EXAMEN SECTIONS E ; F ; G

QUESTIONNAIRE 1

Première partie : Systèmes d'équations et d'inéquations

1) Pour partir en voyage, Anatole et Philomène comptent leurs économies. Anatole a mis de côté 385 € en coupures de 5 €, 10 € et 20 €, 37 billets au total. Philomène dit : « Moi j'ai économisé la somme de 420 € avec 3 billets de 20 € de plus, 8 billets de 10 € de moins et deux fois plus de billets de 5 € que toi. ».
Calculez le nombre de billets de chaque sorte qu'ont économisés Anatole et Philomène.

(13 points)

2) Résolvez graphiquement le système suivant et *calculez* les coordonnées des sommets du polygone obtenu :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 4 \\ 3y - 2x - 5 \geq 0 \end{cases}$$

(5 points)

Deuxième partie : Analyse

3) La position (exprimée en *km*) d'un mobile sur sa trajectoire à l'instant t (exprimé en h) est donnée par la formule $f(t) = 5t^2 + 3t$. Ainsi par exemple l'instant $t = 0$ correspond au moment du départ et à ce moment le mobile se trouve au kilomètre $f(0) = 0$ et à l'instant $t = 4\,h$ il se trouve au kilomètre $f(4) = 92$.

a) Quelle est la *distance* qu'il a parcourue entre les instants $t = 1\,h$ et $t = 3\,h$? Quelle a été sa vitesse moyenne entre ces deux instants ?

b) Calculez sa vitesse instantanée deux heures et demie après son départ.

(3+2 = 5 points)

4) Soit la fonction $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 6x - 5$ et la droite $d \equiv y = 3x + 1$.

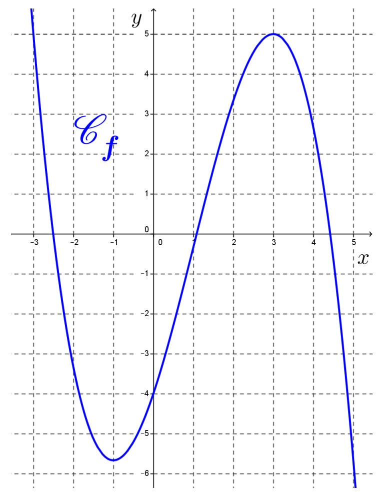
a) Dressez le tableau de variation de *f*.

b) Tracez sur un même graphique la courbe de *f* et la droite *d*.

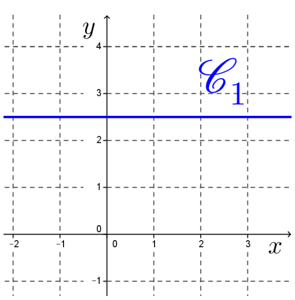
c) Pour quel point de la courbe la tangente est-elle parallèle à *d* ? Déterminez l'équation de cette tangente.

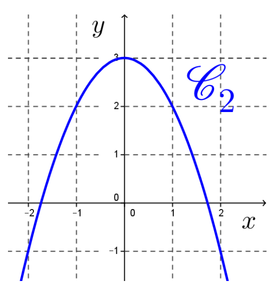
(3+2+3 = 8 points)

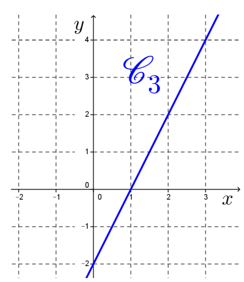
5) Voici la courbe d'une fonction f :

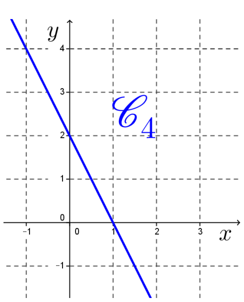


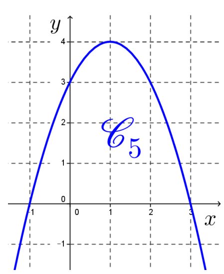
Parmi les six courbes suivantes, retrouvez le graphe de la fonction dérivée f' et celui de la dérivée seconde f''. Justifiez vos réponses !

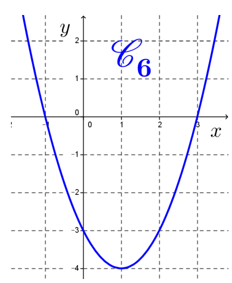












(6 points)

6) Un capital de 3800 € est placé à un taux annuel de 1,3 %. On note $V(t)$ la valeur acquise de ce capital après t années (intérêts *composés*).

a) Donnez l'expression de $V(t)$.

b) Après combien d'années le capital aura-t-il dépassé 4500 € ? Justifiez votre réponse en résolvant une inéquation.

(2+3 = 5 points)

Troisième partie : Probabilités et combinatoire

7) Dans une urne il y a :

- 3 boules vertes numérotées de 1 à 3
- 5 boules rouges numérotées de 1 à 5
- 8 boules jaunes numérotées de 1 à 8

Les questions a) et b) sont <u>indépendantes</u>.

a) On tire simultanément trois boules de cette urne (tirage sans ordre et sans remise).

- Quel est le nombre de tirages possibles ?
- Quelle est la probabilité de tirer trois boules de même couleur ?
- Quelle est la probabilité de tirer trois boules portant toutes un numéro pair ?
- Quelle est la probabilité de tirer une verte et deux jaunes *ou* une jaune et deux vertes ?

b) On forme un nombre à trois chiffres de la manière suivante : on tire une boule et on prend son numéro comme chiffre des centaines, puis une deuxième boule (sans remettre la première dans l'urne) et son numéro sera le chiffre des dizaines puis une troisième boule qui donnera le chiffre des unités.

- Quelle est la probabilité d'obtenir le nombre 111
- Quelle est la probabilité d'obtenir le nombre 812 ?

(8+4 = 12 points)

8) D'un jeu de 32 cartes on tire successivement trois cartes (tirage avec ordre et sans remise).

a) Quelle est la probabilité de tirer trois cœurs ?

b) Quelle est la probabilité de tirer un roi, une dame et un valet dans cet ordre ?

c) Quelle est la probabilité de ne pas tirer d'as ?

(2+2+2 = 6 points)

Corrigé

1) Anatole a x billets de 5 €, 37 billets, 385 €
y —— 10 €
z —— 20 €

Philomène a $2x$ —— 5 €, 420 €
$y-8$ —— 10 €
$z+3$ —— 20 €

D'où : $\begin{cases} x+y+z=37 & (1) \\ 5x+10y+20z=385 & (2) \quad |:5 \\ 5\cdot 2x+10(y-8)+20(z+3)=420 & (3) \quad |:10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=37 & (1) \quad |\cdot(-1) \\ x+2y+4z=77 & (2) \\ x+y+2z=44 & (3) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=37 & (1) \\ y+3z=40 & (2) \\ \underline{z=7} & (3) \end{cases}$

$\rightarrow (2)$: $y+21=40 \Leftrightarrow y=19$

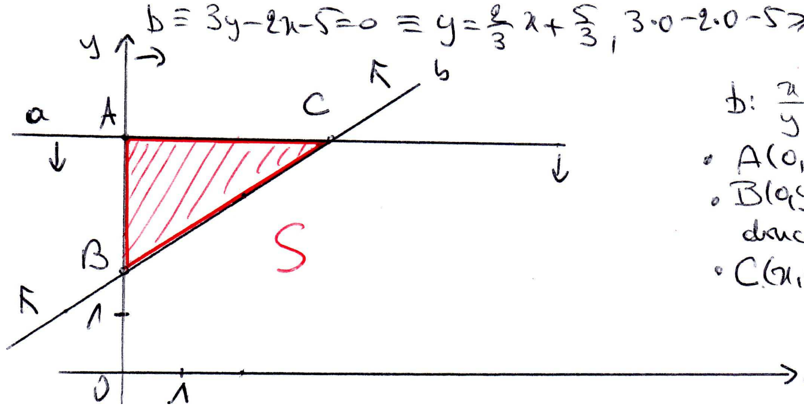
$\rightarrow (1)$: $x+19+7=37 \Leftrightarrow x=11$

<u>Réponse</u> : Anatole a 11 billets de 5 €, 19 de 10 € et 7 de 20 €
Philomène a <u>22 ——, 11 —— 10 ——</u>

2) $\begin{cases} x \geq 0 & (1) \\ y \leq 4 & (2) \\ 3y-2x-5 \geq 0 & (3) \end{cases}$

posons : $a \equiv y=4$, $0 \leq 4$ vrai donc $O \in S_2$

$b \equiv 3y-2x-5=0 \equiv y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$, $3\cdot 0-2\cdot 0-5 \geq 0$ faux donc $O \notin S_3$



b :

x	2	−1
y	3	1

- $A(0,4)$
- $B(0,y) \in b$ donc $y=\frac{2}{3}\cdot 0+\frac{5}{3}$
  donc $B(0,\frac{5}{3})$
- $C(x,4) \in b$ donc $12-2x-5=0$
  $\Leftrightarrow x=\frac{7}{2}$
  donc $C(\frac{7}{2},4)$

3) a) $f(1) = 8$ km
$f(3) = 54$ km
distance parcourue entre $t = 1$h et $t = 3$h $= 54 - 8 = 46$ km
durée du trajet : $3 - 1 = 2$h
vitesse moyenne : $\frac{46}{2} = 23$ km/h

b) vitesse instantanée $= f'(2{,}5)$
$f'(t) = 10t + 3$
$f'(2{,}5) = 28$
vitesse instantanée au moment $t = 2{,}5$h : 28 km/h

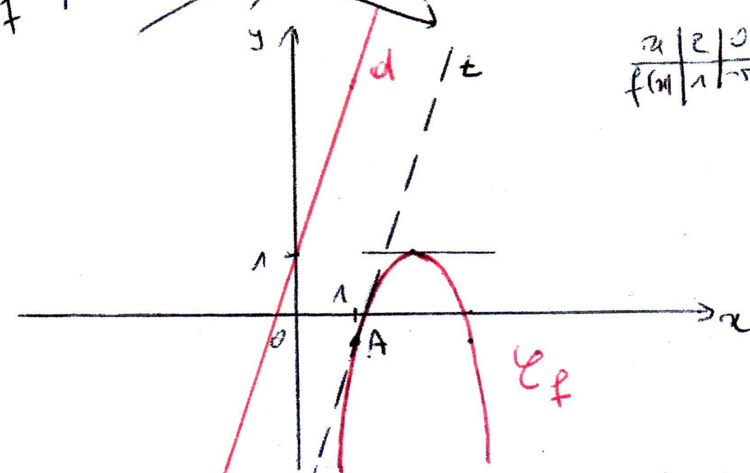
---

4) a) $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 6x - 5$
$f'(x) = -3x + 6$
$-3x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x		2	
$f'(x)$	+	0	−
f	$\nearrow$	1	$\searrow$

b)

x	2	0	1	3
$f(x)$	1	−5	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$



c) Soit t une tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A(a, f(a))$, alors
$t \parallel d \Leftrightarrow$ pente de t = pente de d
$\Leftrightarrow f'(a) = 3$
$\Leftrightarrow -3a + 6 = 3$
$\Leftrightarrow -3a = -3$
$\Leftrightarrow \underline{a = 1}$
D'où : $t \equiv y = 3x + k$ et $A(1, f(1)) = A(1, -\frac{1}{2}) \in t$
$A \in t \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = 3 + k \Leftrightarrow k = -\frac{7}{2}$ et par conséquent $\underline{t \equiv y = 3x - \frac{7}{2}}$

5) Tableau de variation de f (d'après $\mathcal{C}_f$) :

x		1		3	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	$\approx -5,6$	$\nearrow$	5	$\searrow$

$f'(1) = f'(3) = 0$ donc $\mathcal{C}_{f'}$ coupe (Ox) aux points $(1,0)$ et $(3,0)$
donc $\mathcal{C}_{f'} = \mathcal{C}_5$ ou $\mathcal{C}_6$

pour $x \in]1,3[$ $f'(x) > 0$ donc $\mathcal{C}_{f'}$ au-dessus de (Ox) sur $]1,3[$

D'où : $\mathcal{C}_{f'} = \mathcal{C}_5$

Tableau de variation de f' (d'après $\mathcal{C}_5$) :

x		1	
$f''(x)$	$+$	0	$-$
f'	$\nearrow$	4	$\searrow$

$f''(1) = 0$ donc $\mathcal{C}_{f''}$ coupe (Ox) en $(1,0)$ donc $\mathcal{C}_{f''} = \mathcal{C}_3$ ou $\mathcal{C}_4$

pour $x > 1$ $f''(x) < 0$ donc $\mathcal{C}_{f''}$ en-dessous de (Ox)

D'où $\mathcal{C}_{f''} = \mathcal{C}_4$

6) a) $V(t) = 3800 \cdot 1,013^t$

b) $V(t) \geq 4500 \Leftrightarrow 3800 \cdot 1,013^t \geq 4500 \quad |:3800$

$\Leftrightarrow 1,013^t \geq \frac{45}{38}$

$\Leftrightarrow \log 1,013^t \geq \log \frac{45}{38}$

$\Leftrightarrow t \log 1,013 \geq \log \frac{45}{38}$

$\Leftrightarrow t \geq \dfrac{\log \frac{45}{38}}{\log 1,013} \approx 13,09$

Après 14 ans le capital aura dépassé pour la première fois 4500 €.

7) 3V, 5R, 8J $\rightarrow$ 16 boules

a) • Nombre de tirages $(\overline{O}\,\overline{R})$ possibles : $C_{16}^3 = 560$

• Nombre de tirages avec 3 V : 1

3 R : $C_5^3 = 10$

3 J : $C_8^3 = 56$

proba. de tirer 3 b. de même couleur $= \frac{1+10+56}{560} = \frac{67}{560} \approx 0,12$

- Nombre de boules "paires" : $1+2+4=7$

proba de tirer 3 boules "paires" : $\frac{C_7^3}{560} = \frac{35}{560} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$

- Nombre de tirages avec 1V + 2J : $3 \cdot C_8^2 = 84$

2V + 1J : $C_3^2 \cdot 8 = 24$

proba de tirer 1V + 2J ou 2V + 1J : $\frac{84+24}{560} = \frac{27}{140} \simeq 0{,}19$

b) $p(111) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{16 \cdot 15 \cdot 14} = \frac{1}{560} \simeq 0{,}0018$

$p(812) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3}{16 \cdot 15 \cdot 14} = \frac{3}{1120} \simeq 0{,}0027$

8) Nombre de tirages possibles $= 32 \cdot 31 \cdot 30 = 29'760$

a) $\underbrace{8 \text{ coeurs}}$ $\underbrace{24 \text{ autres}}$

$p(3 \text{ coeurs}) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{29760} = \frac{7}{620} \approx 0{,}01$

b) $\underbrace{4R}$ $\underbrace{4D}$ $\underbrace{4V}$ $\underbrace{20 \text{ autres}}$

$p(1R+1D+1V) = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{29'760} = \frac{1}{465} \approx 0{,}002$

c) $\underbrace{4 \text{ as}}$ $\underbrace{28 \text{ autres}}$

$p(\text{pas d'as}) = \frac{28 \cdot 27 \cdot 26}{29760} = \frac{819}{1240} \simeq 0{,}66$