EXAMEN SECTIONS E ; F ; G

QUESTIONNAIRE 2

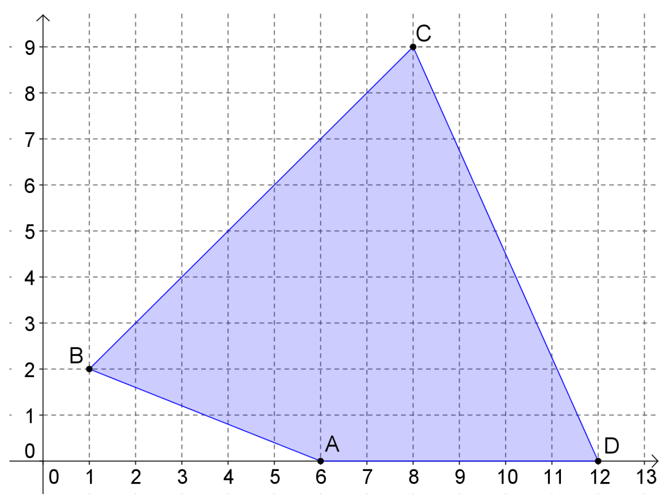
Première partie : Systèmes d'équations et d'inéquations

1) Résolvez le système suivant :

$$\begin{cases} x+5z-3y=0 \\ 7(x-1)-(3y-2z)=5(x+y-1)-(z+3y) \\ 3z+2x=5y+2 \end{cases}$$

(6 points)

2) On considère le polygone ABCD donné par la figure suivante :



a) Déterminez une équation de chacune des droites (AB), (BC), (CD) et (DA).

b) Déterminez un système d'inéquations dont les solutions sont représentées par ce polygone.

c) Déterminez le maximum et le minimum de la fonction $f(x;y)=5x+4y$ par rapport à ce polygone.

(4+4+4 = 12 points)

Deuxième partie : Analyse

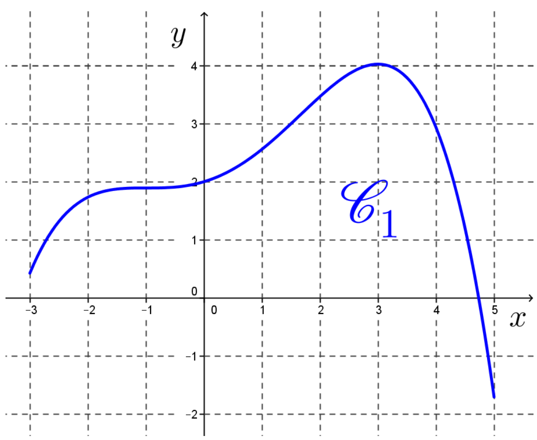
3) On donne le signe de la dérivée de deux fonctions f et g définies sur $[-3;5]$:

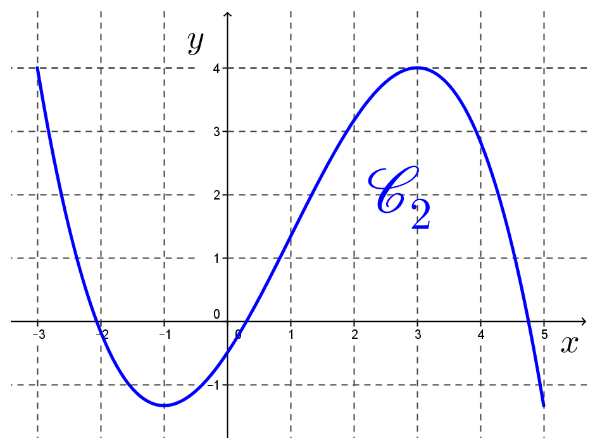
x	-3		-1		3		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

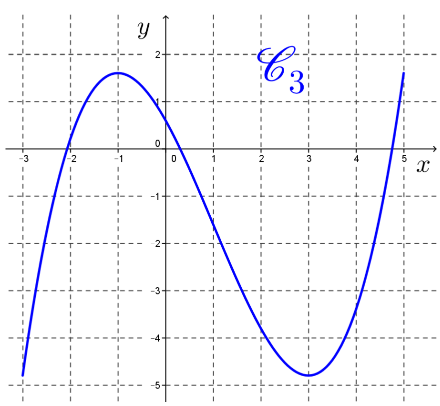
x	-3		-1		3		5
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

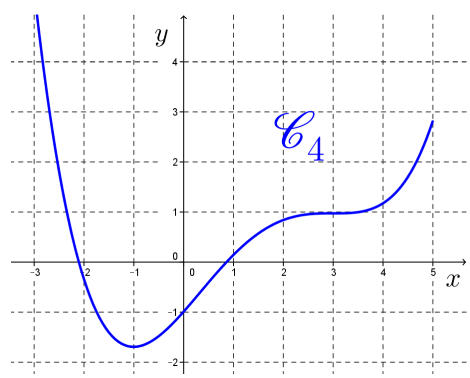
a) Donnez les tableaux de variation (aussi complets que possible) de ces deux fonctions.

b) Parmi les quatre courbes ci-dessous, retrouvez celles de f et de g. Justifiez votre réponse.









(4+2 = 6 points)

4) Une usine fabrique des polos. Le coût de fabrication (en euros) de x polos est donné par $C(x)=0,0025x^2+13x+441$ et le *coût unitaire moyen* par $f(x)=\dfrac{C(x)}{x}$.

a) Calculez $f(50)$ et $f(10)$ puis expliquez pourquoi ces deux résultats sont différents.

b) Déterminez le nombre de polos pour lequel le coût unitaire moyen est minimal. Quel est ce coût ?

c) L'usine vend les polos pour 25 € la pièce.

i) Calculez le bénéfice $B(x)$ réalisé lors de la vente de x polos.

ii) Combien de polos faut-il produire (et vendre) au moins pour ne pas faire de perte (c'est-à-dire pour faire un bénéfice positif) ?

iii) Déterminez le nombre de polos pour lequel le bénéfice est maximal. Quel est ce bénéfice ?

(2+4+9 = 15 points)

5) Sachant que $\log a=5$ et que $\log b=7$, calculez $\log a^8$, $\log(a\cdot b)$, $\log\sqrt{b}$ et $\log\dfrac{b}{a}$.

(4 points)

Troisième partie : Probabilités et combinatoire

6) On joue au jeu suivant : on lance un dé et si on obtient 1 on a gagné et le jeu s'arrête, si on obtient 2 ou 3 on a perdu et le jeu s'arrête et si on obtient 4, 5 ou 6 on n'a ni gagné ni perdu et on peut rejouer. Après le troisième jet le jeu s'arrête quel que soit le résultat.

a) Dessinez un diagramme en arbre qui donne tous les déroulements possibles de ce jeu.

b) Philomène prétend qu'à ce jeu-là on a deux fois plus de chances de perdre que de gagner ! A-t-elle raison ? Justifiez votre réponse !

(4+4 = 8 points)

7) On lance un dé bien équilibré deux fois de suite. Si les deux résultats sont différents on retient le plus grand des deux et si les deux résultats sont égaux on fait la somme des deux (*par exemple si on obtient 3 puis 4 on retient 4 et si on obtient deux fois 5 on retient 10*).

a) Complétez le tableau suivant donnant tous les résultats possibles :

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1						
2						
3				*4*		
4						
5					*10*	
6						

b) Quelle est la probabilité que le résultat final…

i) soit égal à 6 ?

ii) soit un nombre inférieur ou égal à 4 ?

iii) soit un nombre pair ?

iv) soit supérieur ou égal à 7 ?

c) Quelle est la probabilité d'obtenir 4 comme résultat final si on a obtenu un chiffre impair au premier jet ?

(3+4+2 = 9 points)

Corrigé

1) • $x+5z-3y=0 \Leftrightarrow x-3y+5z=0 \quad (1)$

• $7(x-1)-(3y-2z)=5(x+y-1)-(z+3y)$

$\Leftrightarrow 7x-7-\cancel{3y}+2z=5x+5y-5-z-\cancel{3y}$

$\Leftrightarrow 7x+2z-5x-5y+z=7-5$

$\Leftrightarrow 2x-5y+3z=2 \quad (2)$

• $3z+2x=5y+2 \Leftrightarrow 2x-5y+3z=2 \quad (3)$

• $\begin{cases} x-3y+5z=0 & (1) \;|\cdot(-2) \\ 2x-5y+3z=2 & (2) \\ \cancel{2x-5y+3z=2} & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y+5z=0 & (1) \\ y-7z=2 & (2') \end{cases}$

posons $z=r$ alors $y-7r=2 \Leftrightarrow y=7r+2$

et $x-3(7r+2)+5r=0 \Leftrightarrow x-21r-6+5r=0 \Leftrightarrow x=16r+6$

$S=\{(16r+6;\, 7r+2;\, r) \mid r\in\mathbb{R}\}$ (système indéterminé)

2) $A(6;0)$; $B(1;2)$; $C(8;9)$; $D(12;0)$

a) • $(AB) \equiv y=ax+b$: $A\in(AB)$ donc $0=6a+b \quad (1)$

$B\in(AB)$ donc $2=a+b \quad (2)$

$(2) \Leftrightarrow b=2-a$

$\rightarrow (1)$: $0=6a+2-a \Leftrightarrow a=-\frac{2}{5}$ donc $b=2+\frac{2}{5}=\frac{12}{5}$

D'où : $(AB) \equiv y=-\frac{2}{5}x+\frac{12}{5} \;|\cdot 5 \equiv 5y=-2x+12 \equiv \underline{2x+5y=12\equiv(AB)}$

• $(BC) \equiv y=cx+d$ pente $=c=\frac{9-2}{8-1}=\frac{7}{7}=1$ (ou : directement sur la fig)

donc $(BC) \equiv y=x+d$

$B\in(BC)$ donc $2=1+d \Leftrightarrow d=1$

D'où $(BC) \equiv y=x+1 \equiv \underline{x-y=-1 \equiv (BC)}$

• pente $(CD)=\frac{0-9}{12-8}=-\frac{9}{4}$ d'où $(CD) \equiv y=-\frac{9}{4}x+e$

$D\in(CD)$ donc $0=-\frac{9}{\cancel{4}}\cdot\overset{3}{\cancel{12}}+e \Leftrightarrow e=27$

$y=-\frac{9}{4}x+27 \;|\cdot 4 \Leftrightarrow 4y=-9x+108$

D'où $\underline{(CD) \equiv 9x+4y=108}$

• $(DA) \equiv y=0$ car $(DA)=(Ox)$

b) $O(0,0) \notin$ demi-plan de bord (AB) donc $2x+5y \geq 12$ (1)
(en effet $2\cdot 0+5\cdot 0 \geq 12$ faux!)

$O(0,0) \in$ demi-plan de bord (BC) donc $x-y \geq -1$ (2)
(en effet $0-0 \geq -1$ vrai!)

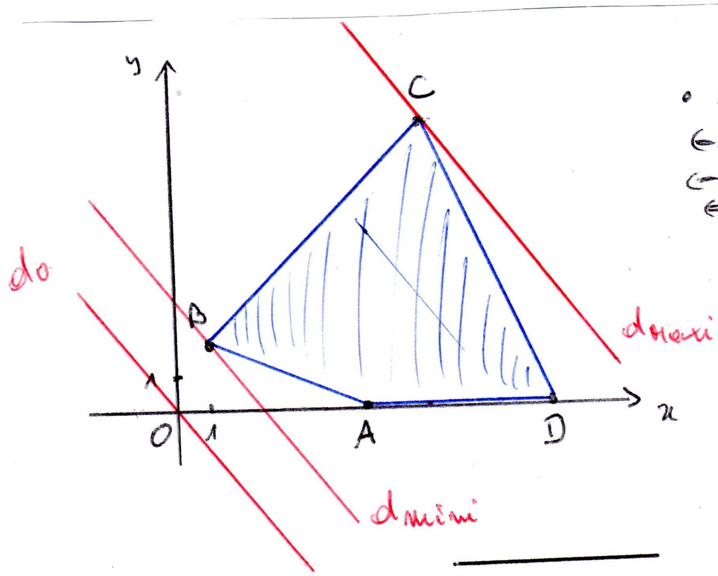
$O(0,0) \in$ demi-plan de bord (CD) donc $9x+4y \leq 108$ (3)
(en effet $9\cdot 0+4\cdot 0 \leq 108$ vrai!)

$B(1,2) \in$ demi-plan de bord (AD) donc $y \geq 0$ (4)

D'où : $\begin{cases} 2x+5y \geq 12 & (1) \\ x-y \geq -1 & (2) \\ 9x+4y \leq 108 & (3) \\ y \geq 0 & (4) \end{cases}$

c) posons $d_k \equiv 5x+4y = k \quad (k \in \mathbb{R})$

$d_0 \equiv 5x+4y=0 \equiv y = -\frac{5}{4}x$



- f atteint son maximum
$\Leftrightarrow C(8,9) \in d_k$
$\Leftrightarrow 5\cdot 8+4\cdot 9 = k$
$\Leftrightarrow \underline{k=76}$
76 est le maximum de f pour $x=8$ et $y=9$

- f atteint son minimum
$\Leftrightarrow B(1,2) \in d_k$
$\Leftrightarrow 5\cdot 1+4\cdot 2 = k$
$\Leftrightarrow \underline{k=13}$
f atteint son mini 13 pour $x=1$ et $y=2$

3)

a)

x	-3		-1		3		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	mini	$\nearrow$	maxi	$\searrow$	

x	-3		-1		3		5
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
g		$\searrow$	mini	$\nearrow$	pt d'inflexion	$\nearrow$	

b) $\mathcal{C}_f = \mathcal{C}_2$ car c'est la seule des 4 courbes qui correspond aux variations de f

$\mathcal{C}_g = \mathcal{C}_4$ car c'est la seule courbe qui admet un point d'inflexion d'abscisse 3

4) $C(x) = 0{,}0025x^2 + 13x + 441$

$f(x) = \frac{C(x)}{x} = 0{,}0025x + 13 + \frac{441}{x}$

a) $f(10) = 57{,}125$

$f(50) = 21{,}945$

Les 10 premiers polos produits coûtent 57,125 € la pièce et les 50 premiers polos produits ne coûtent que 21,945€ la pièce. Cette différence s'explique par le fait que si on répartit les frais fixes sur 10 polos ils sont beaucoup plus élevés par polo que si on les répartit sur 50 polos.

b) Etude de la fonction f :

$f'(x) = 0{,}0025 + 441 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0{,}0025 - \frac{441}{x^2}$

$= \frac{0{,}0025x^2 - 441}{x^2}$ signe de $0{,}0025x^2 - 441$ car $x^2 \geq 0$

$0{,}0025x^2 - 441 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{441}{0{,}0025} = 176'400$

$\Leftrightarrow x = 420$ ou $x = -420$

x		-420		420	
$0{,}0025x^2 - 441$	$+$	0	$-$	0	$+$

x	0		420	
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$
f	$\|$	$\searrow$	$15{,}1$	$\nearrow$

On obtient un coût unitaire moyen minimal de 15,1 € pour une production de 420 polos.

c) i) prix de vente de x polos $= 25x$ €

$B(x) = 25x - C(x) = 25x - 0{,}0025x^2 - 13x - 441$

$B(x) = -0{,}0025x^2 + 12x - 441$

ii) $B(x) \geq 0$

$\Delta = 12^2 - 4 \cdot 0{,}0025 \cdot 441 = 139{,}59$

$x' = \dfrac{-12 + \sqrt{139{,}59}}{-2 \cdot 0{,}0025} \simeq 37{,}04$

$x'' = \dfrac{-12 - \sqrt{139{,}59}}{-2 \cdot 0{,}0025} \simeq 4762{,}96$

x		37,04		4762,96	
$B(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Pour obtenir un bénéfice positif il faut donc vendre au moins 38 polos (et au plus 4762 polos).

iii) Etude de la fonction B :

$B'(x) = -0{,}0025 \cdot 2x + 12 = 12 - 0{,}005x$

$B'(x) = 0 \iff 12 = 0{,}005x \;\; |:0{,}005 \iff x = 2400$

x	0		2400	
$B'(x)$		$+$	0	$-$
B		$\nearrow$	13'959 maxi	$\searrow$

On obtient un bénéfice maximal de 13'959 € pour la vente de 2400 polos.

5)

$\log a^8 = 8 \cdot \log a = 8 \cdot 5 = 40$

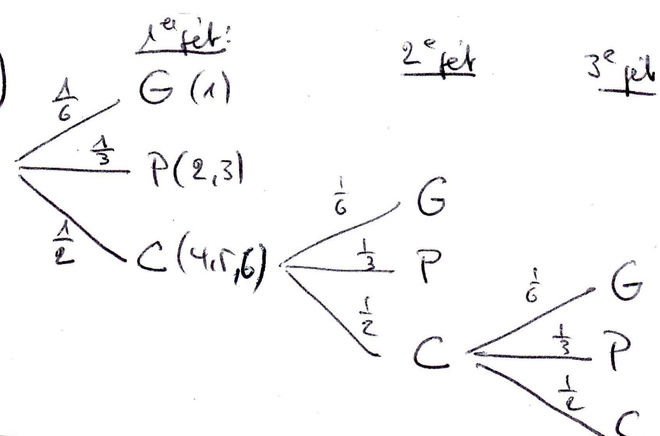
$\log(ab) = \log a + \log b = 5 + 7 = 12$

$\log \sqrt{b} = \frac{1}{2} \log b = \frac{1}{2} 7 = \frac{7}{2}$

$\log \frac{b}{a} = \log b - \log a = 7 - 5 = 2$

6)

a)



G : on gagne
P : on perd
C : on continue

b) proba de perdre au 1^{er} jet $= \frac{1}{3}$

——— 2^e ——— $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

——— 3^e ——— $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

——— au jeu $= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{4+2+1}{12} = \frac{7}{12}$

proba de gagner au 1^{er} jet $= \frac{1}{6}$

——— 2^e ——— $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

——— 3^e ——— $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$

——— au jeu $= \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{4+2+1}{24} = \frac{7}{24}$

Elle a raison car $\frac{7}{12} = 2 \cdot \frac{7}{24}$

---

7) a)

	1	2	3	4	5	6	← 2^e jet
1	2	2	3	4	5	6	
2	2	4	3	4	5	6	
3	3	3	6	4	5	6	
4	4	4	4	8	5	6	
5	5	5	5	5	10	6	
6	6	6	6	6	6	12	

↑ 1^{er} jet

b) Notons X le résultat final

i) $p(X=6) = \frac{11}{36}$

ii) $p(X \leq 4) = p(X=2) + p(X=3) + p(X=4) = \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{7}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$

iii) $p(X \text{ est pair}) = p(X=2) + p(X=4) + p(X=6) + p(X=8) + p(X=10) + p(X=12)$

$$= \frac{3}{36} + \frac{7}{36} + \frac{11}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}$$

$$= \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

iv) $p(X \geq 7) = p(X=8) + p(X=10) + p(X=12) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

c) A : "obtenir un chiffre impair au 1^{er} jet"

B : " ——— 4 comme résultat final"

$$p(B \text{ si } A) = \frac{p(B \text{ et } A)}{p(A)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$