

## EXAMEN SECTIONS E ; F ; G

### QUESTIONNAIRE 4

#### Première partie : Systèmes d'équations et d'inéquations

- 1) Résolvez le système suivant :

$$\begin{cases} 7z - 3y = 2(2 - x) \\ 3(x + 2y - 2) = 13 - 2(9 - x - 5y + z) \\ x - 5(3y - 2x - 6z + 4) = 2x + y - 3 \end{cases}$$

(6 points)

- 2) Un boucher produit deux sortes de saucisses : des saucisses de Strasbourg et des saucisses à griller. Il met en moyenne 1,5 minutes pour faire une saucisse de Strasbourg et 2 minutes pour une saucisse à griller et il ne veut pas passer plus de 3 heures par jour pour la fabrication de ses saucisses. Pour une saucisse de Strasbourg il lui faut 80 g de viande, pour une saucisse à griller 150 g et il dispose *au plus* de 12 kg de viande par jour pour faire les saucisses. Il vend une saucisse de Strasbourg pour 1,2 € et une saucisse à griller pour 2,5 € et il veut vendre pour *au moins* 150 € de saucisses par jour.
- a) Etablissez un système d'inéquations qui expriment ces contraintes.
  - b) Résolvez graphiquement ce système.
  - c) Vérifiez algébriquement et graphiquement s'il peut produire et vendre en une journée :
    - 50 saucisses de Strasbourg et 50 saucisses à griller
    - 90 saucisses de Strasbourg et 25 saucisses à griller

(6+5+2 = 13 points)

## Deuxième partie : Analyse

3) Soit  $f(x) = -2x^3 + 10,5x^2 - 9x + 4$ .

- Calculez la fonction dérivée de  $f$ , dressez son tableau de variation et précisez ses extrema éventuels.
- Calculez la fonction dérivée seconde de  $f$ , dressez son tableau de concavité et précisez ses points d'inflexion éventuels.

(5+3 = 8 points)

4) Voici les tableaux de variation et de concavité (incomplets) d'une fonction  $f$ :

$x$	-4	-2	3	5		
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f$	0	-3	4	-2		

$x$	-4	1	5	
$f''(x)$		+	0	-
$\mathcal{C}_f$	0	0,5	-2	

Recopiez et complétez ces deux tableaux puis esquissez la courbe de  $f$ .

(4 points)

5) Résolvez les équations suivantes :

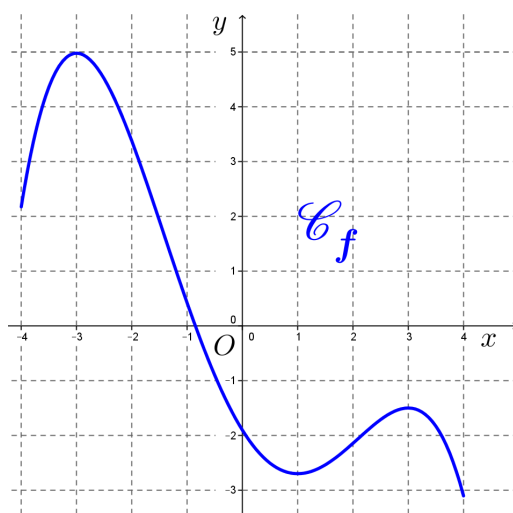
- $6 \cdot 10^x - 5 = 9 - 10^x$
- $4 - \log(1 - x) = 7$

(2+2 = 4 points)

6) Soit  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Déterminez les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  sachant que  $f(2) = -1$ ,  $f'(-3) = 11$  et  $f''(-7) = -2$ .

(5 points)

- 7) La fonction  $f$  définie sur  $[-4; 4]$  est donnée par son graphique :



Dressez le tableau de variation de  $f$  et indiquez les coordonnées (de façon aussi précise que possible) de ses extrema.

(4 points)

### Troisième partie : Probabilités et combinatoire

- 8) On tire une main de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes.
- a) Quel est le nombre de tirages possibles ?
  - b) Calculez la probabilité que la main tirée...
    - i) ne contienne que des trèfles ?
    - ii) contienne exactement 3 valets ?
    - iii) contienne la dame de cœur ?
    - iv) contienne 5 cartes d'une même couleur ?
    - v) ne contienne que des as ?
    - vi) contienne exactement deux rois et deux dames ?
    - vii) contienne au moins 1 carreau ?
    - viii) contienne au plus 4 cartes noires ?

( $1+(2+2+2+2+1+2+2+2) = 16$  points)

Corrigé

$$\begin{aligned}
 1) \quad 7z - 3y &= 2(2-x) \Leftrightarrow 7z - 3y = 4 - 2x \Leftrightarrow 2x - 3y + 7z = 4 \\
 3(x+2y-2) &= 13 - 2(9-x-5y+z) \Leftrightarrow 3x+6y-6 = 13-18+2x+10y-2z \\
 &\Leftrightarrow x-4y+2z = 1 \\
 x-5(3y-2x-6z+4) &= 2x+y-3 \Leftrightarrow x-15y+10x+30z-20-2x-y = -3 \\
 &\Leftrightarrow 9x-16y+30z = 17
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x-4y+2z=1 & (1) \quad | \cdot (-1) | + (9) \\ 2x-3y+7z=4 & (2) \\ 9x-16y+30z=17 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4y+2z=1 & (1) \\ 5y+3z=2 & (2') \quad | \cdot (-4) \\ 20y+12z=8 & (3') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4y+2z=1 & (1) \\ 5y+3z=2 & (2') \\ 0=0 & (3') \end{cases} \text{ (système indéterminé)}$$

posons  $z=r$ , alors  $5y+3r=2 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{5}r + \frac{2}{5}$

$$x = 4y - 2z + 1 = -\frac{12}{5}r + \frac{8}{5} - 2r + 1 = \frac{13}{5} - \frac{22}{5}r$$

$$S = \left\{ \left( \frac{13-22r}{5}, \frac{2-3r}{5}, r \right) \mid r \in \mathbb{R} \right\}$$

2) b) En un jour il produit  $x$  saucisses de Strasbourg et  $y$  à quille

temps:  $x \cdot 15 + y \cdot 2$  minutes, max  $3h = 180 \text{ min.}$

vieillesse:  $x \cdot 80 + y \cdot 150$  g, max  $12 \text{ kg} = 12000 \text{ g}$

prix de vente:  $x \cdot 1,2 + y \cdot 2,5 \in$ , min.  $150 \in$

$$\text{D'où: } \begin{cases} 15x+2y \leq 180 & (1) \quad | \cdot 2 \\ 80x+150y \leq 12000 & (2) \quad | : 10 \\ 1,2x+2,5y \geq 150 & (3) \quad | \cdot 10 \\ x \geq 0 & (4) \\ y \geq 0 & (5) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y \leq 360 & (1) \\ 8x+15y \leq 1200 & (2) \\ 12x+25y \geq 1500 & (3) \\ x \geq 0 & (4) \\ y \geq 0 & (5) \end{cases}$$

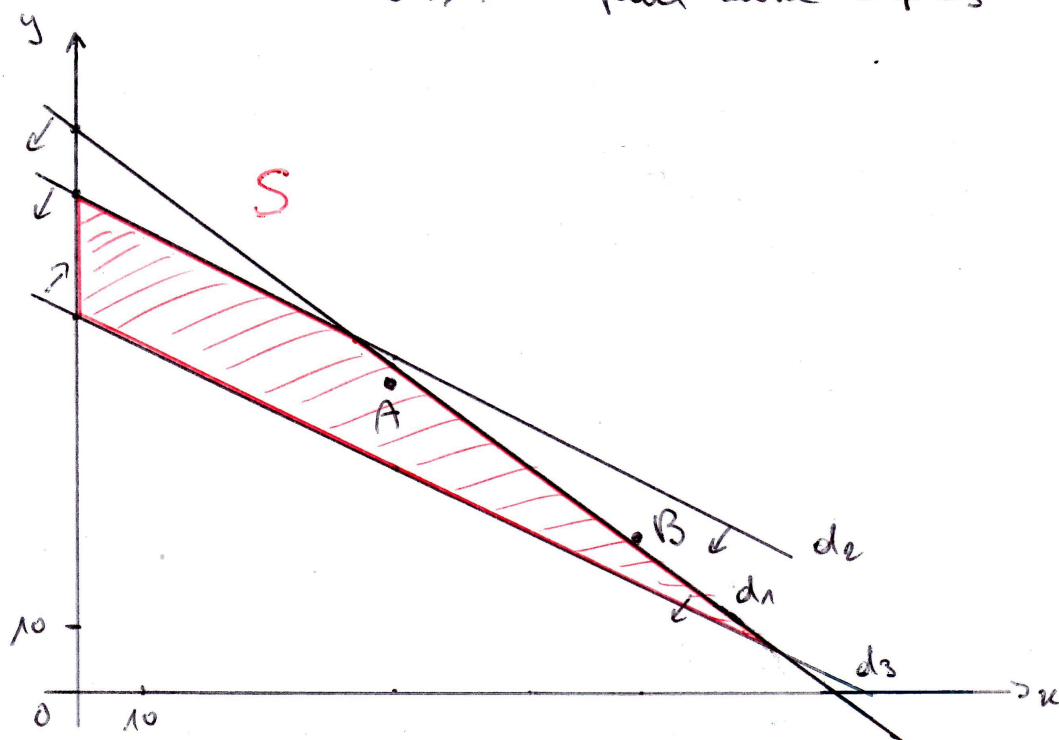
b) posons  $d_1 \equiv 3x+4y=360 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + 90$

$$3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \leq 360 \text{ vrai donc } O \in S_1$$

$$\begin{array}{r|l} x & 0 \quad 50 \\ y & 90 \quad 52,5 \end{array}$$

posons  $d_2 \equiv 8x + 15y = 1200 \equiv y = -\frac{8}{15}x + 80$   $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 50 \\ y & 80 & 33,3 \end{array}$   
 $8 \cdot 0 + 15 \cdot 0 \leq 1200$  vrai donc  $O \in S_2$

posons  $d_3 \equiv 12x + 25y = 1500 \equiv y = -\frac{12}{25}x + 60$   $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 50 \\ y & 60 & 36 \end{array}$   
 $12 \cdot 0 + 25 \cdot 0 \geq 1500$  faux donc  $O \notin S_3$



c) •  $A(50, 50) \in S$  donc il peut fabriquer 50 s. de chaque type algébriquement :

$$\underbrace{3 \cdot 50 + 4 \cdot 50}_{370} \leq 360 \text{ vrai}$$

$$\underbrace{8 \cdot 50 + 15 \cdot 50}_{1150} \leq 1200 \text{ vrai}$$

$$\underbrace{12 \cdot 50 + 25 \cdot 50}_{1850} \geq 1500 \text{ vrai}$$

•  $B(90, 25)$

graphiquement il semble que  $B \in S$  (mieux vaut vérifier par le calcul !)

$$\underbrace{3 \cdot 90 + 4 \cdot 25}_{370} \leq 360 \text{ faux !}$$

Les contraintes ne lui permettent pas de fabriquer 90 s. de Strasbourg et 25 s. de quiller.

3) a)  $f(x) = -2x^3 + 10.5x^2 - 9x + 4$

$f'(x) = -6x^2 + 21x - 9$

$-6x^2 + 21x - 9 = 0$

$\Delta = 21^2 - 4 \cdot 6 \cdot 9 = 225 = 15^2$

$x' = \frac{-21 \pm 15}{-12} = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2}$

$x'' = \frac{-21 - 15}{-12} = 3$

$x$	$\frac{1}{2}$	3
$f'(x)$	-	+
$f$	$\searrow \frac{15}{8}$	$\nearrow 17.5$


Extrema:

1 minimum  $(\frac{1}{2}, \frac{15}{8})$

1 maximum  $(3; 17.5)$

b)  $f''(x) = -12x + 21$

$-12x + 21 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{21}{12} = \frac{7}{4}$

$x$	$\frac{7}{4}$
$f''(x)$	+
$\mathcal{C}_f$	

1 pt d'inflexion:

$I(\frac{7}{4}; \frac{155}{16})$

4)

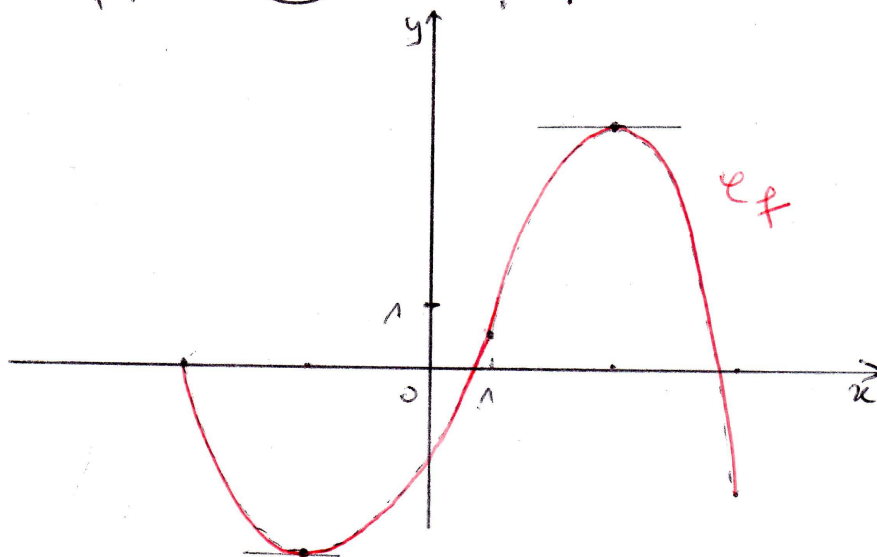
$x$	-4	-2	3	5
$f'(x)$	-	0	+	0

$f$	0	$\searrow -3$	$\nearrow 4$	$\searrow -2$
-----	---	---------------	--------------	---------------

$x$	-4	1	5
$f''(x)$	-	+	-

$\mathcal{C}_f$	0		0.5	
-----------------	---	---	-----	---

$I(1; 0.5) = \text{pt d'inflexion}$



$$\begin{aligned}
 5) \quad a) \quad 6 \cdot 10^x - 5 &= 9 - 10^x &\Leftrightarrow 6 \cdot 10^x + 10^x &= 9 + 5 \\
 &&\Leftrightarrow 7 \cdot 10^x &= 14 \quad | :7 \\
 &&\Leftrightarrow 10^x &= 2 \\
 &&\Leftrightarrow \log 10^x &= \log 2 \\
 &&\Leftrightarrow x &= \log 2
 \end{aligned}$$

$$S = \{\log 2\}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad 4 - \log(1-x) &= 7 &\Leftrightarrow 4 - 7 &= \log(1-x) \\
 &&\Leftrightarrow -3 &= \log(1-x) \\
 &&\Leftrightarrow 10^{-3} &= 10^{\log(1-x)} \\
 &&\Leftrightarrow 10^{-3} &= 1-x \\
 &&\Leftrightarrow x &= 1 - 10^{-3} \\
 &&\Leftrightarrow x &= 0,999
 \end{aligned}$$

$$S = \{0,999\}$$

7)

$x$	-4	-3	1	3	4			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-
$f$	2,1		5	-2,7	-1,5		-3,1	

extrema:  $(-3; 5)$ ;  $(1; -2,7)$ ;  $(3; -1,5)$ ;  $(-4; 2,1)$ ;  $(4; -3,1)$

$$6) \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(2) = -1 \Leftrightarrow a \cdot 4 + b \cdot 2 + c = -1 \quad (1)$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f'(-3) = 11 \Leftrightarrow 2a(-3) + b = 11 \quad (2)$$

$$f''(x) = 2a$$

$$f''(-1) = -2 \Leftrightarrow 2a = -2 \quad (3)$$

$$\text{Il faut résoudre le système: } \begin{cases} 4a + 2b + c = -1 & (1) \\ -6a + b = 11 & (2) \\ 2a = -2 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow a = -1$$

$$\rightarrow (2): 6 + b = 11 \Leftrightarrow b = 5$$

$$\rightarrow (1): -4 + 10 + c = -1 \Leftrightarrow c = -7$$

$$\text{D'où } f(x) = -x^2 + 5x - 7$$



8) a) Nombre de mains :  $C_{32}^5 = 201\,376$

b) i) A : "obtenir 5 trèfles" 8 trèfles 24 autres

$\#A = C_8^5 = 56$

$p(A) = \frac{56}{201\,376} = \frac{1}{3\,596} \approx 0,0003$

ii) B : "obtenir exactement 3 valets" 4 valets 28 autres

$\#B = C_4^3 \cdot C_{28}^2 = 1512$

$p(B) = \frac{27}{3596} \approx 0,008$

iii) C : "obtenir la dame de cœur" 1 D♥ 31 autres

$\#C = 1 \cdot C_{31}^4 = 31\,465$

$p(C) = \frac{5}{32} \approx 0,16$

iv) D : "obtenir 5 d'une même couleur"

$p(D) = 4 \cdot p(A) = \frac{1}{899}$  car il y a 4 couleurs

v) E : "obtenir 5 as" (impossible!)

$\#E = 0$

$p(E) = 0$

vi) F : "obtenir 2 R et 2 D" 4 R 4 D 24 autres

$\#F = C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot 24 = 864$

$p(F) = \frac{27}{6\,293} \approx 0,004$

vii) G : "obtenir au moins 1 carré"

$\bar{G}$  : "n'obtenir aucun carré"

$\# \bar{G} = C_{24}^5 = 42\,504$

$p(G) = 1 - \frac{42\,504}{201\,376} = \frac{158\,872}{201\,376} \approx 0,79$

viii) H : "obtenir au plus 4 cartes noires" 16 noires 16 rouges

$\bar{H}$  : "obtenir 5 cartes noires"

$\# \bar{H} = C_{16}^5 = 4\,368$

$p(H) = 1 - \frac{4\,368}{201\,376} = \frac{197\,008}{201\,376} \approx 0,98$