

CHAPITRE 2

SYSTEMES D'INEQUATIONS A DEUX

INCONNUES

Exercice 1

Dans un repère orthonormé on donne les points $A(-1;2)$, $B(5;-6)$, $C\left(5;\frac{1}{2}\right)$, $D\left(-7;\frac{1}{2}\right)$

et les droites $a \equiv 3x + 2y = -5$ et $b \equiv 4x - 3y + 10 = 0$.

- 1) Est-ce que $A \in a$? $A \in b$?
- 2) Etablissez une équation cartésienne
 - a) des droites (AB) , (BC) et (CD) .
 - b) de la droite d_1 passant par A et parallèle à la droite a .
 - c) de la droite d_2 passant par A et parallèle à l'axe des abscisses.
 - d) de la droite d_3 passant par C et perpendiculaire à b .
 - e) de la droite d_4 passant par D et parallèle à l'axe des ordonnées.
- 3) Déterminez le point d'intersection des droites
 - a) (CD) et a
 - b) (BC) et a
 - c) a et b

Exercice 2

Résolvez graphiquement les systèmes suivants :

$$1) \begin{cases} 3x + 2y - 5 < 0 \\ x - y + 4 > 0 \\ x + 3y - 4 < 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x - 7 - 4y \geq 0 \\ 2x + 5y \leq 9 \\ y + 2 \geq 0 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

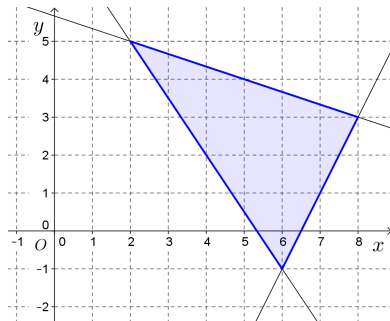
$$3) \begin{cases} 2x - y \geq 2 \\ x - 3 \leq 0 \\ 2y - 1 \geq 0 \\ 4 - y \geq x \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ -2 \leq y \leq 4 \\ x + y - 5 \leq 0 \end{cases}$$

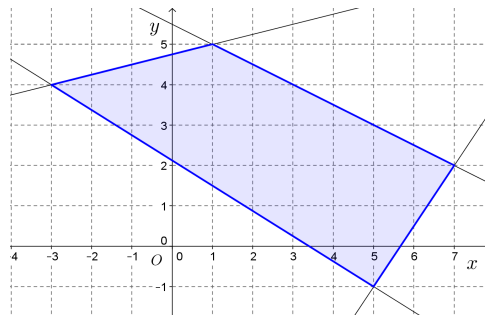
Exercice 3

Pour chacun des graphiques suivants trouvez un système d'inéquations correspondant :

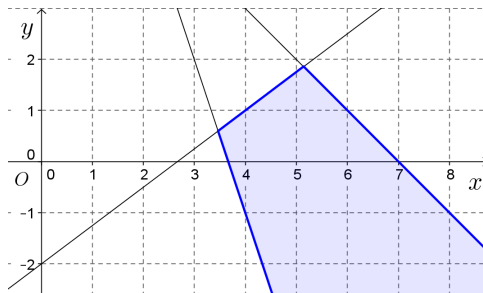
1)



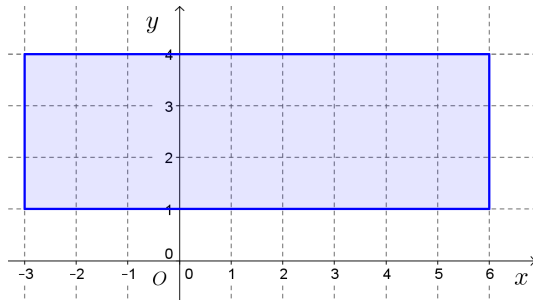
2)



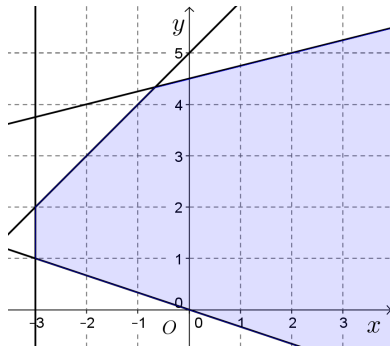
3)



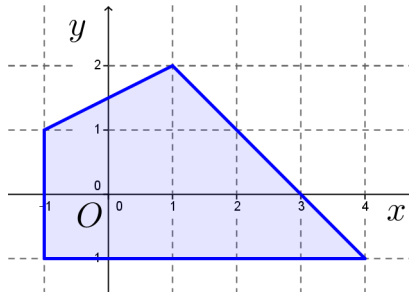
4)



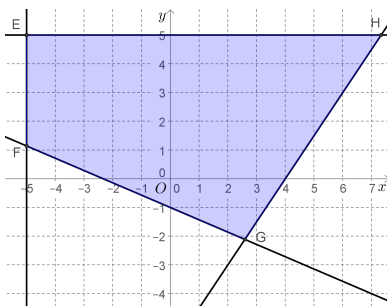
5)



6)



7)



Déterminez également les coordonnées des points E, F, G et H.

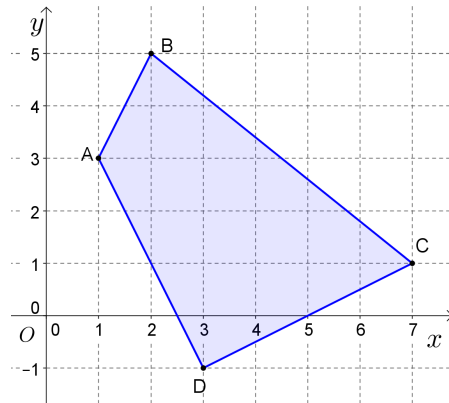
Exercice 4

Soit le système de contraintes suivant :
$$\begin{cases} 2x - 3y + 12 \geq 0 \\ 5x + 6y - 6 \geq 0 \end{cases}$$

- 1) Déterminez graphiquement l'ensemble S des solutions de ce système.
- 2) En tenant compte de ces contraintes, déterminez le *maximum* de la fonction $f(x; y) = 2x - y$

Exercice 5

On donne le polygone de contraintes ABCD suivant :



Déterminez le maximum et le minimum des fonctions suivantes :

- 1) $f(x; y) = 3x + y$
- 2) $g(x; y) = 2x + 5y$
- 3) $h(x; y) = y - x$

Exercice 6

On considère le triangle ABC avec $A(1;7)$, $B(9;5)$ et $C(5;-1)$ (figure !).

- 1) Déterminez une équation de chacune des droites (AB), (BC) et (AC).
- 2) Déterminez un système d'inéquations dont les solutions sont représentées par ce triangle.
- 3) Déterminez le maximum et le minimum de la fonction $f(x; y) = 3x + 2y$ par rapport à ce triangle.

Exercice 7

Soit le système de contraintes suivant :

$$\begin{cases} 2y \leq 5x \\ x - 2y + 8 \geq 0 \\ 4x + 3y - 34 \leq 0 \\ 8 - 2x + 3y \geq 0 \\ 2x + y \geq 0 \end{cases}$$

- 1) Déterminez graphiquement l'ensemble S des solutions de ce système.
- 2) Combien y a-t-il de solutions $(x; y)$ de ce système pour lesquelles x et y sont deux nombres entiers ?

- 3) En tenant compte de *toutes* ces contraintes (donc y compris celles du point 2), déterminez le maximum et le minimum des fonctions suivantes en indiquant à chaque fois *tous* les couples $(x; y)$ pour lesquels ils sont atteints :

a) $f(x; y) = 3y - x$

c) $h(x; y) = 3y - 2x$

b) $g(x; y) = y - 5x$

d) $k(x; y) = 2y - 5x$

Exercice 8

Pour avoir plus d'argent de poche, José fait des gardes d'enfants chez le couple Dupont et chez le couple Durand. Une garde est payée 6 € l'heure et dure 5 heures chez le couple Dupont, tandis qu'elle est payée 10 € l'heure mais ne dure qu'une heure et demie chez le couple Durand. José ne dispose que de 28 heures par mois pour effectuer ces gardes et ne veut pas en faire plus de 14 par mois. Combien de gardes doit-il faire chez chacun des deux couples en un mois pour obtenir un revenu maximal ? Quel est ce revenu maximal ?

Exercice 9

Un parfumeur produit deux parfums à base d'extraits d'iris et de rose : « Séduction » et « Femme fatale ». La fabrication d'un litre de parfum « Séduction » nécessite 1,8 L d'extrait d'iris et 1,6 L d'extrait de rose alors que celle d'un litre de parfum « Femme fatale » nécessite 1,2 L d'extrait d'iris et 2,4 L d'extrait de rose. Le parfumeur dispose chaque jour d'un maximum de 4,5 L d'extrait d'iris et de 6 L d'extrait de rose. La vente d'un litre de « Séduction » lui rapporte un bénéfice de 220 € et celle d'un litre de « Femme fatale » 180 €.

Quelle quantité de parfum de chaque sorte doit-il fabriquer pour obtenir un bénéfice maximal ? Quel est le montant de ce bénéfice ?

Exercice 10

Anna veut confectionner des ours et des lapins en peluche pour une vente de charité. Pour un ours il lui faut 75 cm de tissu brun, 25 cm de tissu beige et 12 cm de tissu blanc alors que pour un lapin il lui faut 30 cm de tissu brun, 20 cm de tissu beige et 18 cm de tissu blanc. En tout elle dispose de 1,8 m de tissu blanc, de 2,35 m de tissu beige et de 6,15 m de tissu brun.

- 1) Elle compte demander 20 € pour un ours et 24 € pour un lapin. Combien doit-elle en fabriquer de chaque sorte pour obtenir une recette maximale ? Quelle est cette recette ?
- 2) Mêmes questions si elle vendait un ours 24 € et un lapin 16 €.

Exercice 11

Un atelier de couture fabrique deux modèles de robes avec le même tissu. L'un exige 1,2 m de tissu et 12 h de travail par robe, l'autre 3 m de tissu et 6 h de travail par robe. L'atelier dispose de 36 m de ce tissu et ne compte pas investir plus de 120 heures de travail pour la fabrication de ces robes. La vente d'une robe du premier modèle rapporte un bénéfice de 150 € et celle d'une robe du deuxième modèle 120 €. Combien de robes de chaque modèle faut-il produire pour obtenir un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice ?

Exercice 12

Une entreprise veut transporter par bateau au moins 300 véhicules et 400 tonnes de matériel. Le transporteur maritime auquel elle s'adresse dispose de 30 bateaux de type A, susceptibles chacun de transporter 10 véhicules et 10 tonnes de matériel et de 35 bateaux de type B, susceptibles chacun de transporter 6 véhicules et 10 tonnes de matériel.

Le coût d'affrètement d'un bateau de type A est de 8000 € et celui d'un bateau de type B de 10000 €. Quelle est le nombre de bateaux de type A et de type B permettant d'assurer le transport pour un coût minimal ? Que vaut le coût dans ce cas et combien de véhicules et de matériel permet-il de transporter ?

Exercice 13

Une commune désire aménager un nouvel espace vert. Une société de vente lui propose des lots A comprenant 5 rosiers, 3 magnolias et 8 camélias pour un montant de 300 € et des lots B comprenant 15 rosiers, 4 magnolias et 4 camélias pour un montant de 540 €. On veut planter au moins 100 rosiers, 40 magnolias et 60 camélias.

Déterminez le nombre de lots de chaque sorte qu'il faut commander pour avoir une dépense minimale. Calculez cette dépense minimale et le nombre d'arbustes de chaque sorte qu'on obtient.

Exercice 14

Une commune décide d'améliorer son jeu d'effets lumineux en vue des fêtes de fin d'année. Une entreprise lui propose des lots A comprenant 100 m de guirlandes, 2 « étoiles

de neiges » et 2 « sapins de Noël » pour un montant de 600 € et des lots B comprenant 200 m de guirlandes, 2 « étoiles de neiges » et 1 « sapin de Noël » pour un montant de 800 €.

La commune a besoin d'au moins 800 m de guirlandes, de 12 « étoiles de neiges » et de 8 « sapins de Noël ». Déterminez le nombre de lots de chaque sorte qu'il faut commander pour avoir une dépense minimale. Calculez cette dépense minimale.

Exercice 15

Paolo, le pizzaiolo installé au coin de la rue Leibniz, fait rapidement ses comptes : il lui reste 1 kg de pâte, 1600 g de tomates et 1080 g de champignons. Il cuit deux sortes de pizzas :

- La Stromboli pour laquelle il lui faut 100 g de pâte, 180 g de tomates et 80 g de champignons
- La Vesuvio pour laquelle il lui faut 100 g de pâte, 80 g de tomates et 120 g de champignons

- 1) Représentez sur un diagramme le nombre de pizzas de chaque sorte que Paolo peut encore cuire avec les ingrédients qui lui restent.
- 2) Sachant qu'une Vesuvio lui rapporte 8 € et une Stromboli 9 €, déterminez le nombre de pizzas de chaque sorte qui lui permet de maximiser son revenu.

Exercice 16

Le mobilier d'une bibliothèque municipale doit être changé pour contenir au moins 4400 livres de petit format et 2600 livres de grand format. Un premier fournisseur propose des meubles de type A pouvant contenir 110 livres de petit format et 100 livres de grand format pour le prix de 400 €. Un deuxième fournisseur propose des meubles de type B pouvant contenir 220 livres de petit format et 100 livres de grand format pour le prix de 600 €. Par ailleurs l'espace disponible ne permet pas de mettre plus de 24 meubles de type A, ni plus de 16 meubles de types B.

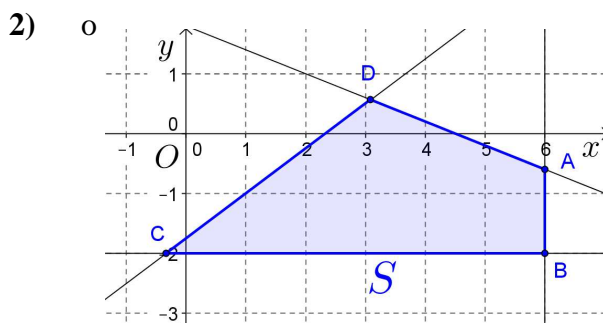
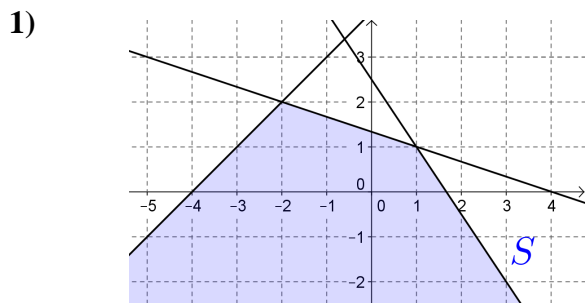
Déterminez le nombre de meubles à commander chez chacun des deux fournisseurs pour que la dépense soit minimale. Quelle est cette dépense minimale ?

SOLUTIONS

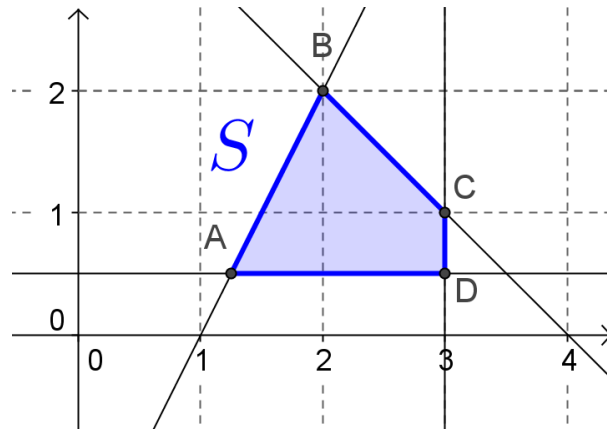
Exercice 1

- 1) $A \notin a$ car $-3+4 \neq -5$ et $A \in b$ car $-4-6+10=0$
- 2) a) $(AB) \equiv y = -\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$, $(BC) \equiv x = 5$, $(CD) \equiv y = \frac{1}{2}$
- b) $d_1 \equiv y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$
- c) $d_2 \equiv y = 2$
- d) $d_3 \equiv y = -\frac{3}{4}x + \frac{17}{4}$
- e) $d_4 \equiv x = -7$
- 3) a) $I\left(-2; \frac{1}{2}\right)$
- b) $J(5; -10)$
- c) $K\left(-\frac{35}{17}; \frac{10}{17}\right)$

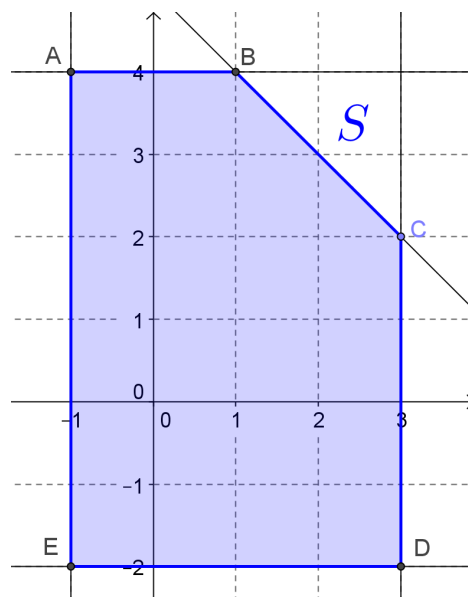
Exercice 2



3)



4)



Exercice 3

1)
$$\begin{cases} x+3y \leq 17 \\ 2x-y \leq 13 \\ 3x+2y \geq 16 \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 4y-x \leq 19 \\ 3x-2y \leq 17 \\ 5x+8y \geq 17 \\ x+2y \leq 11 \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} 3x-4y \geq 8 \\ x+y \leq 7 \\ 3x+y \geq 11 \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} -3 \leq x \leq 6 \\ 1 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

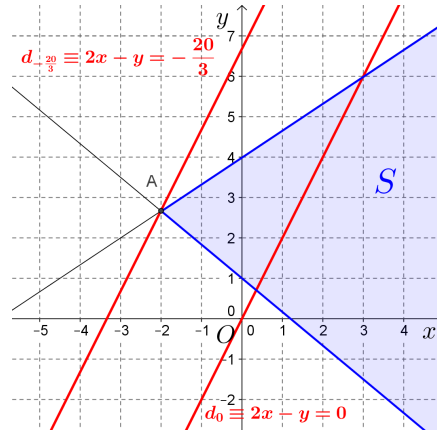
5)
$$\begin{cases} 4y-x < 18 \\ x-y > -5 \\ x+3y > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases}$$

6)
$$\begin{cases} -x+2y \leq 3 \\ x \geq -1 \\ y \geq -1 \\ x+y \leq 3 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} y < 5 \\ x > -5 \\ 3x + 7y > -7 \\ -3x + 2y > -12 \end{cases} \quad E(-5;5); F\left(-5; \frac{8}{7}\right); G\left(\frac{70}{27}; -\frac{19}{9}\right); H\left(\frac{22}{3}; 5\right);$$

Exercice 4

$A\left(-2; \frac{8}{3}\right)$ et la fonction f atteint le maximum $-\frac{20}{3}$ pour $x = -2$ et $y = \frac{8}{3}$.



Exercice 5

- 1) f admet le minimum 6 pour $x = 1$ et $y = 3$
 f admet le maximum 22 pour $x = 7$ et $y = 1$
- 2) g admet le minimum 1 pour $x = 3$ et $y = -1$
 g admet le maximum 29 pour $x = 2$ et $y = 5$
- 3) h admet le minimum -6 pour $x = 7$ et $y = 1$
 h admet le maximum 3 pour $x = 2$ et $y = 5$

Exercice 6

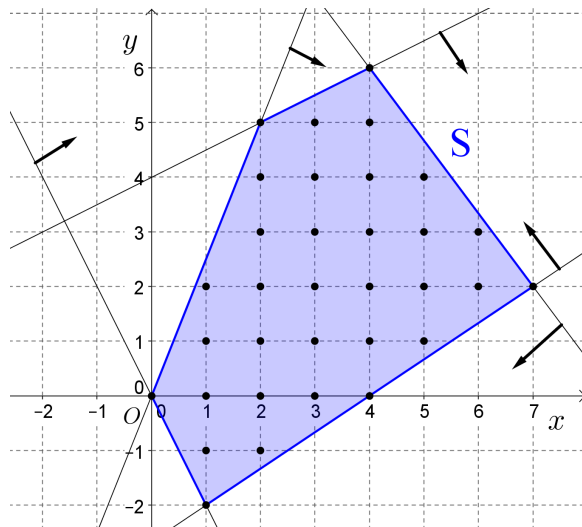
1) $(AB) \equiv y = -\frac{1}{4}x + \frac{29}{4}$, $(BC) \equiv y = \frac{3}{2}x - \frac{17}{2}$, $(AC) \equiv y = -2x + 9$

2)
$$\begin{cases} x + 4y \leq 29 \\ 3x - 2y \leq 17 \\ 2x + y \geq 9 \end{cases}$$

- 3) Pour $x = 9$ et $y = 5$ f atteint le maximum de 37.
 Pour $x = 5$ et $y = -1$ f atteint le minimum de 13.

Exercice 7

1)



2) On compte 33 solutions dont les deux coordonnées sont entières.

3) a) f admet le minimum -7 pour $x = 1$ et $y = -2$

f admet le maximum 14 pour $x = 4$ et $y = 6$

b) g admet le minimum -33 pour $x = 7$ et $y = 2$

g admet le maximum 0 pour $x = 0$ et $y = 0$

c) h admet le minimum -8 pour $x = 1$ et $y = -2$

pour $x = 4$ et $y = 0$

pour $x = 7$ et $y = 2$

h admet le maximum 11 pour $x = 2$ et $y = 5$

d) k admet le minimum -31 pour $x = 7$ et $y = 2$

k admet le maximum 0 pour $x = 0$ et $y = 0$

pour $x = 2$ et $y = 5$

Exercice 8

José obtient un revenu maximal de 240 € pour 2 gardes chez les Dupont et 12 gardes chez les Durand.

Exercice 9

Il doit produire 1,5 L de chaque parfum pour obtenir le bénéfice maximal de 600 €.

Exercice 10

1) La recette maximale, 252€, est obtenue avec 3 ourset 8 lapins.

2) La recette maximale, 216€, est obtenue avec 7 ourset 3 lapins.

Exercice 11

Il faut produire 5 robes du premier modèle et 10 du deuxième modèle pour un bénéfice maximal de 1950 €.

Exercice 12

Coût minimal : 340000 € avec 30 bateaux de type A et 10 de type B ce qui permet de transporter 360 véhicules et 400 t de matériel.

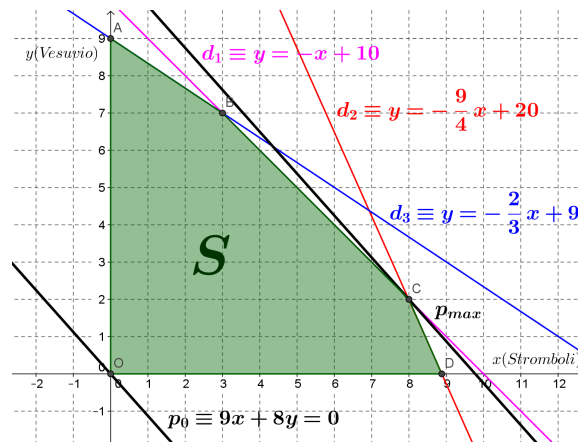
Exercice 13

Dépense minimale : 4560 € pour 8 lots de type A et 4 lots de type B, c'est-à-dire 100 rosiers, 40 magnolias et 80 camélias.

Exercice 14

Dépense minimale : 4000 € pour 4 lots de type A et 2 lots de type B.

Exercice 15



1) Il peut produire au plus 8 Stromboli ou 9 Vesuvio...

2) Il obtient le revenu maximal de 88 € s'il vend 8 Stromboli et 2 Vesuvio.

Exercice 16

En achetant 12 meubles de type A et 14 meubles de type B on obtient la dépense minimale de 13200 €.