EXPONENTIELLES ET LOGARITHMES

1) Ecrivez les nombres suivants aussi simplement que possible (exposants entiers positifs uniquement) :

a) $3^{-7} \cdot 9^{2} \cdot (-27)^{4}$

b) $\dfrac{4^{-0,5} \cdot 16^{\frac{1}{4}}}{32^{0,2}}$

c) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1,25} \cdot 4^{\frac{5}{6}}$

d) $25^{-\frac{1}{2}} \cdot 125^{\frac{2}{3}}$

e) $5,9^{0,75}$

f) $\dfrac{3^{-1} \cdot 9^{\frac{3}{2}}}{0,81^{\frac{1}{2}}}$

2) Soit $f(x) = \left|2^{x-1} - 2\right|$.

a) A partir d'une courbe bien choisie, construisez le graphique de f en justifiant chaque étape de la construction.

b) Déterminez D_f, Imf, les racines de f, son A.H., puis étudiez sa parité.

3) Un capital de 15000 € est placé à un taux d'intérêt de 5 % et est capitalisé annuellement.

a) Trouvez l'expression analytique f(x) de la fonction qui donne le capital après x années.

b) A l'aide de la V200 :

- représentez G_f
- déterminez après combien d'années le capital aura doublé

4) Les compagnies d'assurance considèrent que chaque année la valeur d'un véhicule diminue de 16 %.

a) Pour une voiture dont la valeur initiale est de 30 000 €, trouvez l'expression analytique de la fonction v(t) qui donne sa valeur après t années.

b) A l'aide de la V200 :

- représentez G_v.
- déterminez après combien d'années la valeur du véhicule ne sera plus que d'un cinquième de sa valeur initiale

5) Les nénuphars du Nil se reproduisent très rapidement. Les botanistes prétendent qu'ils doublent chaque jour leur nombre. On suppose que dans un lac il y a 5 nénuphars.

a) Trouvez l'expression analytique de la fonction qui donne le nombre de nénuphars après x jours.

b) A l'aide de la V200 :

- représentez G_f .
- déterminez après combien de jours il y aura 5 242 880 fleurs.
- sachant que le lac sera entièrement recouvert avec 30 millions de fleurs, déterminez le nombre maximal de jours que cette prolifération peut durer.

6) Résolvez les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

a) $3^{2x} - 3^{x-2} = 0$

b) $0,5^{3x-1} = 1$

c) $4^{1-2x} - \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{x}{2}} = 0$

d) $9^{x+1} = 3^{1-2x}$

e) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x} \leq 5^{2x-1}$

f) $2^{x^2} \geq 16$

g) $0,25^{1-3x} > 4^{2x+3}$

h) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} < \frac{16}{9}$

7) Déterminez les domaines des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{5+7x}{3^{2x-1} - 9}$

b) $f(x) = \sqrt{0,1^{x} - 0,01}$

c) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{5^{x-1} - 125}}$

d) $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$

8) Calculez :

a) $\lim\limits_{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$

b) $\lim\limits_{0} (1+2h)^{\frac{1}{h}}$

c) $\lim\limits_{+\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{4x-1}$

d) $\lim\limits_{0} (1-3x)^{-\frac{2}{x}}$

9) Calculez à l'aide de la calculatrice une valeur approchée à un centième près de :

a) e^{-3}

b) $\sqrt[3]{e^2}$

c) $2e^{-2}\sqrt{e}$

d) e^{π}

e) e^{e}

f) $\dfrac{e^{6,4}}{\sqrt[5]{e^4}}$

10) Résolvez les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

a) $e^{4x}-1=0$

b) $e\cdot e^{x}-\sqrt{e}=0$

c) $e^{2x-1}-\dfrac{1}{e}>0$

d) $e^{x^2}-e^4\leq 0$

e) $e^{2x}+e^{x}-2>0$

f) $\dfrac{\left(e^{x}\right)^2-1}{e^{x^2}-e}\geq 0$

g) $e^{3x+1}<\dfrac{1}{e^2}$

h) $\sqrt{e^{x^2}}-e^2\geq 0$

11) Déterminez les domaines des fonctions suivantes :

a) $f(x)=\dfrac{e^{x}}{e^{x+1}-1}$

b) $f(x)=\sqrt{1-e^{2x}}$

c) $f(x)=e^{\frac{x-1}{x+2}}$

d) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{e^{4x}-2e^{2x}+1}}$

e) $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{e^{x+1}-\sqrt{e}}$

f) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{e^{3x}-e}}$

12) Déterminez les domaines des fonctions suivantes, puis calculez leur dérivée :

a) $f(x)=xe^{x}$

b) $f(x)=2e^{x^2}$

c) $f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

d) $f(x)=e^{\sin x}$

e) $f(x)=\sin e^{2x}$

f) $f(x)=\sqrt{e-e^{3x-5}}$

g) $f(x)=e^{A\sin x}$

h) $f(x)=e^{x}\cdot A\tan x$

i) $f(x)=A\cos e^{x}$

j) $f(x)=e^{\tan x}$

13) Calculez les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{+\infty} \frac{e^x}{x^2}$

b) $\lim\limits_{+\infty} \frac{x^2}{e^{2x}}$

c) $\lim\limits_{0} \frac{e^x - e^{-x}}{A \sin x}$

d) $\lim\limits_{2} \frac{x^2 - 4}{e^{2-x} - 1}$

14) Etablissez une équation de la tangente à la courbe de $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ au point d'abscisse 0.

15) Etude complète des fonctions suivantes : domaines, branches infinies, dérivées, tableau des variations, concavité et points d'inflexion (sauf pour e) et f)) et courbe.

a) $f(x) = \frac{e^x}{x}$

b) $f(x) = \frac{x}{e^x}$

c) $f(x) = e^{-x^2}$

d) $f(x) = x^2 e^x$

e) $f(x) = e^{2x} - 2e^x$

f) $f(x) = e^{\sqrt{x^2-3x+2}}$

g) $f(x) = \frac{1}{e^{x^2-3x}}$

h) $f(x) = (-5x - 2)e^{-x}$

16) Calculez sans utiliser la calculatrice :

a) $\ln e - \ln e^2 - \frac{1}{\ln e} + \ln \frac{1}{e}$

b) $e^{3\ln 2} + e^{-\ln 5} - (\ln e)^2$

c) $\ln e^3 + \ln \sqrt{e} - \ln \frac{1}{e^4} + \left(\ln \frac{\sqrt[3]{e}}{\sqrt{e}} \right)^2$

d) $\log_5 \frac{1}{\sqrt{125}} + \log \sqrt{1000}$

e) $\log_{0,5} 64 - \log_{\frac{5}{4}} 0,64$

f) $\log_{2\sqrt{3}} 144$

g) $\exp_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} 4 \right)$

h) $\log_2 \sqrt{128} - \log_{\frac{1}{3}} 81$

i) $e^{-\ln 5} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{\sqrt[3]{9}}$

j) $\log_3 27 - \log_{\frac{2}{5}} \frac{25}{4} + 2^{3\log_2 5}$

17) Exprimez en fonction de $\ln a, \ln b$ et $\ln c$:

a) $\ln ab^2c + \ln \frac{ab}{c^2}$

b) $\ln \left(\frac{ab}{c} \right)^2 - \ln \sqrt[3]{\frac{ab^2}{c}}$

c) $\ln \frac{\sqrt[3]{a^2b}}{c} - \ln \frac{cb^2}{\sqrt[3]{a}}$

d) $\log_5 \sqrt[10]{\frac{5}{b^2}} - \log_6 \left(\frac{6a^3}{c^2}\right)^{12}$

e) $\log_3 \sqrt[3]{\frac{1}{a^2}} - \log_2 \frac{b^3}{64}$

f) $\log_2 a^2 + \log_2 \sqrt{2b}$

18) Résolvez les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1re série

a) $\ln x < 3$

b) $\ln\left(4 - x^2\right) = \ln 2x$

c) $\ln(2x - 1) < 0$

d) $\ln(1 - 2x) \geq 1$

e) $\log_{0,5}\left(x^2 - 8,5\right) < 1$

f) $\log_5^2 x - 1 \leq 0$

2e série

a) $\log_2 \frac{x^2 - 3x}{1 - x} - 1 \geq 0$

b) $\log_4(2x + 1) - \log_4(3 - x) = 0$

c) $\log_{0,4}(1 - x) - 1 = 0$

d) $\log^2 x = 1$

e) $\log\left(x^2 - 4\right) - \log\left(2x - x^2\right) \geq 0$

f) $\frac{\ln x + 1}{1 - \ln x} \geq 0$

3e série

a) $\log_7(3x - 1) = -2$

b) $\log_2\left(x^2 - 5x\right) = \log_2 6$

c) $\frac{1}{e^{1-2x}} > 3$

d) $\log_{0,2}(1-3x) \leq 3$

e) $\log^2 x < 9$

f) $3\log_2^2 x - 2\log_2 x - 5 = 0$

4^e série

a) $3 \cdot 2^{2x} - 2^{x+1} - 5 \leq 0$

b) $\ln x + \ln 2 = 1$

c) $2\log_5(x+3) - 3\log_5 2 = 0$

d) $\ln \frac{x-1}{x+1} + \ln x < 0$

e) $2\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} 3 < 4$

f) $\ln x - \ln 2 \leq \ln(1-3x)$

5^e série

a) $\log_{\frac{1}{3}}(4-x^2) - \log_{\frac{1}{3}} x < \log_3 x$

b) $\log_2(x-1) \cdot \log_4 3 = 0$

c) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1-x^2}{x} < \log_3 x$

d) $2e^{2x} - 7e^x + 5 = 0$

e) $2\ln^2 x - 7\ln x + 5 \leq 0$

f) $2\ln(1-x) - \ln(x+3) = 3\ln 2$

6^e série

a) $\log_{\frac{1}{5}}(1-x) \geq -1$

b) $e^{x^2-4} \geq 1$

c) $\log_9(3^x - 1) + \frac{x}{2} \leq \log_3 \sqrt{2}$

d) $\ln x^2 + (\ln x - 4)\ln^2 x \geq 0$

e) $\ln(|x| - 2) > 0$

f) $2 \cdot 3^{2x} + 2 \cdot 3^{x+1} - 3^{x+2} - 6 \cdot 3^{x-1} - 3 = 0$

7e série

a) $e^{x}-e^{-x}=3\left(1+e^{-x}\right)$ *(juin 2011)*

b) $\log_{25}(5-2x)\geq\log_{5}x-\frac{1}{2}$ *(juin 2011)*

c) $\ln\frac{1+e^{x}}{1-e^{x}}\leq 1$ *(septembre 2011)*

d) $\ln x-2\ln(x-4)=-\ln 2$ *(septembre 2011)*

e) $\log_{\frac{1}{2}}\left(2-x^{2}\right)+\log_{\frac{1}{2}}x<\log_{2}x$ *(septembre 2011)*

f) $2\ln(3-x)-\ln(x-1)\geq 2\ln 3-\ln(2x-1)$ *(juin 2010)*

19) Déterminez les domaines des fonctions suivantes :

1re série

a) $f(x)=\log(1-2x)$

b) $f(x)=\log_{x}\left(-x^{2}-x+2\right)$

c) $f(x)=\log_{0,5}\frac{1-x}{1+x}$

d) $f(x)=\frac{1}{\log_{7}x}$

e) $f(x)=\log(3-x)(2+x)$

f) $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}\left(4x-x^{2}\right)$

2e série

a) $f(x)=\log_{3}\frac{3-2x}{x+1}$

b) $f(x)=\log_{2}(4-5x)+\log_{2}(1-2x)$

c) $f(x)=\sqrt{\log_{0,25}\frac{1-x}{1+x}}$

d) $f(x)=e^{\ln x}-e^{3\ln 2}-\ln e^{x}$

e) $f(x)=\log\left(4x^{2}-8x\right)$

f) $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(4x+8)-\log_{\frac{1}{3}}(2-x)$

3^e série

a) $f(x) = \dfrac{x}{\log(x-2)-1}$

b) $f(x) = \sqrt{\log_{0,2} x}$

c) $f(x) = \ln x^2$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\ln(\ln x)}$

e) $f(x) = \sqrt{\sqrt{3}\left(3^x\right)^4 - \dfrac{1}{9}}$

f) $f(x) = \sqrt{2\log_5^2 x + 7\log_5 x - 4}$

20) Comparez les fonctions :

a) $f(x) = \log(x-1) + \log(x+4)$ et $g(x) = \log(x-1)(x+4)$

b) $f(x) = \log(x-1) - \log(x+4)$ et $g(x) = \log\dfrac{x-1}{x+4}$

c) $f(x) = \log|x-1| - \log|x+4|$ et $g(x) = \log\left|\dfrac{x-1}{x+4}\right|$

21) Calculez les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\ln x}{x^3}$

b) $\lim\limits_{0} \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

c) $\lim\limits_{+\infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{-x+2}$

d) $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\log_2 x}{\log_{0,5} x}$

e) $\lim\limits_{0} (1-3x)^{-\frac{2}{x}}$

f) $\lim\limits_{0^+} \dfrac{\ln x}{\cot x}$

g) $\lim\limits_{+\infty} \left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{3x-1}$

h) $\lim\limits_{0} \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

i) $\lim\limits_{-\infty} 3^x \log(3-x)$

j) $\lim\limits_{-\infty} \left(1+\dfrac{5}{2-x}\right)^{\frac{x}{3}}$

22) Déterminez les domaines des fonctions suivantes, puis calculez leur dérivée :

1re série

a) $f(x) = 3\ln x - \dfrac{2}{x}$

b) $f(x) = \ln 3x$

c) $f(x) = \ln^3 x$

d) $f(x) = \ln x^3$

e) $f(x) = x \ln x$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

2^{e} série

a) $f(x) = \ln(A\sin x)$

b) $f(x) = A\sin(\ln x)$

c) $f(x) = \sqrt{\ln 2x}$

d) $f(x) = 3^{2x+1}$

e) $f(x) = \log_{0,2} \sin x$

f) $f(x) = \log_2^4 x$

3^{e} série

a) $f(x) = 10^x \log x$

b) $f(x) = A\tan 5^x$

c) $f(x) = 5^{A\tan x}$

d) $f(x) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{4x-1}$

e) $f(x) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$

f) $f(x) = \left(4x^2 - 5x + 7\right)^{2x+4}$

4e série

a) $f(x)=\dfrac{1}{7^x}$

b) $f(x)=\ln\dfrac{3x-1}{4-x}$

c) $f(x)=3^{7-2x}$

d) $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

e) $f(x)=\log_5\left(x^2-3x+7\right)$

f) $f(x)=(\operatorname{Arctan} x)^{\ln x}$

23) Etablissez une équation de la tangente à la courbe de …

a) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ au point d'abscisse e.

b) $f(x)=\ln^2 x+\ln 2x$ au point d'abscisse 1.

c) $f(x)=\dfrac{1}{\log_3 x}$ au point d'abscisse 3.

d) $f(x)=\log_2^2 x$ au point d'abscisse 8.

24) Etude complète des fonctions suivantes : domaines, branches infinies, dérivées, tableau des variations, concavité et points d'inflexion (sauf pour e)) et courbe.

a) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

b) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

c) $f(x)=\ln\left(x^2-1\right)$

d) $f(x)=\ln\left|x^2-1\right|$

e) $f(x)=\dfrac{1}{\ln^2 x-4}$

f) $f(x)=x-\ln(x+1)$

g) $f(x)=x\ln x$

h) $f(x)=\dfrac{\ln x-2}{\ln x-1}$