

EXAMEN SECTIONS E ; F ; G

QUESTIONNAIRE 5

Première partie : Systèmes d'équations et d'inéquations

1) Résolvez le système suivant :

$$\begin{cases} 15 + 3x + 5z = y + \frac{7}{2} \\ 3x - 4(y - 6z) = 19 - 2(x - 3y) \\ \frac{x-1}{2} = \frac{y-5z-1}{6} \end{cases}$$

(5 points)

2) Dans un repère orthonormé on donne les points $A(-1;7)$, $B(6;7)$, $C(8;0)$, $D(2;1)$ et $E(-1;5)$.

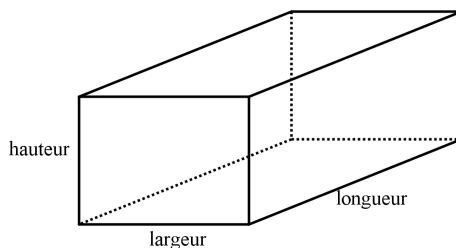
a) Déterminez un système d'inéquations dont l'ensemble des solutions est représenté par le polygone ABCDE, bords inclus (figure !).

b) Déterminez le maximum et le minimum de la fonction $f(x, y) = 2x + 5y$ par rapport à ce polygone.

(11+3 = 14 points)

Deuxième partie : Analyse

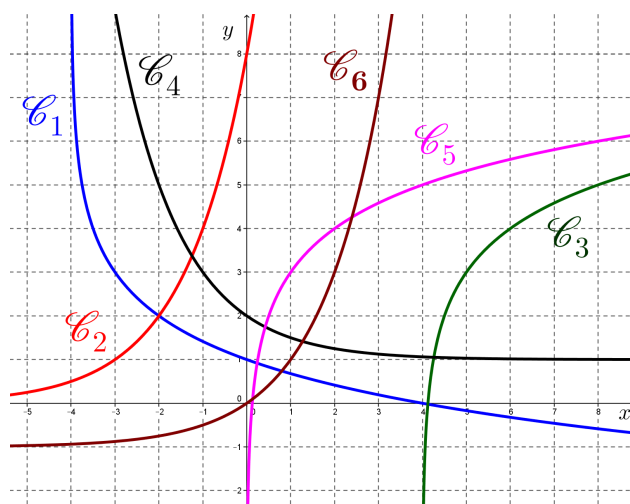
3) La longueur totale des arêtes d'un pavé vaut 52 m et sa longueur mesure 3 m de plus que sa largeur :



- a) En notant x la largeur du pavé, exprimez sa longueur, sa hauteur, son aire et son volume en fonction de x .
- b) Comment faut-il choisir x pour que l'aire du pavé soit plus grande que 104 m^2 ?
- c) Pour quelle valeur de x l'aire du pavé est-elle maximale ?
- d) Pour quelle valeur de x le volume du pavé est-il maximal ?

(6+3+3+3 = 15 points)

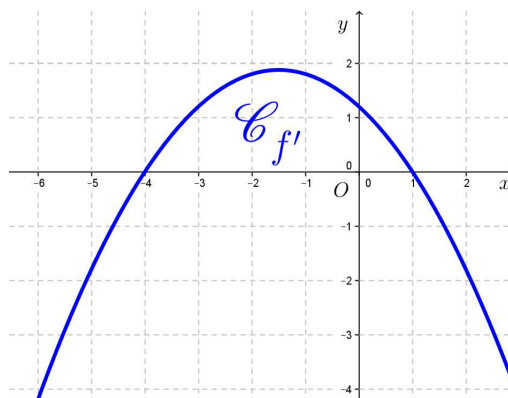
- 4) a) Les six courbes du graphique ci-dessous représentent trois fonctions « exponentielles » et trois fonctions « logarithmes ». Quelles sont les fonctions « exponentielles » ?



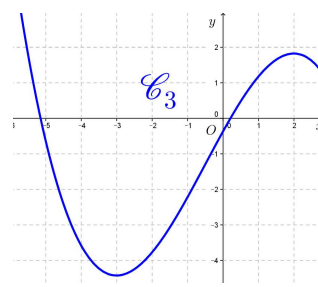
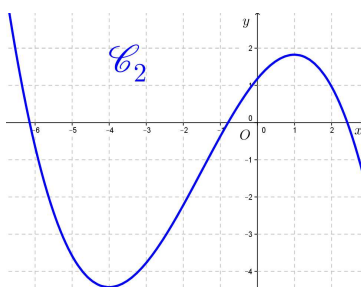
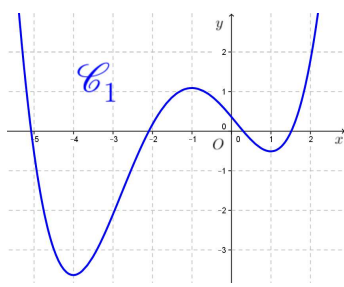
- b) Soient $f(x) = 3 + \log_2(x - 4)$ et $g(x) = 2^{x+3}$. Retrouvez les courbes de ces deux fonctions parmi ces six courbes en justifiant votre choix.

(2+3 = 5 points)

- 5) Voici le graphe de la fonction dérivée d'une fonction f :



Pour chacune des trois courbes suivantes, analysez si elle *peut* être la courbe de f :



(4 points)

Troisième partie : Probabilités et combinatoire

- 6) Dans une urne il y a deux boules rouges et 3 boules noires. Julien joue au jeu suivant : il tire successivement des boules de l'urne jusqu'à ce qu'il ait obtenu soit les deux boules rouges, soit les trois boules noires (*exemples de déroulements de ce jeu* : RNR , $.NRNN$, ...).

- Dressez un diagramme en arbre qui montre tous les déroulements possibles de ce jeu et calculez la probabilité de chacun d'eux.
- Quelle est la probabilité que le jeu s'arrête après le tirage de la troisième boule ?
- Quelle est la probabilité que le jeu s'arrête quand Julien a tiré les deux boules rouges ?

(7+1+1 = 9 points)

- 7) Pour chacun des exemples suivants, précisez la nature du groupement puis calculez le nombre de groupements possibles.

- Former des mots (ayant un sens ou non) avec les lettres du mot « ROUGE ».
- Former un comité de trois personnes dans une association qui compte 30 membres.
- Former un code de cinq chiffres (différents ou non).
- Choisir trois élèves dans une classe de 25 élèves : un pour tenir le livre de classe, un pour s'occuper du tableau et un pour gérer l'ordinateur de la classe.

(2+2+2+2 = 8 points)

Corrigé

$$1) \quad 15 - (4x + y - 5z) = 7\left(\frac{1}{2} - x\right) \Leftrightarrow 15 - 4x - y + 5z = \frac{7}{2} - 7x$$

$$\Leftrightarrow 3x - y + 5z = -\frac{23}{2} \quad (1)$$

$$3x - 4(y - 6z) = 19 - 2(x - 3y) \Leftrightarrow 3x - 4y + 24z = 19 - 2x + 6y$$

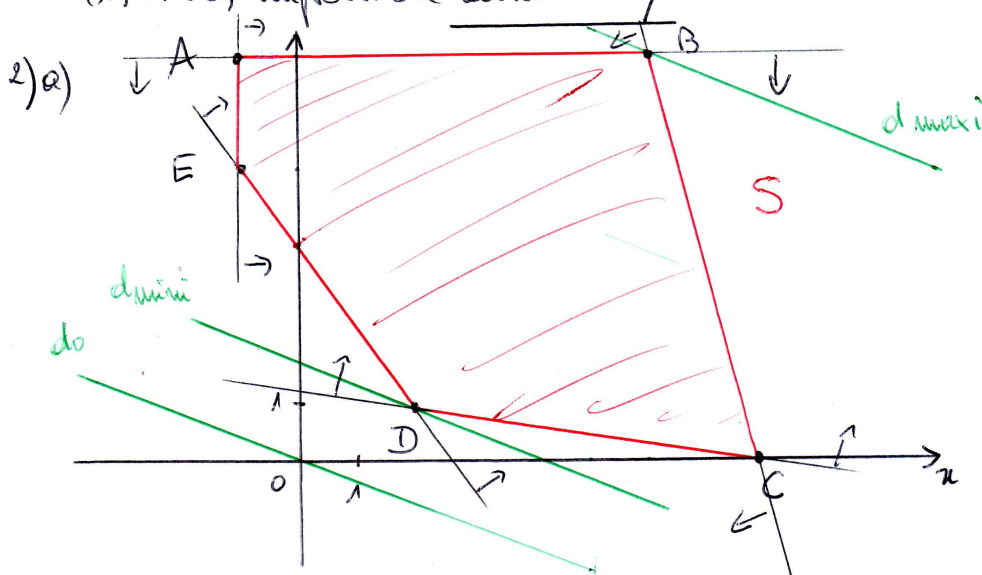
$$\Leftrightarrow 5x - 10y + 24z = 19 \quad (2)$$

$$\frac{3(x-1)}{2} = \frac{8(y-5z-1)}{6} \quad | \cdot 6 \Leftrightarrow 3(x-1) = y - 5z - 1$$

$$\Leftrightarrow 3x - 3 - y + 5z = -1$$

$$\Leftrightarrow 3x - y + 5z = 2 \quad (3)$$

(1) et (3) impossible donc $S = \emptyset$



• $(AB) \equiv y = 7$, $O \in S_1$ donc $y \leq 7 \quad (1)$

• $(BC) \equiv y = ax + b$

$$\begin{cases} 7 = 6a + b & \text{car } B \in (BC) \\ 0 = 8a + b & \text{car } C \in (BC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 - 6a \\ b = -8a \end{cases}$$

$$\text{donc } 7 - 6a = -8a \Leftrightarrow 2a = -7 \Leftrightarrow a = -\frac{7}{2} \text{ et } b = 28$$

$(BC) \equiv y = -\frac{7}{2}x + 28$, $O \in S_2$ donc $y \leq -\frac{7}{2}x + 28 \quad | \cdot 2$

$$\Leftrightarrow 7x + 2y \leq 56 \quad (2)$$

• $(CD) \equiv y = cx + d$

$$\begin{cases} 0 = 8c + d & \text{car } C \in (CD) \\ 1 = 2c + d & \text{car } D \in (CD) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -8c \\ d = 1 - 2c \end{cases}$$

$$\text{donc } -8c = 1 - 2c \Leftrightarrow c = -\frac{1}{6} \text{ et } d = \frac{4}{3}$$

$(CD) \equiv y = -\frac{x}{6} + \frac{4}{3}$ et $O \notin S_3$ donc $y \geq -\frac{x}{6} + \frac{4}{3} \quad | \cdot 6 \Leftrightarrow x + 6y \geq 8 \quad (3)$

• $(DE) \equiv y = 2x + f$

$$\begin{cases} 1 = 2e + f \text{ car } D \in (DE) \\ 5 = -e + f \text{ car } E \in (DE) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f = 1 - 2e \\ f = e + 5 \end{cases}$$

donc $1 - 2e = e + 5 \Leftrightarrow e = -\frac{4}{3}$ et $f = \frac{11}{3}$

$(DE) \equiv y = -\frac{4}{3}x + \frac{11}{3}$ et $O \notin S_4$ donc $y \geq -\frac{4}{3}x + \frac{11}{3}$ (3)

$\Leftrightarrow 4x + 3y \geq 11$ (4)

• $(AE) \equiv x = -1, O \in S_5$ donc $x \geq -1$ (5)

système:
$$\begin{cases} y \leq 7 & (1) \\ 7x + 2y \leq 56 & (2) \\ x + 6y \geq 8 & (3) \\ 4x + 3y \geq 11 & (4) \\ x \geq -1 & (5) \end{cases}$$

b) $f(x, y) = 2x + 5y$

posons $d_k \equiv 2x + 5y = k$, alors

$d_0 \equiv 2x + 5y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{5}x$

$k_{\text{minimal}} \Leftrightarrow D \in d_k \Leftrightarrow 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = k \Leftrightarrow \underline{k = 9}$

f atteint le minimum 9 pour $x = 2$ et $y = 1$

$k_{\text{maximal}} \Leftrightarrow B \in d_k \Leftrightarrow 2 \cdot 6 + 5 \cdot 7 = k \Leftrightarrow \underline{k = 47}$

f atteint le maximum 47 pour $x = 6$ et $y = 7$

3) a) $x = \text{longueur}$

$\text{longueur} = x + 3$

$\text{hauteur} = h$

$4x + 4(x + 3) + 4h = 52 \quad | :4 \Leftrightarrow x + x + 3 + h = 13 \Leftrightarrow \underline{h = 10 - 2x}$

Aire du pavé: $A = 2 \cdot x(x + 3) + 2 \cdot x(10 - 2x) + 2 \cdot (x + 3)(10 - 2x)$

$= 2x^2 + 6x + 20x - 4x^2 + 2(10x - 2x^2 + 30 - 6x)$

$= -2x^2 + 26x + 20x - 4x^2 + 60 - 12x$

$\underline{A(x) = -6x^2 + 34x + 60}$

Volume du pavé: $V = x(x + 3)(10 - 2x)$

$= x(-2x^2 + 4x + 30)$

$\underline{V(x) = -2x^3 + 4x^2 + 30x}$

b) $A \geq 104 \Leftrightarrow -6x^2 + 34x + 60 \geq 104 \Leftrightarrow 6x^2 - 34x + 44 \leq 0$

$\Delta = 34^2 - 4 \cdot 6 \cdot 44 = 100 = 10^2$

$x' = \frac{34 \pm 10}{12} = 2$

$x'' = \frac{34 - 10}{12} = \frac{11}{3}$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 2 & \frac{11}{3} \\ \hline 6x^2 - 34x + 44 & 0 & 0 \end{array}$$

D'où $A \geq 104 \text{ m}^2 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq \frac{11}{3} (\text{m})$

c) $A'(x) = -12x + 34$

$-12x + 34 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{34}{12} = \frac{17}{6}$

x	$\frac{17}{6}$
$A'(x)$	+
A	0

Aire maximale pour $x = \frac{17}{6} \text{ m}$ (aire maxi = $\frac{649}{6} \text{ m}^2 \approx 108,17 \text{ m}^2$)

d) $V'(x) = -6x^2 + 8x + 30$

$-6x^2 + 8x + 30 = 0 \quad (:-1) \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 15 = 0$

$\Delta = 16 + 4 \cdot 3 \cdot 15 = 196 = 14^2$

$x' = \frac{4 \pm 14}{6} = 3$

$x'' = \frac{4 - 14}{6} = -\frac{5}{3}$

x	$-\frac{5}{3}$	3
$V'(x)$	-	+
V	0	0

$x > 0$
Volume maximal pour $x = 3 \text{ m}$ (volume maximal = 72 m^3)

4) a) $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_5$ sont des courbes "logarithmiques" car elles ont chacune une asymptote verticale

$\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_6$ sont des courbes "exponentielles" car elles ont chacune une asymptote horizontale

b) $f(5) = 3 + \log_2 1 = 3$ donc $\mathcal{C}_f = \mathcal{C}_3$

$g(0) = 2^3 = 8$ donc $\mathcal{C}_g = \mathcal{C}_2$

5) D'après \mathcal{C}_f on a:

x	-4	1
$f'(x)$	-	+
f	0	0

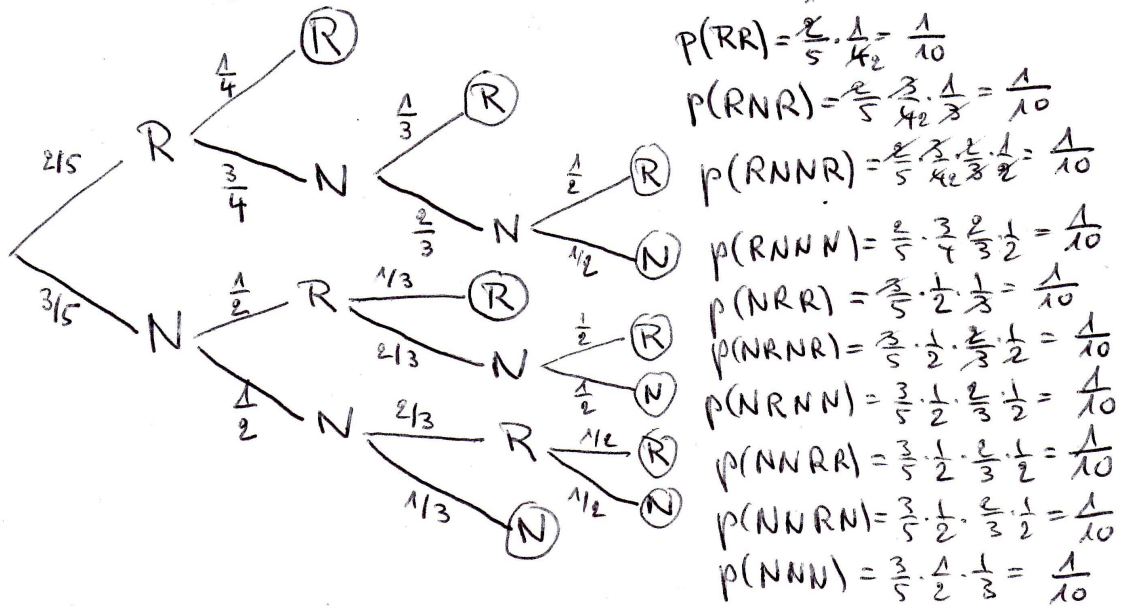
• $\mathcal{C}_f \neq \mathcal{C}_1$ car $f \nearrow$ sur $[-4, 1]$ alors que $\mathcal{C}_1 \searrow$ sur $[-1, 1]$

• \mathcal{C}_2 est compatible avec le tableau de variation donc \mathcal{C}_2 peut être \mathcal{C}_f

• $\mathcal{C}_f \neq \mathcal{C}_3$ car \mathcal{C}_f a un mini en $x = -4$ et non pas -3 comme \mathcal{C}_3 .

6) $\{2R, 3N\}$

a)



Il y a 10 déroulements possibles de ce jeu qui sont équiprobables!

b) 3 possibles: RNR, NRR, NNN, probabilité: $\frac{3}{10}$

c) 6 possibles: RR, RNR, RNNR, NRR, NNRN, NNRR, probabilité: $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

7) a) permutations de 5 lettres: $5! = 120$ possibilités

b) tirage sans ordre et sans remise: $C_{30}^3 = 4060$ poss.

c) tirage avec ordre et avec remise: 10^5 poss.

d) tirage avec ordre et sans remise: $25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800$ poss.