

CHAPITRE 4

FONCTIONS EXPONENTIELLES ET

LOGARITHMES

Exercice 1

Calculez sans calculatrice :

1) $\log_3 \sqrt{3}$

2) $\log_2 \frac{1}{16}$

3) $\log_7 343$

4) $\log_3 \frac{1}{3}$

5) $\log_{\frac{1}{3}} 3$

6) $\log \frac{1}{1000000}$

7) $\log_5 125$

8) $\log_7 (24 + 5^2)$

9) $\log \sqrt{0,00001}$

10) $\log_5 (3^2 + 4^2)$

11) $\log_{\frac{1}{2}} 8$

12) $\log_{\frac{1}{2}} 0,5^7$

13) $10^{\log 8,7}$

14) $6^{\log_6 13}$

15) $\log \frac{1}{8^2 + 6^2}$

16) $\log \frac{100}{\sqrt{0,001}}$

- 17) $\frac{\log_2 16}{\log 0,0001}$
 18) $\log 5 + \log 2$
 19) $\log 700 - \log 7$
 20) $\log(8 + \log 100)$

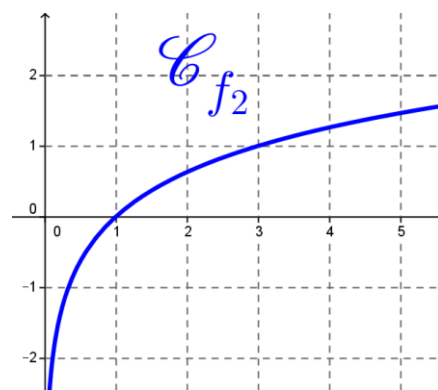
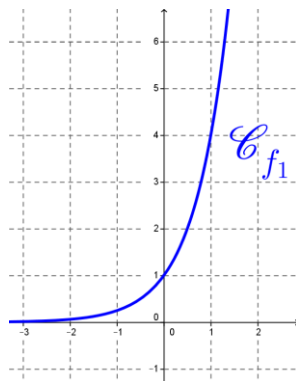
Exercice 2

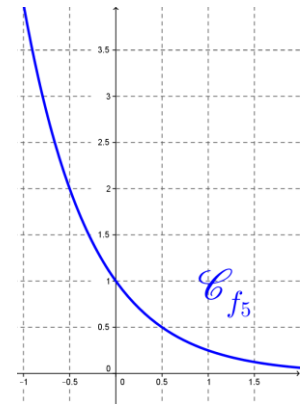
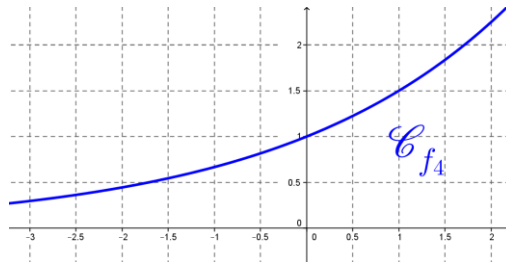
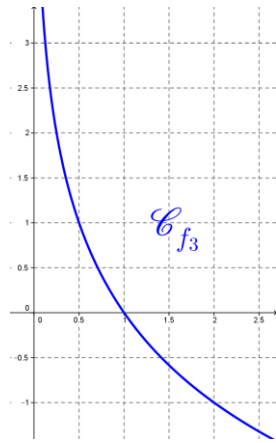
Soient a et b les deux réels strictement positifs tel que $\log a = 2,5$ et $\log b = -3,5$.

- 1) Calculez sans calculatrice :
- $\log a^5$
 - $\log \frac{\sqrt{a}}{b}$
 - $\log(a^2 b^3)$
 - $\log \sqrt{\frac{a}{b}}$
 - $\log \frac{a^{10}}{b^4}$
- 2) Expliquez pourquoi on ne peut pas calculer $\log(a+b)$ sans calculatrice. Montrez comment on peut trouver une valeur approchée de ce nombre (par exemple au centième près) en se servant d'une calculatrice.

Exercice 3

Les graphiques suivants représentent des fonctions logarithmes ou des fonctions exponentielles. Trouvez l'expression analytique de chacune de ces fonctions en justifiant votre réponse.





Exercice 4

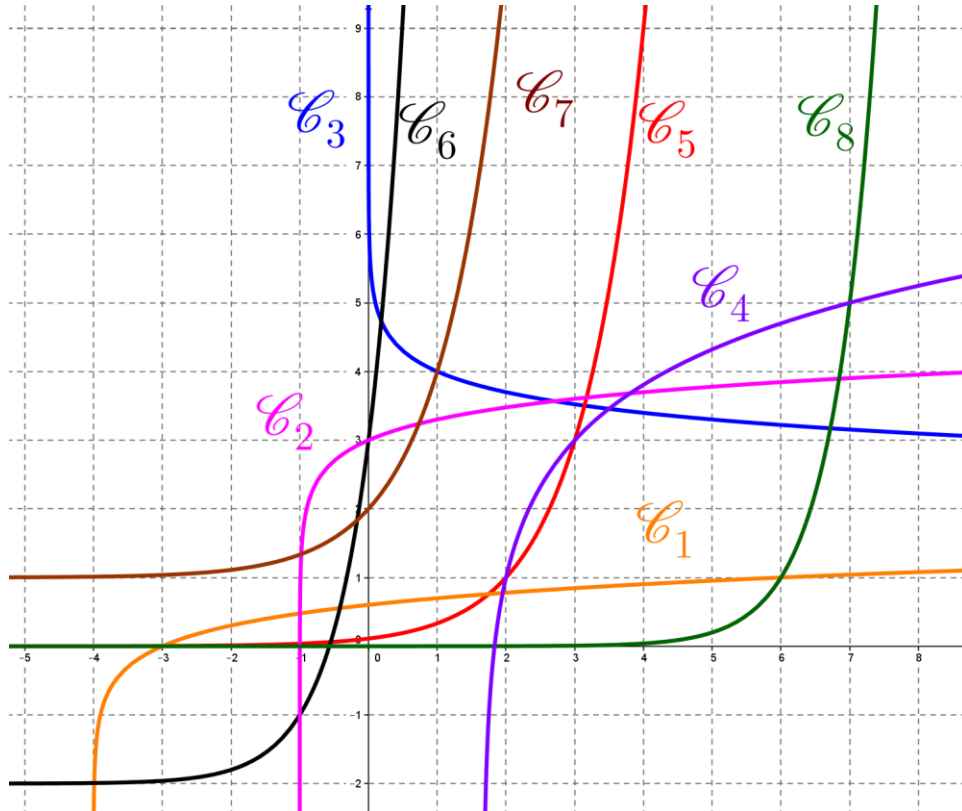
Pour chacune des quatre fonctions ci-dessous, trouvez la courbe qui lui correspond parmi les huit courbes du graphique :

$$f(x) = 4 - \log x$$

$$g(x) = 3^{x-2}$$

$$h(x) = \log(x+4)$$

$$k(x) = 5^{x+1} - 2$$



Exercice 5

Résolvez les équations suivantes (solutions exactes et solutions approchées au centième près).

1) $4^x = 2$

2) $\log_2 x = -6$

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$

4) $\log_2(3x+5) = 5$

5) $5^{x+3} = \sqrt{5}$

6) $\log_4(3x+1) = 3$

7) $4 \cdot 7^{2x} = 5$

8) $5 \log(x-2) + 7 = 16 + 2 \log(x-2)$

9) $\log(5-4x) = \log(3x-2)$

10) $3 \cdot 7^{8-3x} + 4 = 1 - 10 \cdot 7^{8-3x}$

11) $11 - \log(x+5) = 14$

12) $\log_5(2x+11) - \log_5(7-5x) = 0$

13) $\frac{7}{8^{1-x}} = 112$

14) $3 \cdot 2^{5x-1} - 7 = 11 \cdot 2^{5x-1} - 23$

15) $\log(12x-8) = 2$

16) $\log_9[3(x-2)] = 0,5$

17) $\log 5 + \log(x+3) = 2$

18) $\log(5^{3-x} - 4) = 0$

19) $11^{5-\log x} = 1$

20) $2(3^x - 14) - 11 \cdot 3^x = 2 - 5(6 + 3^x)$

SOLUTIONS

Exercice 1 (corrigé complet)

1) $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2} \log_3 3 = \frac{1}{2}$

2) $\log_2 \frac{1}{16} = -\log_2 16 = -\log_2 2^4 = -4 \log_2 2 = -4$

3) $\log_7 343 = \log_7 7^3 = 3 \log_7 7 = 3$

4) $\log_3 \frac{1}{3} = -\log_3 3 = -1$

5) $\log_{\frac{1}{3}} 3 = -\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = -1$

6) $\log \frac{1}{1000000} = -\log 10^6 = -6 \log 10 = -6$

7) $\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3 \log_5 5 = 3$

8) $\log_7 (24 + 5^2) = \log_7 (24 + 25) = \log_7 49 = \log_7 7^2 = 2 \log_7 7 = 2$

9) $\log \sqrt{0,00001} = \frac{1}{2} \log 10^{-5} = \frac{1}{2} (-5) \log 10 = -\frac{5}{2}$

10) $\log_5 (3^2 + 4^2) = \log_5 (9 + 16) = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2 \log_5 5 = 2$

11) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_{\frac{1}{2}} 2^3 = 3 \log_{\frac{1}{2}} 2 = -3 \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = -3$

12) $\log_{\frac{1}{2}} 0,5^7 = 7 \log_{\frac{1}{2}} 0,5 = 7 \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 7$

13) $10^{\log 8,7} = 8,7$

14) $6^{\log_6 13} = 13$

15) $\log \frac{1}{8^2 + 6^2} = \log \frac{1}{64 + 36} = \log \frac{1}{100} = -\log 10^2 = -2 \log 10 = -2$

16) $\log \frac{100}{\sqrt{0,001}} = \log 100 - \log \sqrt{0,001} = \log 10^2 - \frac{1}{2} \log 10^{-3} = 2 \log 10 + \frac{3}{2} \log 10 = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$

- 17) $\frac{\log_2 16}{\log 0,0001} = \frac{\log_2 2^4}{\log 10^{-4}} = \frac{4 \log_2 2}{-4 \log 10} = \frac{4}{-4} = -1$
- 18) $\log 5 + \log 2 = \log(5 \cdot 2) = \log 10 = 1$
- 19) $\log 700 - \log 7 = \log \frac{700}{7} = \log 100 = \log 10^2 = 2 \log 10 = 2$
- 20) $\log(8 + \log 100) = \log(8 + \log 10^2) = \log(8 + 2) = \log 10 = 1$

Exercice 2

- 1) $\log a^5 = 12,5 \quad \log \frac{\sqrt{a}}{b} = 4,75 \quad \log(a^2 b^3) = -5,5 \quad \log \sqrt{\frac{a}{b}} = 3 \quad \log \frac{a^{10}}{b^4} = 39$
- 2) Il n'existe pas de formule qui permet d'exprimer $\log(a+b)$ en fonction de $\log a$ et de $\log b$ donc on ne peut pas calculer $\log(a+b)$ sans calculatrice.

Calculatrice : $\log a = 2,5 \Leftrightarrow a = 10^{2,5}$ et $\log b = -3,5 \Leftrightarrow b = 10^{-3,5}$

$$\text{donc } \log(a+b) = \log(10^{2,5} + 10^{-3,5}) \simeq 2,50$$

Exercice 3

- 1) La courbe de f_1 admet (Ox) comme A.H. donc f_1 est une fonction exponentielle et comme $f_1(1) = 4$ on a $f_1(x) = 4^x$.
- 2) La courbe de f_2 admet (Oy) comme A.V. donc f_2 est une fonction logarithme et comme $f_2(3) = 1$ on a $f_2(x) = \log_3 x$.
- 3) La courbe de f_3 admet (Oy) comme A.V. donc f_3 est une fonction logarithme et comme $f_3(0,5) = 1$ on a $f_3(x) = \log_{0,5} x = \log_{\frac{1}{2}} x$.
- 4) La courbe de f_4 admet (Ox) comme A.H. donc f_4 est une fonction exponentielle et comme $f_4(1) = 1,5$ on a $f_4(x) = 1,5^x$.
- 5) La courbe de f_5 admet (Ox) comme A.H. donc f_5 est une fonction exponentielle et comme $f_5(1) = 0,25 = \frac{1}{4}$ on a $f_5(x) = 0,25^x = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

Exercice 4 (corrigé complet)

Les courbes 1 à 4 ont des A.V. donc elles ne peuvent pas représenter des fonctions exponentielles, alors que les courbes 5 à 8 ont des A.H. donc elles ne peuvent pas représenter une fonctions logarithmes. Par conséquent les courbes de f et h ne peuvent être que parmi les courbes 1 à 4 et les courbes de g et k ne peuvent être que parmi les courbes 5 à 8. De plus :

$$f(1) = 4 - \log 1 = 4 \text{ donc } \mathcal{C}_f = \mathcal{C}_3$$

$$g(2) = 3^0 = 1 \text{ donc } \mathcal{C}_g = \mathcal{C}_5$$

$$h(-3) = \log 1 = 0 \text{ donc } \mathcal{C}_h = \mathcal{C}_1$$

$$k(-1) = 5^0 - 2 = -1 \text{ donc } \mathcal{C}_k = \mathcal{C}_6$$

Exercice 5

1) $S = \{0,5\}$

2) $S = \left\{ \frac{1}{64} \right\} = \{0,015625\}$

3) $S = \{-4\}$

4) $S = \{9\}$

5) $S = \{-2,5\}$

6) $S = \{21\}$

7) $S = \left\{ \frac{\log \frac{5}{4}}{2 \log 7} \right\}$ avec $\frac{\log \frac{5}{4}}{2 \log 7} \approx 0,06$

8) $S = \{1002\}$

9) $S = \{1\}$

10) $S = \emptyset$

11) $S = \{-4,999\}$

12) $S = \left\{ -\frac{4}{7} \right\}$

13) $S = \left\{ \frac{7}{3} \right\}$

14) $S = \left\{ \frac{2}{5} \right\}$

15) $S = \{9\}$

16) $S = \{3\}$

17) $S = \{17\}$

18) $S = \{2\}$

19) $S = \{100000\}$

20) $S = \emptyset$