soient A, B deux points fixes (distincts), m une droite fixe perpendiculaire à (AB) ne passant ni par A ni par B, C un point variable sur m, a et b deux droites telles que $a \perp (CA)$, $A \in a$, $b \perp (CB)$ et $B \in b$ (figure). Déterminez le lieu $\mathbb{L} = \{M / M \in a \cap b\}$.
- 12) Soit un carré $(ABCD)$ de côté 6 et k un nombre réel.
- a) Déterminez le lieu \mathbb{L}_k des points du plan dont la somme des carrés des distances aux quatre droites (AB) , (BC) , (CD) et (AD) soit égale à k.
 - b) Pour quelles valeurs de la constante k le lieu comprend-il les quatre sommets du carré ? Construisez le lieu dans ce cas.
 - c) Pour quelles valeurs de la constante k le lieu comprend-il les milieux des quatre côtés du carré ? Construisez le lieu dans ce cas.
- 13) Soit Γ un cercle de centre C, d un diamètre fixe de Γ et M un point mobile sur Γ . Sur $[CM]$ on choisit le point P tel que $CP = Md$ (figure). Déterminez le lieu du point P.

- 14)** Dans le plan muni d'un R.O.N. (O, \vec{i}, \vec{j}) on a un point fixe $A(1,0)$ et un point mobile $B \in (Oy)$. On appelle K le point d'intersection de (Ox) et de la droite passant par B et perpendiculaire à (AB) et K' le symétrique de K par rapport à B (figure). Déterminez le lieu \mathbb{L} du point K' . Que représente A pour ce lieu ?
- 15)** Soit un triangle quelconque $\Delta(ABC)$, $D \in (AB)$, $E \in (AC)$, $(DE) \parallel (BC)$. Déterminez le lieu des points $M \in (CD) \cap (BE)$.
- 16)** Soit $\Delta(ABC)$ un triangle isocèle et rectangle en A , une droite variable $d \perp (BC)$ et les points $D \in d \cap (AB)$ et $E \in d \cap (AC)$.
- a)** Que peut-on dire des droites (BE) et (CD) ?
- b)** Déterminez le lieu \mathbb{L} du point $M \in (CD) \cap (BE)$.
- 17)** Soient d et d' deux droites perpendiculaires. Déterminez et représentez le lieu \mathbb{F} des points M qui vérifient les deux conditions suivantes :
- (1) la somme des carrés des distances de M aux droites d et d' est inférieure ou égale à 2.
 - (2) la distance de M à l'une des deux droites est égale au carré de sa distance à l'autre droite.



$P(x_P, y_P)$ avec $y_P = tx_P$ car $P \in d$
 et $(x_P - \frac{1}{2})^2 + y_P^2 = \frac{1}{4}$ car $P \in \mathcal{C}$ (2)
 (1) \rightarrow (2): $x_P^2 - x_P + \frac{1}{4} + t^2 x_P^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (1+t^2)x_P^2 - x_P = 0$
 or $P \neq O$ donc $x_P \neq 0$, d'où:
 $(1+t^2)x_P - 1 = 0 \Leftrightarrow x_P = \frac{1}{1+t^2}$
 et $y_P = t \cdot x_P = \frac{t}{1+t^2}$

D'où $P(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2})$

En posant $M(x, y)$ on a:

$\vec{OM} = \vec{PQ} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{1+t^2} \\ t - \frac{t}{1+t^2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+t^2-1}{1+t^2} \\ y = \frac{t+t^3-t}{1+t^2} \end{cases}$

et par conséquent $\Gamma \equiv \begin{cases} x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ y = \frac{t^3}{1+t^2} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

b) $\bullet x(-t) = x(t)$
 $y(-t) = \frac{(-t)^3}{1+(-t)^2} = -\frac{t^3}{1+t^2} = -y(t)$ } donc (Ox) = axe de symétrie de Γ
 $\bullet x'(t) = \frac{2t(1+t^2) - t^2 \cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{2t + 2t^3 - 2t^3}{(1+t^2)^2} = \frac{2t}{(1+t^2)^2}$ signe de t

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2}{t^2} = 1$$

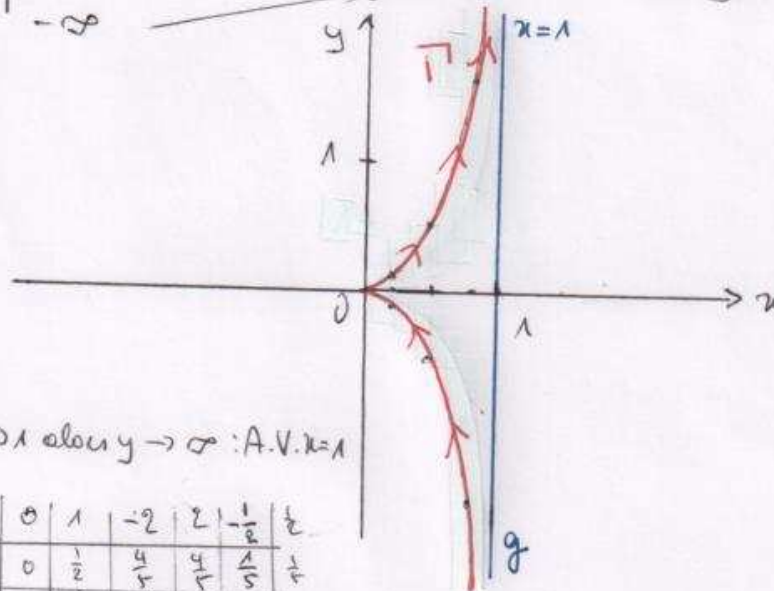
$$y'(t) = \frac{3t^2(1+t^2) - t^3 \cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{3t^2 + 3t^4 - 2t^4}{(1+t^2)^2} = \frac{t^4 + 3t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{t^2(t^2 + 3)}{(1+t^2)^2} > 0$$

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3}{t^2} = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y = -\infty$$

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$x'(t)$	-	0	+
x	1	0	1
$y'(t)$	+	0	+
y	$-\infty$	0	$+\infty$



Si $x \rightarrow 1$ alors $y \rightarrow \infty$: A.V. $x=1$

t	-1	0	1	-2	2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
y	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{5}$	$\frac{8}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

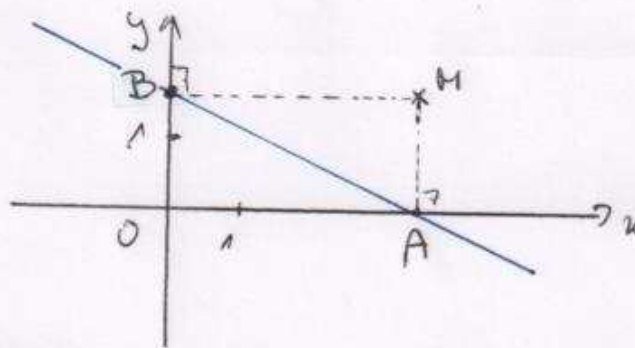
c) $y = t \cdot \frac{t^2}{1+t^2} = t \cdot x$

• $x=0 \Leftrightarrow t^2=0 \Leftrightarrow t=0 \Leftrightarrow y=0$: $0 \in \Gamma$

• si $x \neq 0$: $\frac{y}{x} = t$ d'où : $x = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow x(x^2 + y^2) = y^2$

cette équation est également vérifiée pour $x=y=0$ d'où $\Gamma \equiv x^3 + xy^2 = y^2$

⑥



$$\begin{aligned} M(x, y) \\ A(x, 0) \\ B(0, y) \\ OA = \sqrt{x^2} = |x| \\ OB = \sqrt{y^2} = |y| \end{aligned}$$

a) $OA + OB = 1 \Leftrightarrow |x| + |y| = 1 \quad (*)$

1^{re} cas: $x \geq 0$ et $y \geq 0$

$(*) \Leftrightarrow x + y = 1 \Leftrightarrow y = -x + 1 \equiv d_1$

2^e cas: $x \leq 0$ et $y \geq 0$

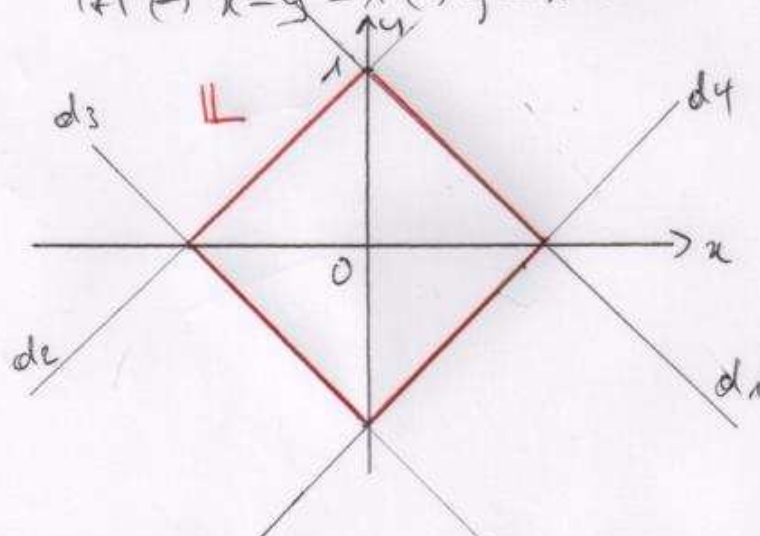
$(*) \Leftrightarrow -x + y = 1 \Leftrightarrow y = x + 1 \equiv d_2$

3^e cas: $x \leq 0$ et $y \leq 0$

$(*) \Leftrightarrow -x - y = 1 \Leftrightarrow y = -x - 1 \equiv d_3$

4^e cas: $x \geq 0$ et $y \leq 0$

$(*) \Leftrightarrow x - y = 1 \Leftrightarrow y = x - 1 \equiv d_4$



b) $OA - OB = 2 \Leftrightarrow |x| - |y| = 2 \Leftrightarrow |x| = |y| + 2 \quad (**)$

1^{re} cas: $x \geq 0$ et $y \geq 0$

$(**) \Leftrightarrow x = y + 2 \Leftrightarrow y = x - 2 \equiv d'_1$

2^e cas: $x \leq 0$ et $y \geq 0$

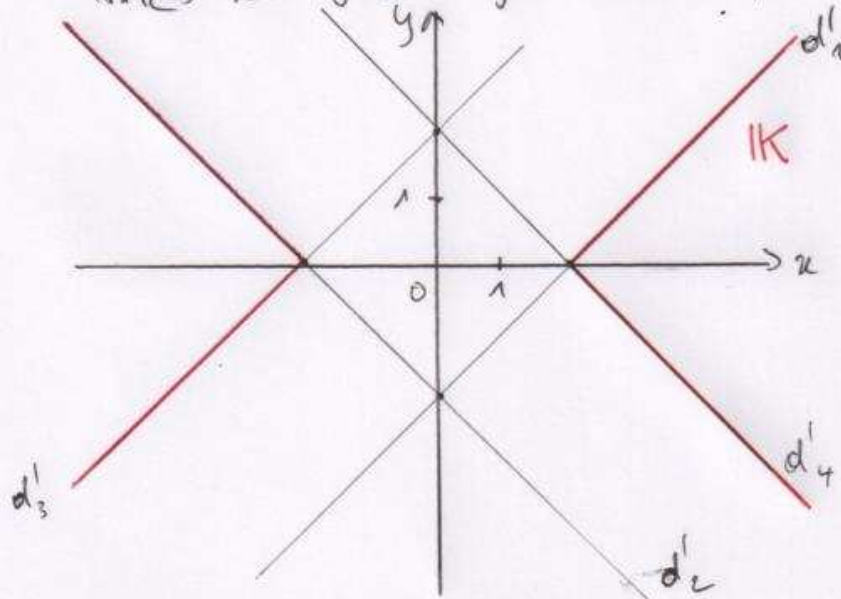
$(**) \Leftrightarrow -x - y + 2 \Leftrightarrow y = -x - 2 \equiv d'_2$

3^e cas: $x \leq 0$ et $y \leq 0$

$$(\forall x) \Leftrightarrow -x = -y + 2 \Leftrightarrow y = x + 2 \equiv d'_3$$

4^e cas: $x > 0$ et $y \leq 0$

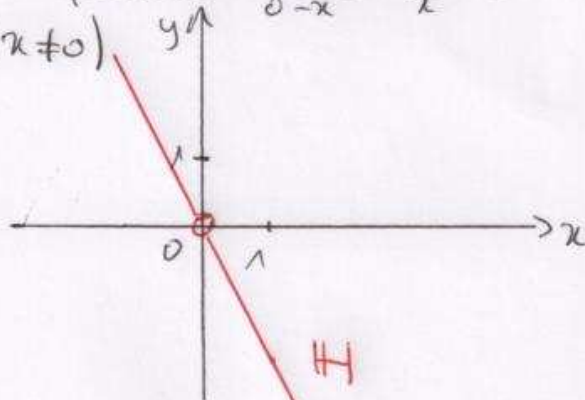
$$(\forall x) \Leftrightarrow x = -y + 2 \Leftrightarrow y = -x + 2 \equiv d'_4$$



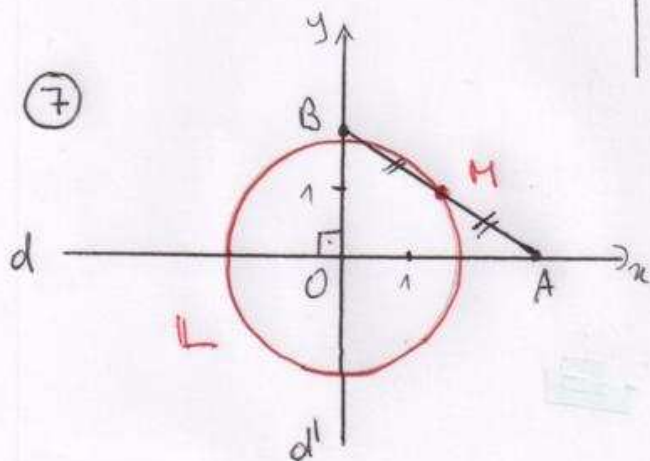
c) pente (AB) vaut 2 : $\because A \neq 0$ car sinon (AB) = (Oy) donc $x \neq 0$

$$\circ \text{ pente (AB)} = \frac{y-0}{0-x} = -\frac{y}{x} = 2$$

$$D'où : H \equiv y = -2x \quad (x \neq 0)$$



⑦



$d \perp d'$
 $A \in d, B \in d'$ et $AB = l$
 avec $l > 0$ fixe

$$\mathcal{L} = \{M \mid M = \text{milieu de } [AB]\}$$

$$\text{et } 0 < f < c \Leftrightarrow 0 < ex < c \quad (:\frac{c}{2} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{c}{2})$$

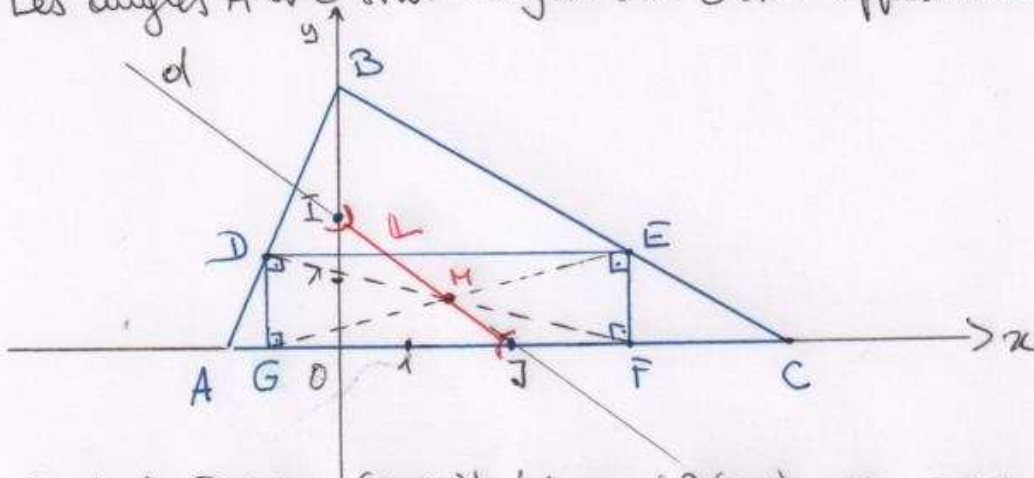
$$\text{D'où: } \mathbb{L} \equiv y = -\frac{b}{c}x + \frac{b}{2} \text{ avec } 0 < x < \frac{c}{2} \text{ et } 0 < y < \frac{b}{2}$$

$$\text{pour } x=0: y=\frac{b}{2} \text{ donc } I(0, \frac{b}{2}) \in d \text{ mais } I \notin \mathbb{L}$$

$$\text{pour } x=\frac{c}{2}: y=0 \text{ donc } J(\frac{c}{2}, 0) \in d \text{ mais } J \notin \mathbb{L}$$

$$\text{Finalement: } \mathbb{L} =]I]J[, \text{ avec } I = \text{milieu de } [AB] \\ J = \text{milieu de } [AC]$$

b) Les angles \hat{A} et \hat{C} sont aigus car G et F appartiennent à $[AC]$.



Soit le R.O.N. (O, \vec{i}, \vec{j}) tel que $\begin{cases} A(a, 0) & \text{avec } a < 0 \\ B(0, b) & \text{avec } b > 0 \\ C(c, 0) & \text{avec } c > 0 \end{cases}$

Alors: $G(g, 0)$ avec $a < g < 0$ car $G = p_{AC}(D)$ et $D \in]A, B[$

$F(f, 0)$ avec $0 < f < c$ car $F = p_{AC}(E)$ et $E \in]B, C[$

$D(g, d)$ avec $0 < d < b$

$E(f, d)$

En posant $H(x, y)$ alors $\begin{cases} x = \frac{g+f}{2} \\ y = \frac{d}{2} \end{cases}$ car $H = \text{milieu de } [GE] = \text{milieu de } [DF]$

$$\text{D'autre part } (AB) \equiv y = -\frac{b}{a}x + b \text{ et } (BC) \equiv y = -\frac{b}{c}x + b.$$

$$\text{Or } D \in (AB) \text{ donc } d = -\frac{b}{a}g + b \Leftrightarrow g = (b-d)\frac{a}{b} \Leftrightarrow g = a - \frac{a}{b}d$$

$$\text{et } E \in (BC) \text{ donc } d = -\frac{b}{c}f + b \Leftrightarrow f = (b-d)\frac{c}{b} \Leftrightarrow f = c - \frac{c}{b}d$$

D'où: $x = \frac{a - \frac{a}{b}d + c - \frac{c}{b}d}{2} = \frac{a+c}{2} - d \frac{a+c}{2b}$

or $y = \frac{d}{2} \Leftrightarrow d = 2y$

donc $x = \frac{a+c}{2} - 2y \frac{a+c}{2b} \Leftrightarrow \frac{a+c}{b} y = -x + \frac{a+c}{2} \quad (*)$

1^{er} cas: $a+c=0 \Leftrightarrow 0 = \text{milieu } [AC]$

(*) $\Leftrightarrow 0 = -x \Leftrightarrow x=0$

et comme $0 < d < b \Leftrightarrow 0 < \frac{d}{2} < \frac{b}{2} \Leftrightarrow 0 < y < \frac{b}{2}$

$\mathbb{L} =]0, \frac{b}{2}[$ avec $I(0, \frac{b}{2}) = \text{milieu } [OB]$

2^e cas: $a+c \neq 0$

(*) $\cdot \frac{b}{a+c} \Leftrightarrow y = -\frac{b}{a+c} x + \frac{b}{2} \equiv d$

d n(0): $0 = -\frac{b}{a+c} x + \frac{b}{2} \Leftrightarrow x = \frac{b}{2} \cdot \frac{a+c}{b} \Leftrightarrow x = \frac{a+c}{2}$

$J(\frac{a+c}{2}, d) \in d$, $J = \text{milieu de } [AC]$

d n(0): $y = \frac{b}{2}$, $I(0, \frac{b}{2}) \in d$, $I = \text{milieu } [OB]$

et comme $0 < y < \frac{b}{2}$ ou a :

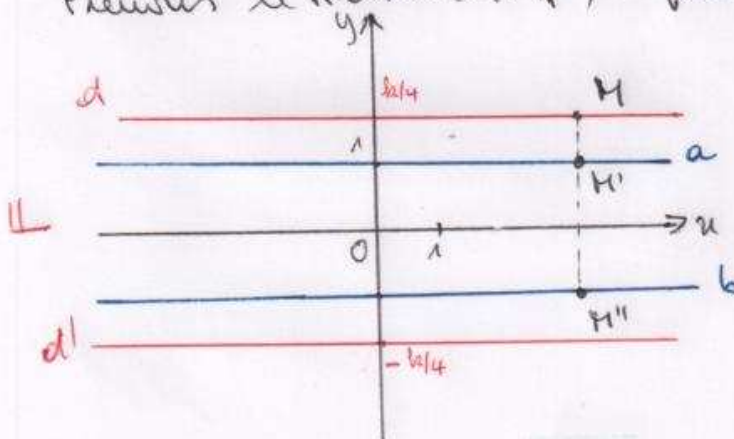
$\mathbb{L} =]I, J[$ avec $I = \text{milieu } [OB]$ et $J = \text{milieu } [AC]$

Conclusion: dans les 2 cas on a le même résultat.

⑨ a) Soient a et b les deux droites, $k \in \mathbb{R}_+$ une courbe et

$\mathbb{L}_k = \{M \mid |Ma^2 - Mb^2| = k\}$

Prendre le R.O.N. (O, \vec{i}, \vec{j}) tel que $a \equiv y=1$ et $b \equiv y=-1$



Posons $M(x, y)$ alors

$Ma = MM'$ avec $M'(x, 1)$

$Mb = MM''$ avec $M''(x, -1)$,

d'où:

$|Ma^2 - Mb^2| = k$

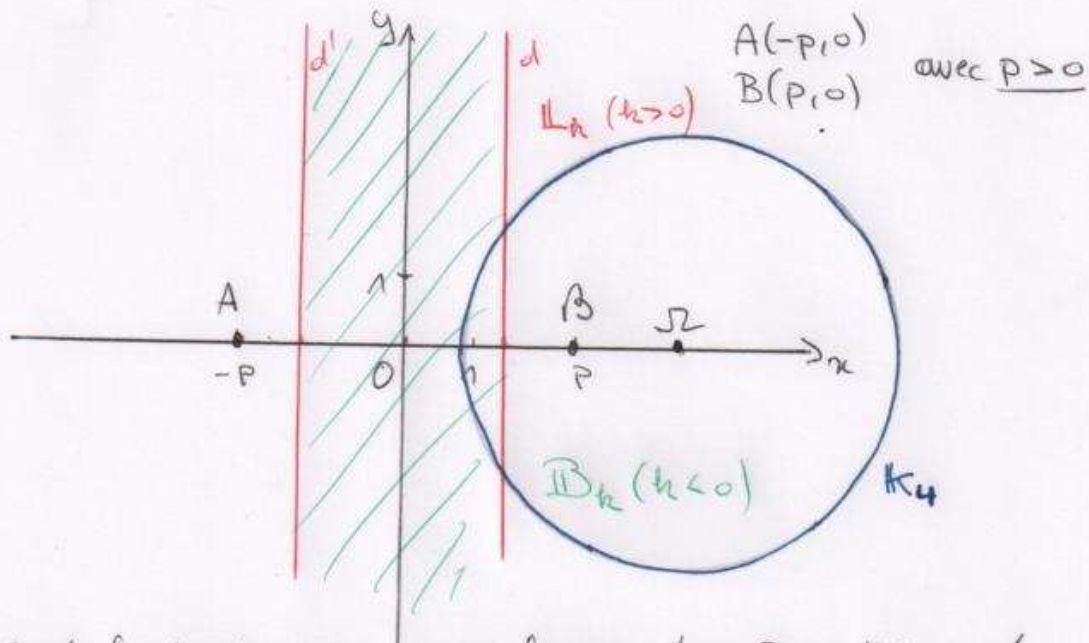
$\Leftrightarrow |(y-1)^2 - (y+1)^2| = k$

$\Leftrightarrow |y^2 - 2y + 1 - y^2 - 2y - 1| = k$

$\Leftrightarrow |-4y| = k$

$\Leftrightarrow |y| = \frac{k}{4}$

(10) Soit le R.O.N. (O, \vec{i}, \vec{j}) avec $O = \text{milieu } [AB]$ et $(Ox) = (AB)$



* Il est évident que pour $k < 0$, $L_k = B_k = K_k = \emptyset$

* pour $k = 0$: $|MA^2 - MB^2| = 0 \Leftrightarrow MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow MA = MB$
 $\Leftrightarrow M \in \text{médiatrice de } [AB] = (Oy)$

$$|MA^2 - MB^2| \leq 0 \Leftrightarrow |MA^2 - MB^2| = 0$$

$$\text{D'où } L_0 = B_0 = (Oy)$$

$$\frac{MA^2}{MB^2} = 0 \Leftrightarrow MA = 0 \Leftrightarrow M = A$$

$$\text{D'où } K_0 = \{A\}$$

* Supposons maintenant $k > 0$ et posons $M(x, y)$.

$$|MA^2 - MB^2| = k \Leftrightarrow \left| \underbrace{(x+p)^2 + y^2}_{MA^2} - \underbrace{(x-p)^2 + y^2}_{MB^2} \right| = k$$

$$\Leftrightarrow |x^2 + 2px + p^2 + y^2 - x^2 + 2px - p^2 - y^2| = k$$

$$\Leftrightarrow |4px| = k$$

$$\Leftrightarrow |x| = \frac{k}{4p}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k}{4p} \equiv d \text{ ou } x = -\frac{k}{4p} \equiv d'$$

donc $\mathbb{K}_k = d \cup d'$.

Rem: pour $k=0$ on a: $d=d'=(0,y)$ et on retrouve \mathbb{K}_0 !

$$\bullet |HA^2 - HB^2| < R \Leftrightarrow |x| < \frac{k}{4p} \Leftrightarrow -\frac{k}{4p} < x < \frac{k}{4p}$$

\mathbb{B}_k = bande comprise entre d et d'

$$\begin{aligned} \bullet \frac{HA^2}{HB^2} = k &\Leftrightarrow HA^2 = k \cdot HB^2 \Leftrightarrow (x+p)^2 + y^2 = k[(x-p)^2 + y^2] \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2px + p^2 + y^2 = kx^2 - 2kpx + kp^2 + ky^2 \\ &\Leftrightarrow (1-k)x^2 + 2(1+k)px + (1-k)y^2 + (1-k)p^2 = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

1^{er} cas: $k=1$

$$(*) \Leftrightarrow 4px = 0 \Leftrightarrow x=0$$

$$\mathbb{K}_1 = (0,y)$$

2^e cas: $k \neq 1$

$$(*) \mid (1-k) \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2p \frac{(1+k)}{1-k} x + y^2 + p^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{p(1+k)}{1-k}\right)^2 + y^2 = \frac{p^2(1+k)^2}{(1-k)^2} - p^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{p^2(1+k)^2 - p^2(1-k)^2}{(1-k)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4kp^2}{(1-k)^2}$$

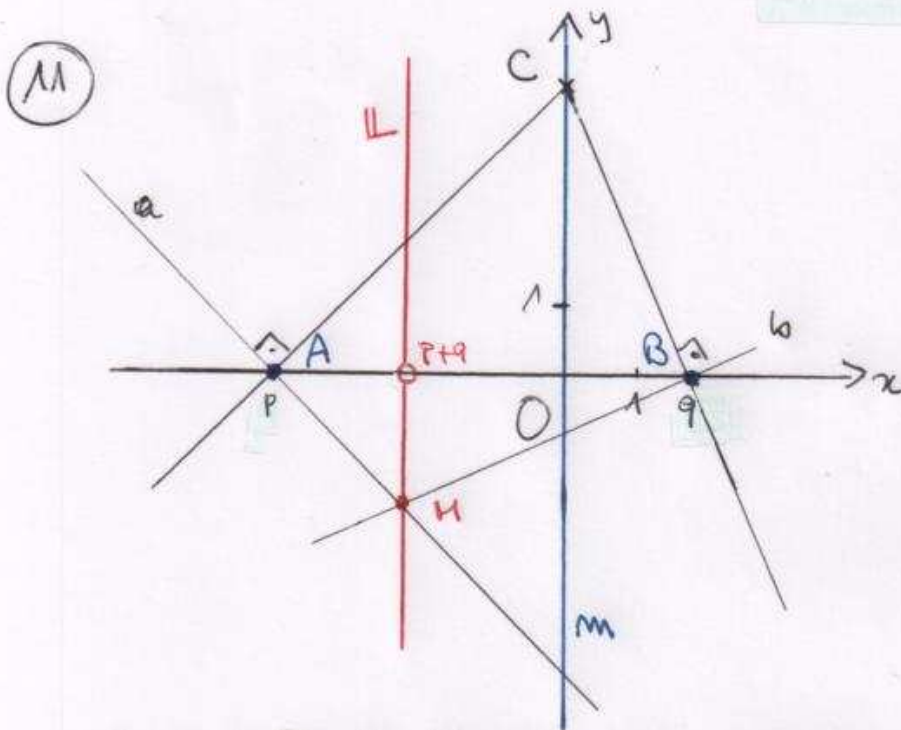
$$\mathbb{K}_k = \text{cercle de centre } \Omega\left(-\frac{p(1+k)}{1-k}, 0\right) = \Omega\left(p \frac{k+1}{k-1}, 0\right)$$

$$\text{de rayon } r = \frac{2p\sqrt{k}}{|1-k|}$$

$$\text{p.ex. } \mathbb{K}_4 = \mathcal{C}\left(\Omega\left(\frac{5p}{3}, 0\right), \frac{4}{3}p\right)$$

Remarque

Essayez de décrire l'évolution de \mathbb{K}_k quand k tend vers: $+\infty$, 1^+ , 1^- , 0^+ !



• Soit le R.O.N. (O, \vec{i}, \vec{j}) avec $O \in m \cap (AB)$, $O \neq A$ et $O \neq B$,
 $(Ox) = (AB)$ et $(Oy) = m$: $A(p, 0)$, $p \neq 0$ } p, q fixes, $p \neq q$
 $B(q, 0)$, $q \neq 0$
 $C(0, c)$, $c \in \mathbb{R}$, c variable

• si $C=O$ alors $a \cap b = \emptyset$, on peut donc supposer
 que $C \neq O$ c'est-à-dire $c \in \mathbb{R}^*$.

• pente de $(AC) = \frac{c}{-p}$, pente de $a = \frac{p}{c}$, $a \equiv y = \frac{p}{c}x + r$
 $A \in a$ donc $0 = \frac{p}{c}p + r \Leftrightarrow r = -\frac{p^2}{c}$
 D'où: $a \equiv y = \frac{p}{c}x - \frac{p^2}{c}$

• pente de $(BC) = \frac{c}{-q}$, pente de $b = \frac{q}{c}$, $b \equiv y = \frac{q}{c}x + s$
 $B \in b$ donc $0 = \frac{q}{c}q + s \Leftrightarrow s = -\frac{q^2}{c}$
 D'où $b \equiv y = \frac{q}{c}x - \frac{q^2}{c}$

• $M(x, y) \in a \cap b \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{p}{c}x - \frac{p^2}{c} \\ y = \frac{q}{c}x - \frac{q^2}{c} \end{cases} \quad (c \in \mathbb{R}^*, p, q \text{ fixes})$

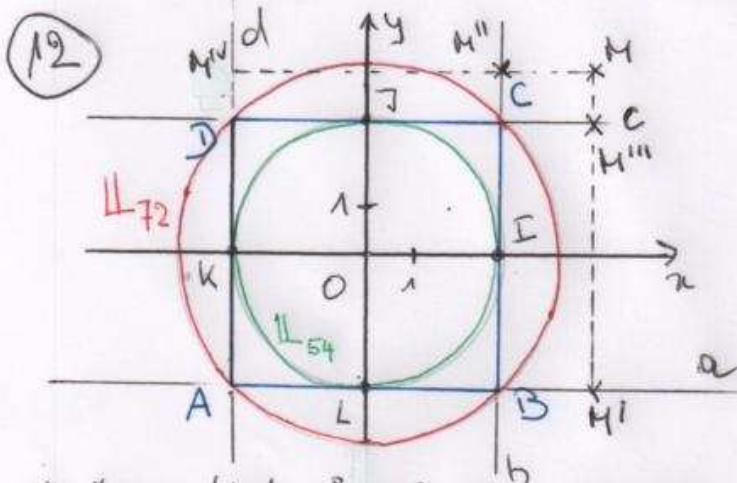
$$\frac{p}{c}x - \frac{p^2}{c} = \frac{q}{c}x - \frac{q^2}{c} \quad | \cdot c \Rightarrow px - p^2 = qx - q^2 \Leftrightarrow (p-q)x = p^2 - q^2$$

$$\Leftrightarrow (p-q)x = (p-q)(p+q) \quad | : (p-q) \neq 0 \text{ car } p \neq q$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = p+q}$$

$y = \frac{p}{c}(p+q) - \frac{p^2}{c} = \frac{p}{c}(p+q-p) = \frac{pq}{c}$ donc si $c \in \mathbb{R}^*$, y prend toutes valeurs réelles non nulles, d'où:

$$\mathbb{L} = \begin{cases} x = p+q \\ y \neq 0 \end{cases} \quad (\text{droite } \mathbb{L}(q) \text{ sauf son pt d'intersection avec } (Ox))$$



Prendons le R.O.N. (O, \vec{i}, \vec{j})

tel que: $A(-3,-3)$

$B(3,-3)$

$C(3,3)$

$D(-3,3)$

et posons:

$a = (AB) \equiv y = -3$

$b = (BC) \equiv x = 3$

$c = (CD) \equiv y = 3$

$d = (DA) \equiv x = -3$

a) $\mathbb{L}_k = \{M \mid Ma^2 + Mb^2 + Mc^2 + Md^2 = k\}$

- si $k < 0$: $\mathbb{L}_k = \emptyset$ car $Ma^2 + \dots \geq 0$

- si $k = 0$: $Ma^2 + \dots + Md^2 = 0 \Leftrightarrow Ma = Mb = Mc = Md = 0$

$$\Leftrightarrow M \in \underbrace{a \cap b \cap c \cap d}_{=\emptyset}$$

$$\mathbb{L}_0 = \emptyset$$

- si $k > 0$:

$$Ma^2 = MM'^2 = (y+3)^2 \quad \text{car } M'(x, -3)$$

$$Mb^2 = MM''^2 = (x-3)^2 \quad \text{car } M''(3, y)$$

$$Mc^2 = MM'''^2 = (y-3)^2 \quad \text{car } M'''(x, 3)$$

$$Md^2 = MM''^2 = (x+3)^2 \quad \text{car } M''(-3, y)$$

$$Ma^2 + Mb^2 + Mc^2 + Md^2 = k \Leftrightarrow (y+3)^2 + (x-3)^2 + (y-3)^2 + (x+3)^2 = k$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 6y + 9 + x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 + x^2 + 6x + 9 = k$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 36 = k$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{k-36}{2}$$

$$\text{si } k < 36 : \mathbb{L}_k = \emptyset \text{ car } x^2 + y^2 \geq 0$$

$$\text{si } k = 36 : x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \quad \mathbb{L}_{36} = \{O\}$$

$$\text{si } k > 36 : \mathbb{L}_k = \mathcal{C}(O, \sqrt{\frac{k-36}{2}})$$

Résumé : pour $k \in \mathbb{R}$ on a :

$$\text{si } k < 36 : \mathbb{L}_k = \emptyset$$

$$\text{si } k = 36 : \mathbb{L}_{36} = \{O\}$$

$$\text{si } k > 36 : \mathbb{L}_k = \mathcal{C}(O, \sqrt{\frac{k-36}{2}})$$

$$b) A, B, C, D \in \mathbb{L}_k \Leftrightarrow \sqrt{\frac{k-36}{2}} = OA$$

$$\Leftrightarrow \frac{k-36}{2} = OA^2 = 3^2 + 3^2 = 18$$

$$\Leftrightarrow \frac{k-36}{2} = 18$$

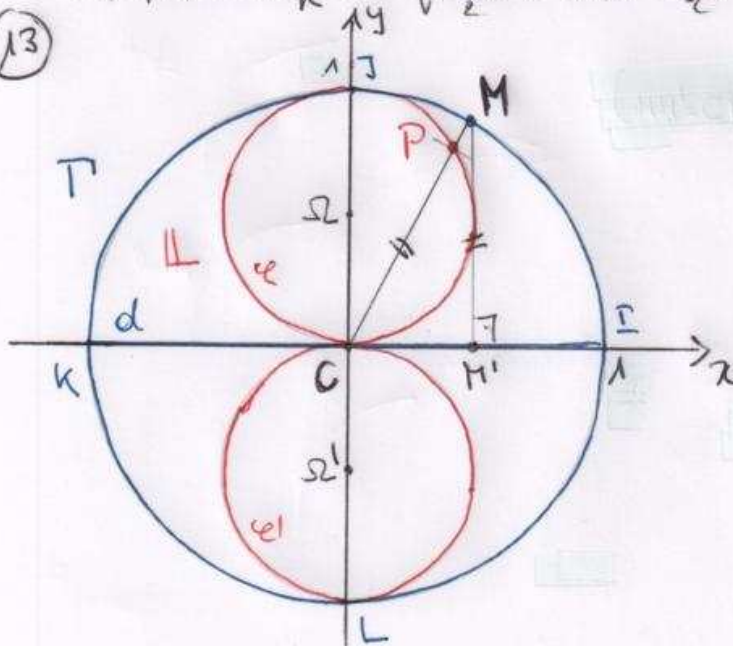
$$\Leftrightarrow k = 72$$

$$c) I(3,0) = \text{milieu}[BC], J(0,3) = \text{milieu}[CD], K(-3,0) = \text{milieu}[DA], L(0,-3) = \text{milieu}[AB]$$

$$OI = OJ = OK = OL = 3$$

$$I, J, K, L \in \mathbb{L}_k \Leftrightarrow \sqrt{\frac{k-36}{2}} = 3 \Leftrightarrow \frac{k-36}{2} = 9 \Leftrightarrow k = 54$$

(13)



Dans le R.O.N. (C, \vec{CI}, \vec{CJ}) :

$$M(x_M, y_M), M'(x_{M'}, 0)$$

$$T \equiv x^2 + y^2 = 1$$

$$C(0,0)$$

$$d = [IK] = \text{diamètre fixe}$$

$$MH' = Hd = CP$$

$$\mathbb{L} = \{P \mid CP = Hd\}$$

En posant $P(x, y)$ on a :

$$\bullet CP = MH' \Leftrightarrow CP^2 = MH'^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = y_M^2 \quad (1)$$

$$\bullet P \in (CH) \Leftrightarrow \vec{CP} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{CH} \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & x_M \\ y & y_M \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow xy_M - yx_M = 0 \quad (2)$$

$$\bullet M \in \Gamma \Leftrightarrow x_M^2 + y_M^2 = 1 \quad (3)$$

- si $x_M = 0$ alors $M = J$ ou $M = L \Leftrightarrow P = J$ ou $P = L$

donc $J, L \in \mathbb{L}$

- si $y_M = 0$ alors $M = I$ ou $M = K \Leftrightarrow P = C$ donc $C \in \mathbb{L}$

- Supposons $x_M \neq 0$ et $y_M \neq 0$ ($M \notin (Ox) \cup (Oy)$ donc $P \notin (Ox) \cup (Oy)$ et par conséquent $x \neq 0$ et $y \neq 0$)

$$(2) \Leftrightarrow x_M = \frac{xy_M}{y}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow (3): \frac{x^2 y_M^2}{y^2} + y_M^2 &= 1 \Leftrightarrow x^2 y_M^2 + y^2 y_M^2 = y^2 \\ &\Leftrightarrow y_M^2 (x^2 + y^2) = y^2 \\ &\Leftrightarrow y_M^2 = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$\rightarrow (1): x^2 + y^2 = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 = y^2$$

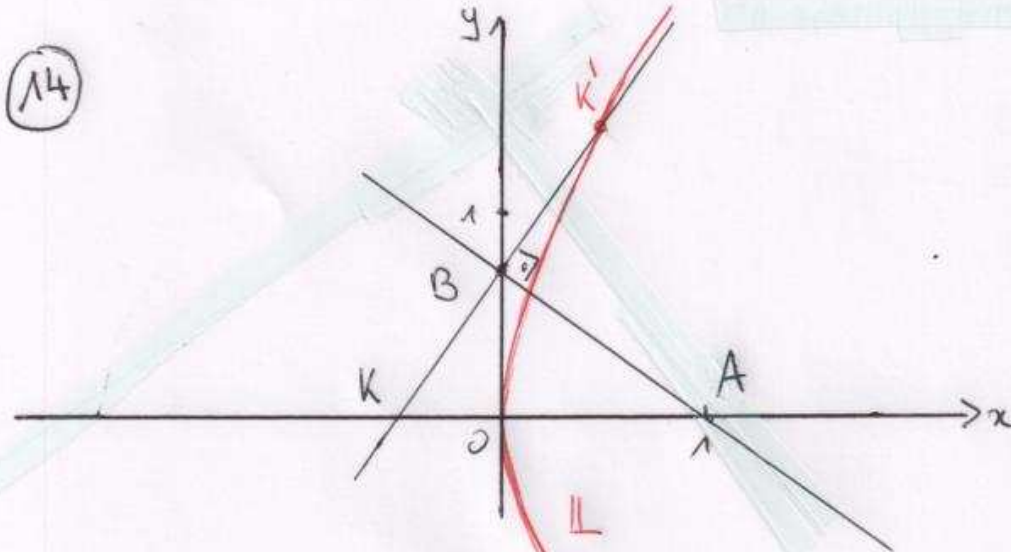
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = y \text{ ou } x^2 + y^2 = -y$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - y = 0 \text{ ou } x^2 + y^2 + y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \text{ ou } x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

cerce \mathcal{C} de centre $\Omega(0, \frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{2}$ cerce \mathcal{C}' de centre $\Omega'(0, -\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{2}$

On $J, C \in \mathcal{C}$ et $L, C \in \mathcal{C}'$, donc $\mathbb{L} = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$



$$\mathbb{L} = \{K' \mid K' = \Delta_B(K)\}$$

$A(1,0)$, $B(0,b)$ avec $b \in \mathbb{R}$, pente de $(AB) = -b$

- si $b=0$ alors $B=O$ et $K=O=K'$ donc $\underline{O \in \mathbb{L}}$

- supposons $b \neq 0$:

pente de $(BK) = \frac{1}{b}$ et $(BK) \equiv y = \frac{1}{b}x + b$ car $B \in (BK)$.

$K(x_k, 0) \in (BK) \cap (Ox) \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{b}x_k + b \Leftrightarrow x_k = -b^2$

D'où: $K(-b^2, 0)$
 $\Delta_B(K) = K' \Leftrightarrow \overrightarrow{KB} \begin{pmatrix} b^2 \\ b \end{pmatrix} = \overrightarrow{BK'} \begin{pmatrix} x_{K'} \\ y_{K'} - b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{K'} = b^2 \\ y_{K'} = 2b \end{cases}$

D'où $K'(b^2, 2b)$

pour $b=0$, $K'(0,0) = O \in \mathbb{L}$, d'où:

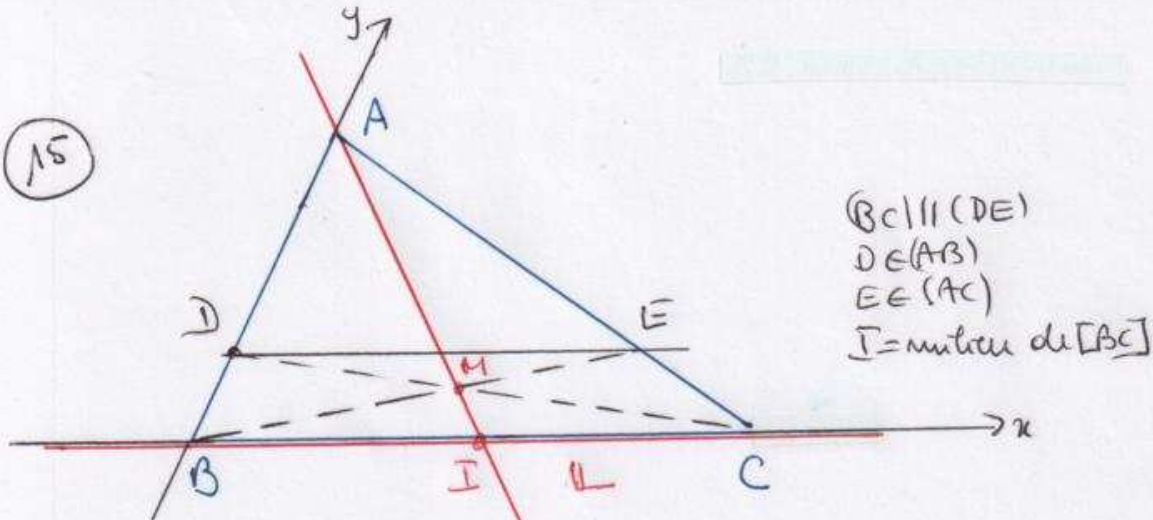
$$\mathbb{L} \equiv \begin{cases} x = b^2 \\ y = 2b \end{cases} (b \in \mathbb{R})$$

$$(2) \Leftrightarrow b = \frac{y}{2}$$

$$\rightarrow (1): x = \frac{y^2}{4} \Leftrightarrow y^2 = 4x$$

$\mathbb{L} \equiv y^2 = 4x$, \mathbb{L} la parabole de sommet O ,
 d'axe focal (Ox) , de paramètre $p=1$
 et de foyer $A(1,0)$

15



$(BC) \parallel (DE)$
 $D \in (AB)$
 $E \in (AC)$
 $I = \text{milieu de } [BC]$

$$\mathbb{L} = \{M \mid M \in (BE) \cap (CD)\}$$

Dans le repère (B, \vec{BC}, \vec{BA}) on a :

$A(0,1)$, $B(0,0)$, $C(1,0)$, $D(0,d)$ avec $d \in \mathbb{R}$, $E(x_E, d)$, $(x_E \in \mathbb{R})$.

$(AC) \equiv y = -x + 1$ et comme $E \in (AC)$: $d = -x_E + 1 \Leftrightarrow x_E = 1 - d$

D'où $E(1-d, d)$

1^{er} cas : $d = 0$

Alors $D = B$ et $E = C$ donc $(BE) \cap (CD) = (BC) \cap (CB) = (BC)$

D'où $(BC) \subset \mathbb{L}$

2^e cas : $d = 1$

Alors $A = D = E$ donc $(BE) \cap (CD) = (BA) \cap (CA) = \{A\}$

D'où $A \in \mathbb{L}$

3^e cas : $d \neq 0$ et $d \neq 1$

$$(DC) \equiv y = -dx + d$$

$$(EB) \equiv y = \frac{d}{1-d}x$$

$$M(x, y) \in (DC) \cap (EB) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{d}{1-d}x & (1) \\ y = -dx + d & (2) \end{cases}$$

éliminons d :

$$(2) \Leftrightarrow y = d(1-x)$$

$$\underline{x \neq 1} \text{ car si } x = 1 \text{ alors } (2) : y = 0$$

$$\rightarrow (1) : 0 = \frac{d}{1-d} \cdot 1 \Leftrightarrow d = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{1-x} = d$$

ou $d \neq 0$

$$\rightarrow (1) : y = \frac{\frac{y}{1-x}}{1 - \frac{y}{1-x}} x \Leftrightarrow y = \frac{yx}{1-x-y} \Leftrightarrow y - xy - y^2 = xy$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 2xy - y = 0$$

$$\Leftrightarrow y(y + 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } y + 2x - 1 = 0$$

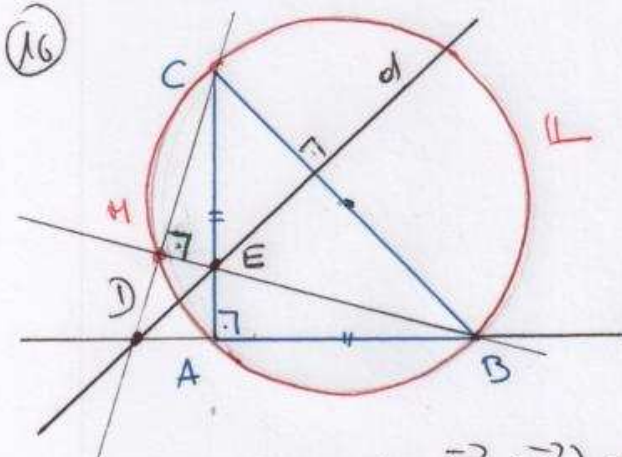
$$\Leftrightarrow y = 0 \equiv (BC) \text{ ou } y = -2x + 1 \equiv d \quad \text{or } -2 \cdot 0 + 1 = 1 \text{ donc } A \in d$$

$$-2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 0 \text{ donc } I(\frac{1}{2}, 0) \in d$$

$$\text{et } I = \text{milieu de } [BC]$$

$$\text{donc } d = (AI)$$

Conclusion: $\mathcal{L} = (BC) \cup (AI)$



a) Dans le R.O.N. (A, \vec{AB}, \vec{AC}) on a:
 $A(0,0), B(1,0), C(0,1), D(x_D, 0)$ avec $x_D \in \mathbb{R}, E(0, y_E)$ avec $y_E \in \mathbb{R}$
 pente de $(BC) = -1$, pente de $d = 1$ donc $d \equiv y = x + p$
 avec $p \in \mathbb{R}$

$$E \in d \text{ donc } y_E = p \text{ et } E(0, p)$$

$$D \in d \text{ donc } 0 = x_D + p \Leftrightarrow x_D = -p \text{ et } D(-p, 0)$$

$$(EB) \equiv y = -px + p$$

$$- \text{si } p = 0 \text{ alors } D = E = A \text{ donc } (EB) = (AB) \text{ et } (DC) = (AC)$$

$$\text{et on a: } (EB) \perp (DC)$$

$$- \text{si } p \neq 0 \text{ alors } (DC) \equiv y = \frac{1}{p}x + 1 \text{ et on a:}$$

$$\text{pente de } (EB) \cdot \text{pente de } (DC) = -p \cdot \frac{1}{p} = -1$$

$$\text{donc } (EB) \perp (DC)$$

Conclusion: $\forall p \in \mathbb{R} \quad (EB) \perp (DC)$

$$b) \mathcal{L} = \{M \mid M \in (CD) \cap (BE)\}$$

$M \in (CD) \cap (BE) \Rightarrow \Delta(BCH)$ rect. en M
 $\Rightarrow M \in$ cercle de diamètre $[BC]$ d'après le th^{me} du cercle de Thalès

(17) $d \perp d'$

$$\mathbb{F} = \{M \mid Md^2 + Md'^2 \leq 2 \text{ et } (Md = Md'^2 \text{ ou } Md' = Md^2)\}$$

Prendons un R.O.N. (O, \vec{i}, \vec{j}) tel que $O \in d \cap d'$, $d = (Ox)$, $d' = (Oy)$

et posons $M(x, y)$, alors $Md = MH'$ avec $H'(x, 0)$ et

$Md' = MH''$ avec $H''(0, y)$, d'où :

$$Md = \sqrt{y^2} = |y|, \quad Md' = \sqrt{x^2} = |x|$$

$$Md^2 + Md'^2 \leq 2 \Leftrightarrow y^2 + x^2 \leq 2 \text{ disque } D \text{ de centre } O \text{ et de rayon } \sqrt{2}$$

$$Md = Md'^2 \Leftrightarrow |y| = x^2 \Leftrightarrow y = x^2 = P_1 \text{ ou } y = -x^2 = P_2$$

$$Md' = Md^2 \Leftrightarrow |x| = y^2 \Leftrightarrow x = y^2 = P_3 \text{ ou } x = -y^2 = P_4$$

P_1 et P_2 sont les paraboles de sommet O et d'axe focal (Oy) et de paramètres $\frac{1}{2}$ (resp. $-\frac{1}{2}$)

P_3 et P_4

