

## EXAMEN SECTIONS E ; F ; G

### QUESTIONNAIRE 3

#### Première partie : Systèmes d'équations et d'inéquations

1) Résolvez le système suivant :

$$\begin{cases} 2y - 1 = 4z - 3x \\ 2(x - y) = 1 - (4z + 7) \\ \frac{x}{2} + z = y - 3 \end{cases}$$

**(6 points)**

2) Une usine fabrique deux produits A et B. La fabrication d'une tonne de A coûte 300 € et nécessite une heure et demie de travail et celle d'une tonne de B coûte 180 € et nécessite deux heures et demie de travail. Le directeur de l'usine a décidé de consacrer au plus 16 heures de travail et 2400 € par jour à cette production.

- a) Traduisez ces contraintes par un système d'inéquations que vous résoudrez graphiquement.
- b) Parmi les commandes que l'usine peut honorer en une journée, trouvez celle pour laquelle la masse totale de produits fabriqués est maximale.
- c) La vente d'une tonne de A rapporte un bénéfice de 200 €, celle d'une tonne de B 80 €. Pour quelle production de A et de B le bénéfice est-il maximal ?

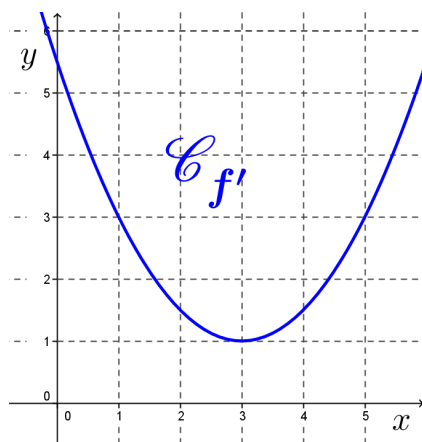
**(5+4+4 = 13 points)**

#### Deuxième partie : Analyse

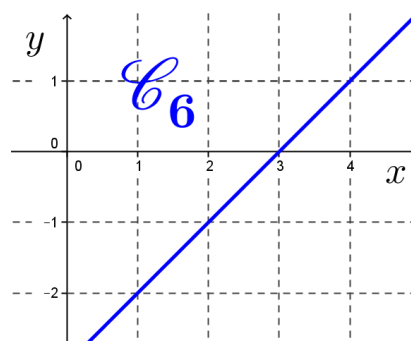
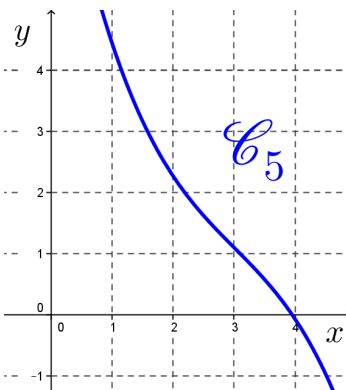
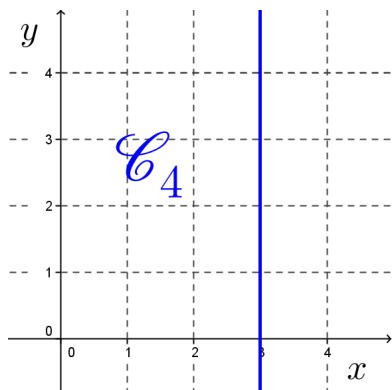
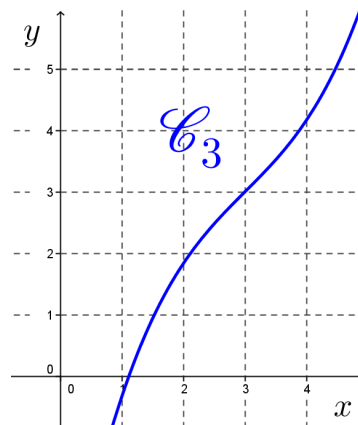
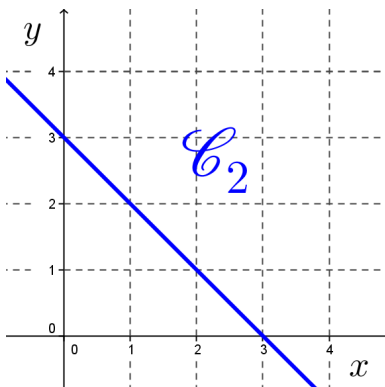
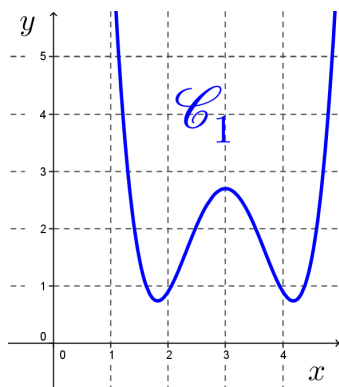
3) Calculez le nombre dérivé de  $f(x) = \frac{2x-3}{x}$  en  $a = 3$  en utilisant la définition.

**(3 points)**

4) Voici le graphe de la dérivée d'une fonction  $f$  :



Parmi les six courbes suivantes, retrouvez la courbe de  $f$  et celle de la dérivée seconde  $f''$ . Justifiez votre choix.



(3+3 = 6 points)

- 5) Dessinez une courbe qui ...
- a) ... monte de plus en plus vite sur  $[-5;1]$  et de moins en moins vite sur  $[1;4]$ .  
Comment appelle-t-on le point d'abscisse 1 ?
- b) ... monte de moins en moins vite sur  $[-7;-2]$  et qui descend de plus en plus vite sur  $[-2;2]$ . Comment appelle-t-on le point d'abscisse -2 ?
- (3+3 = 6 points)**
- 6) Soit la fonction  $f(x) = -\frac{1}{6}x^4 + \frac{3}{2}x^3 - 2x^2 + x - 7$ . Dressiez le tableau de concavité de  $f$  et précisez les coordonnées des points d'inflexion éventuels.
- (7 points)**

### Troisième partie : Probabilités et combinatoire

- 7) Une urne contient 7 boules rouges numérotées de 1 à 7, 11 boules vertes numérotées de 1 à 11 et 2 boules bleues numérotées de 1 à 2.
- a) On tire simultanément 4 boules de cette urne (tirage sans ordre et sans remise).
- i) Quel est le nombre de tirages possibles ?
  - ii) Quelle est la probabilité de tirer 4 boules de même couleur ?
  - iii) Quelle est la probabilité de ne tirer aucune boule rouge ?
  - iv) Quelle est la probabilité de tirer 2 boules de chaque couleur ?
- b) On tire successivement 3 boules en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne avant de tirer la suivante (tirage avec ordre et avec remise).
- i) Quel est le nombre de tirages possibles ?
  - ii) Quelle est la probabilité de tirer une boule de chaque couleur ?
- c) On tire successivement 5 boules sans remettre les boules tirées dans l'urne (tirage avec ordre et sans remise).
- i) Quel est le nombre de tirages possibles ?
  - ii) Quelle est la probabilité de tirer 3 boules vertes et 2 boules d'une autre couleur ?

**(6+3+4 = 13 points)**

- 8) 30 % des élèves d'un lycée portent des lunettes, 28 % participent à un concours de Mathématiques et  $\frac{1}{6}$  de ceux qui portent des lunettes ne participent pas au concours.

a) Complétez le tableau suivant en justifiant vos réponses :

	participent au concours	ne participent pas au concours	Totaux
portent des lunettes			
ne portent pas de lunettes			
Totaux			100%

- b) Si on rencontre un élève de ce lycée qui ne porte pas de lunettes, quelle est la probabilité qu'il participe au concours de Mathématiques ?

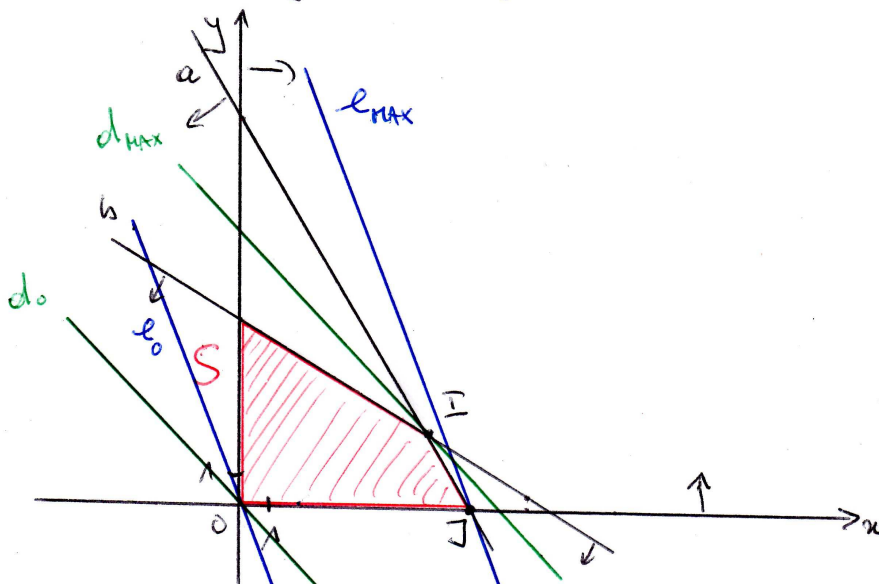
(4+2 = 6 points)

Corrigé

$$\begin{aligned}
 1) \quad & 2y - 1 = 4z - 3x \Leftrightarrow 3x + 2y - 4z = 1 \quad (1) \\
 & 2(x - y) = 1 - (4z + 7) \Leftrightarrow 2x - 2y = 1 - 4z - 7 \Leftrightarrow 2x - 2y + 4z = -6 \quad | :2 \\
 & \quad \quad \quad \Leftrightarrow x - y + 2z = -3 \quad (2) \\
 & \quad \quad \quad \frac{x}{2} + z = y - 3 \quad | \cdot 2 \Leftrightarrow x + 2z = 2y - 6 \Leftrightarrow x - 2y + 2z = -6 \quad (3) \\
 & \begin{cases} 3x + 2y - 4z = 1 \quad (1) \\ x - y + 2z = -3 \quad (2) \quad | \cdot (-3) \\ x - 2y + 2z = -6 \quad (3) \quad | \cdot (-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 4z = 1 \quad (1) \\ 5y - 10z = 10 \quad (2') \quad | \cdot (-1) \\ 8y - 10z = 19 \quad (3') \end{cases} \\
 & \quad \quad \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 4z = 1 \quad (1) \\ 5y - 10z = 10 \quad (2') \\ 3y = 9 \quad (3'') \end{cases} \\
 & (3'') \Leftrightarrow y = 3 \\
 & \rightarrow (2') : 15 - 10z = 10 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} \\
 & \rightarrow (1) : 3x + 6 - 2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \\
 & S = \left\{ (-1, 3, \frac{1}{2}) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad a) \quad & \text{coût: } 1tA: 300 \text{ €}, 1tB: 180 \text{ €}, \text{Max: } 2400 \text{ €} \\
 & \text{temps: } 1tA: 1,5 \text{ h}, 1tB: 2,5 \text{ h}, \text{Max: } 16 \text{ h} \\
 & \text{En un jour on fabrique } x \text{ t de A et } y \text{ t de B.} \\
 & 300x + 180y \leq 2400 \quad | : 60 \Leftrightarrow 5x + 3y \leq 40 \quad (1) \\
 & 1,5x + 2,5y \leq 16 \quad | \cdot 2 \Leftrightarrow 3x + 5y \leq 32 \quad (2) \\
 & \text{Contraintes: } \begin{cases} 5x + 3y \leq 40 \quad (1) \\ 3x + 5y \leq 32 \quad (2) \\ x \geq 0 \quad (3) \\ y \geq 0 \quad (4) \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{posons: } a \equiv 5x + 3y = 40 & \Leftrightarrow y = -\frac{5}{3}x + \frac{40}{3}, \quad 5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 40 \text{ vrai donc } O \in S_1 \\
 b \equiv 3x + 5y = 32 & \Leftrightarrow y = -\frac{3}{5}x + \frac{32}{5}, \quad 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \leq 32 \text{ vrai donc } O \in S_2
 \end{aligned}$$



b) masse totale =  $x + y = m$

posons  $d_m \equiv x + y = m$

$d_0 \equiv x + y = 0 \equiv y = -x$

$m$  maximale  $\Leftrightarrow I \in d_m$

$$I(x, y) \in a \cap b \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{3}x + \frac{40}{3} & (1) \\ y = -\frac{3}{7}x + \frac{32}{7} & (6) \end{cases}$$

$$(1) \rightarrow (6): -\frac{5}{3}x + \frac{40}{3} = -\frac{3}{7}x + \frac{32}{7} \quad | \cdot 15$$

$$\Leftrightarrow -45x + 200 = -9x + 96$$

$$\Leftrightarrow -16x = -104$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{104}{16} = 6,5$$

$$y = -\frac{3}{7} \cdot 6,5 + \frac{32}{7} = 2,5$$

on a  $I(6,5; 2,5)$

$I \in d_m \Leftrightarrow 6,5 + 2,5 = m \Leftrightarrow m = 9$

La masse totale maximale de 9 t est atteinte pour 6,5 t de produit A et 2,5 t de produit B.

c) bénéfice pour  $x$  t de A et  $y$  t de B =  $200x + 80y = b$

posons  $\mathcal{E}_b \equiv 200x + 80y = b$

$\mathcal{E}_0 \equiv 200x + 80y = 0 \equiv y = -2,5x$

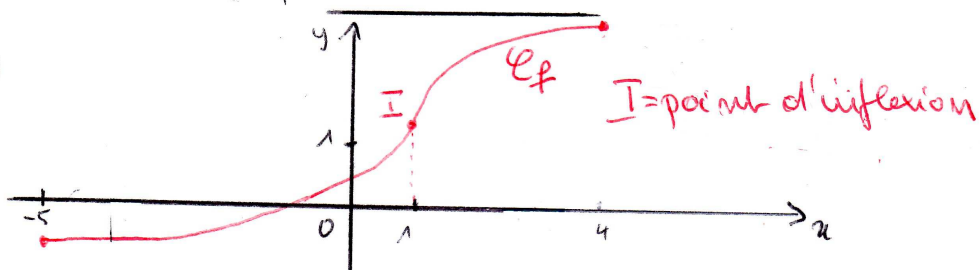
$b$  maximal  $\Leftrightarrow J \in \mathcal{E}_b$

$$J(x, y) \in a \cap (\mathcal{O}x) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 5x + 3 \cdot 0 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 8 \end{cases} \text{ donc } J(8, 0)$$

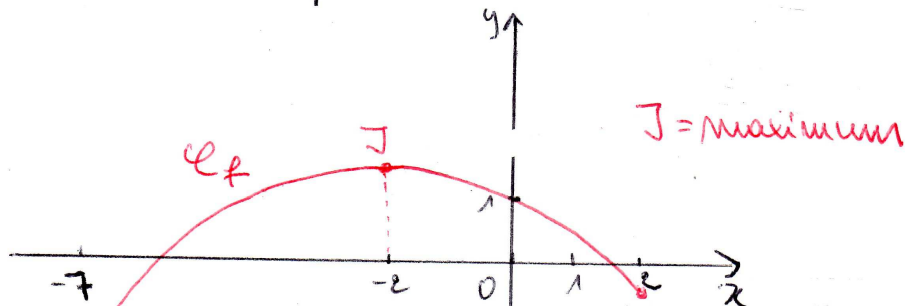
$J \in \mathcal{E}_b \Leftrightarrow 200 \cdot 8 + 80 \cdot 0 = b \Leftrightarrow b = 1600$

on obtient le bénéfice maximal de 1600 € pour 8 t de A (et pas de B).

5) a)



b)



$$3) \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{\frac{2(3+h)-3}{3+h} - 1}{h} = \frac{6+2h-3-3-h}{h(3+h)} = \frac{h}{h(3+h)} = \frac{1}{3+h}$$

D'où  $f'(3) = \frac{1}{3}$

4)  $\forall x \in [0,5] f'(x) > 0$  donc  $f$   $\nearrow$  sur  $[0,5]$  d'où  $\mathcal{C}_f = \mathcal{C}_3$  ou  $\mathcal{C}_6$   
 De plus  $f' \searrow$  sur  $[0,3]$ , donc  $f''(x) \leq 0$  sur  $[0,3]$  et  $\mathcal{C}_f$  concave sur  $[0,3]$   
 $f' \nearrow$  sur  $[3,5]$  donc  $f''(x) \geq 0$  sur  $[3,5]$  et  $\mathcal{C}_f$  convexe sur  $[3,5]$   
 D'où  $\mathcal{C}_f = \mathcal{C}_3$

$x$	0	3	5
$f''(x)$	-	0	+

donc  $\mathcal{C}_f'' = \mathcal{C}_6$




6)  $f(x) = -\frac{1}{6}x^4 + \frac{3}{2}x^3 - 2x^2 + x - 7$   
 $f'(x) = -\frac{1}{6} \cdot 4x^3 + \frac{3}{2} \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 1 - 0 = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 4x + 1$   
 $f''(x) = -\frac{2}{3} \cdot 3x^2 + \frac{9}{2} \cdot 2x - 4 \cdot 1 + 0 = -2x^2 + 9x - 4$

$$\Delta = 81 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 49$$

$$x' = \frac{-9 \pm 7}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$x'' = \frac{-9 - 7}{-4} = 4$$

tableau de concavité:

$x$		$\frac{1}{2}$		4	
$f''(x)$	-	0	+	0	-
$\mathcal{C}_f$					

2 pts d'inflexion:  $I(\frac{1}{2}; f(\frac{1}{2})) = I(\frac{1}{2}; -\frac{655}{96})$   
 $J(4; f(4)) = J(4; \frac{25}{3})$

7) a) i) Nombre de tirages (OR) possibles:  $C_{20}^4 = 4845$

ii) Nombre de tirages avec 4 b. rouges (R):  $C_7^4 = 35$

verts (V):  $C_{11}^4 = 330$

bleus (B): 0

proba. d'obtenir 4 b. de même couleur:  $\frac{35+330}{4845} = \frac{73}{969} \approx 0,08$



$$\text{iii)} \quad p(\bar{R}) = \frac{C_{13}^4}{4845} = \frac{143}{969} \approx 0,15$$

$$\text{iv)} \quad p(2R+2V+2B) = 0$$

$$\text{b) i)} \quad \text{Nombre de tirages (OR)} : 20^3 = 8000$$

$$\text{ii)} \quad p(1R+1V+1B) = \frac{7 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3!}{8000} = \frac{231}{2000} \approx 0,12$$

en effet pour tirer 1R, 1V, 1B dans cet ordre il y a  $7 \cdot 11 \cdot 2$  pos, ensuite il y a  $3!$  permutations de ces trois couleurs.

$$\text{c) i)} \quad \text{Nombre de tirages (OR)} : A_{20}^5 = \frac{20!}{15!} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = 1860480$$

$$\text{ii)} \quad \text{Il y a } C_5^3 = 10 \text{ poss. pour choisir trois "places" pour les 3V}$$

– Une fois ces places fixés il y a  $11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$  poss. pour les 3V et  $9 \cdot 8 = 72$  pour les 2V

$$\text{– D'où : } p(3V+2V) = \frac{10 \cdot 990 \cdot 72}{1'860'480} = \frac{495}{1292} \approx 0,38$$

8) d) H : participe au concours de l'année.

$\bar{H}$  : ne participe pas au concours

L : porte des lunettes

$\bar{L}$  : ne porte pas de lunettes

	H	$\bar{H}$	
L	$30-5=25\%$	5%	30%
$\bar{L}$	$28-25=3\%$	$72-5=67\%$	$100-30=70\%$
	28%	$100-28=72\%$	100%

$$\frac{1}{6} \text{ de } 30\% = 5\%$$

$$\text{b) } p(H \text{ si } \bar{L}) = \frac{p(H \text{ et } \bar{L})}{p(\bar{L})} = \frac{0,03}{0,70} = \frac{3}{70} \approx 0,04$$