CALCUL DES PROBABILITES

Exemple 1

On lance une pièce de monnaie une fois.
Ensemble des événements élémentaires: E = $\{$pile, face$\}$. La chance pour obtenir pile vaut 50 %, pour obtenir face vaut aussi 50 %.
Les événements élémentaires sont **équiprobables**. On note p(pile) = 0,5 et p(face) = 0,5.

Exemple 2

On lance un dé une fois.
Ensemble des événements élémentaires: E = $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Un élément de E est appelé **variable aléatoire:** X = 1 ou 2 ou ... ou 6.
Un sous-ensemble de E est appelé **événement** de E. Par exemple, obtenir un nombre pair est l' événement qu' on note A = $\{2; 4; 6\}$.
Obtenir 7 est un événement impossible noté $\varnothing$.

Règle de Laplace

Si tous les **événements élémentaires** de E sont **équiprobables**, alors la probabilité d'un événement A $\subset$ E est donnée par la formule:

$$\boxed{\text{p(A)} = \frac{\text{nombres de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}}$$

Exemple 3

On lance un dé deux fois. Calcule la probabilité d'obtenir la somme 5.

Réponse:

E = $\{$(1;1); (1;2); (1;3); (1;4); (1;5); (1;6); (2;1); (2;2) ...$\}$; card E = 36, donc 36 cas possibles.
Evénement A = $\{$(1; 4); (4;1); (2;3); (3;2)$\}$ $\subset$ E; cardA = 4, donc 4 cas favorables.

$$\text{p(A)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Règle 1

Probabilité de l'événement sûr :	$p(E) = 1$
Probabilité de l'événement impossible:	$p(\varnothing) = 0$
Probabilité d'un événement A:	$p(A) \in [0; 1]$

Règle 2

Si A et B sont des événements **disjoints** ($A \cap B = \varnothing$), alors

$$p(A \text{ ou } B) = p(A) + p(B).$$

Exemple 4

On lance une pièce de monnaie deux fois. Calcule la probabilité d'obtenir au moins une fois pile; jamais pile.

Réponse:
$E = \{pp; pf; fp; ff\}$
événement "au moins une fois pile": $A = \{pp; pf; fp\}$
événement "jamais pile": $B = \{ff\}$

$$p(A) = \frac{3}{4} \quad ; \quad p(B) = \frac{1}{4}$$

A et B sont des **événements complémentaires**: $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = E$.

Règle 3

Si A et B sont des **événements complémentaires** c.-à-d. $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = E$, alors $p(A) = 1 - p(B)$.

Exemple 5

On lance un dé une fois. Calcule la probabilité d'obtenir un nombre ≤ 2 ou un nombre pair.

Réponse:

E = $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; A = $\{1; 2\}$; B = $\{2; 4; 6\}$; $A \cup B = \{1; 2; 4; 6\}$

$$p(\text{A ou B}) = p(A \cup B) = \frac{4}{6} \neq p(A) + p(B)$$

ici $\quad p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Règle 4

Si A et B sont des événements non disjoints c.-à-d. $A \cap B \neq \emptyset$, alors p(A ou B) = p(A) + p(B) – p(A et B).

Evénements indépendants:
On lance un dé une première fois et on réalise l'événement A. Ensuite, on lance le dé une deuxième fois et on obtient l'événement B. Les deux événements sont indépendants: p(B) n'est pas influencée par l'événement A.

Evénements dépendants:
On tire une carte **sans la remettre**: événement A. Ensuite, on tire une deuxième carte: événement B. Les événements A et B ne sont plus indépendants! Pour le deuxième tirage, le lot a changé. La probabilité p(B) dépend de l'événement A: **probabilité conditionnelle.**

Règle 5

Si A et B sont des événements **indépendants**, p (A et B) = p(A) · p(B).

Règle 6 **probabilité conditionnelle**

Si A et B sont **dépendants**, p (A et B) = p(A) · p(B / A) où p(B / A) est la probabilité de B sous la condition que l' événement A s'est produit.

Exemple 6

On a 10 cartes numérotées 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. On tire deux cartes et **on remet** chaque fois **la carte dans le paquet**. Calcule la probabilité
a) d'obtenir 5 et 6 dans cet ordre;
b) d'obtenir 5 et 6 si l'ordre ne joue pas de rôle
c) d'obtenir exactement une fois 6;
d) d'obtenir au moins une fois 6.

Méthode générale

On définit l'événement dont on veut calculer la probabilité. Ensuite, on applique les règles 1) à 6) pour décomposer l'événement en événements élémentaires dont on calcule les probabilités à l'aide de la formule de Laplace.

Pour cet exemple

a) Evénement : (5 et 6)
On remet les cartes ⇒ **événements indépendants**

$$\begin{aligned} \text{p}(5 \text{ et } 6) &= \text{p}(5)\cdot\text{p}(6) \quad ; \qquad \text{règle}5 \\ &= \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{100} \end{aligned}$$

b) Evénement : ((5 et 6) ou (6 et 5))

$$\begin{aligned} \text{p}((5 \text{ et } 6)\text{ou}(6 \text{ et } 5)) &= \text{p}(5 \text{ et } 6) + \text{p}(6 \text{ et } 5) \quad ; \qquad \text{règle } 2 \\ &= \text{p}(5)\cdot\text{p}(6) + \text{p}(6)\cdot\text{p}(5) \\ &= 2\cdot\text{p}(5)\cdot\text{p}(6) \\ &= 2\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{50} \end{aligned}$$

c) Evénement: ((c; 6) ou (6; c)) avec c ≠ 6 (c pour carte); **pour simplifier la notation nous écrivons (c; 6) au lieu de (c et 6).**

$$\begin{aligned}
\text{p}\big((\text{c et }6)\text{ou}(6\text{ et c})\big) &= \text{p}(\text{c};\,6)+\text{p}(6;\,\text{c}) && ;\quad \text{règle } 2\\
&= 2\cdot\text{p}(\text{c})\cdot\text{p}(6) && ;\quad \text{les événements } (\text{c};\,6) \text{ et } (6;\,\text{c}) \text{ sont équiprobables}\\
&= 2\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10}\\
&= \frac{9}{50}
\end{aligned}$$

d) Evénement ((c;6) ou (6;c) ou (6; 6)) avec c $\neq$ 6.

$$\begin{aligned}
\text{p}\big((\text{c};6)\text{ou}(6;\text{c})\text{ou}(6;6)\big) &= \text{p}(\text{c})\cdot\text{p}(6)+\text{p}(6)\cdot\text{p}(\text{c})+\text{p}(6)\cdot\text{p}(6)\\
&= 2\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\\
&= \frac{19}{100}
\end{aligned}$$

On obtient la même probabilité d'une façon plus simple en appliquant la règle 3 (**événement complémentaire**):

$$\begin{aligned}
\text{p(au moins 1 fois 6)} &= \text{p(jamais 6)}\\
&= 1 - \text{p(c; c)} \qquad \text{avec c} \neq 6\\
&= 1 - \text{p(c) p(c)}\\
&= 1-\frac{9}{10}\cdot\frac{9}{10}\\
&= \frac{19}{100}
\end{aligned}$$

Exemple 7

On a 10 cartes numérotées 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. On tire deux cartes **sans les remettre** dans le paquet. Calcule la probabilité
a) d'obtenir 5 et 6 dans cet ordre;
b) d'obtenir 5 et 6 si l'ordre ne joue pas de rôle
c) d'obtenir exactement une fois 6;
d) d'obtenir au moins une fois 6.

Réponse

On ne remet pas les cartes ⇒ **probabilité conditionnelle**.

a)

$$p(5 \text{ et } 6) = p(5)\cdot p(6/5) \quad \text{règle } 6$$
$$= \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{90}$$

b)

$$p((5\,;6)\text{ou}(6\,;5)) = p(5;6) + p(6;5)$$
$$= 2\cdot p(5)\cdot p(6/5) \quad ; \quad \text{les événements } (5;6) \text{ et } (6;5) \text{ sont équiprobables}$$
$$= 2\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9}$$
$$= \frac{1}{45}$$

c)

$$p((c\,;6)\text{ou}(6\,;c)) = p(c;6) + p(6;c) \quad ; \quad c \neq 6$$
$$= 2\cdot p(c)\cdot p(6/c) \quad ; \quad \text{les événements } (c;6) \text{ et } (6;c) \text{ sont équiprobables}$$
$$= 2\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{9}$$
$$= \frac{1}{5}$$

d)

$$p((c;6)\text{ou}(6;c)\text{ou}(6;6)) = p(c)\cdot p(6/c) + p(6)\cdot p(c/6) + p(6)\cdot p(6/6)$$
$$= 2\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1}{10}\cdot\frac{0}{10}$$
$$= \frac{1}{5}$$

ou bien en calculant la probabilité de l'événement complémentaire:

p (au moins 1 fois 6) = 1 – p (jamais 6)

=1 – p(c; c) =1–p(c)p(c/c) où $c \neq 6$

$$= 1 - \frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}$$
$$= \frac{1}{5}$$

Exemple 8

On lance un dé trois fois. Calcule la probabilité d'obtenir
a) **au moins** une fois 4;
b) **exactement** une fois 4.
c) Combien de fois faut-il lancer le dé pour que la probabilité d'obtenir 4 soit au moins 0,9?

Réponse

a) On calcule avec **l'événement complémentaire**:
p(au moins une fois 4) = 1 - p(jamais 4)
= 1 - p(pas de 4 et pas de 4 et pas de 4)
= 1 - p(pas de 4)· p(pas de 4)· p(pas de 4)

$$= 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$$

$$= \frac{91}{216} \approx 0{,}4213$$

Calcul direct:
p(au moins une fois 4) = p((4,x,x) ou (x,4,x) ou (x,x,4) ou (4,4,x) ou (4,x,4) ou (x,4,4) ou (4,4,4)) ; **x≠4**

=3·p(4,x,x) + 3·p(4,4,x) + p(4,4,4)

$$= 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{91}{216} \approx 0{,}4213$$

b)
p(exactement une fois 4) = p((4,x,x) ou (x,4,x) ou (x,x,4))
=3·p(4,x,x) ; **événements équiprobables**

$$= 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$$

$$= \frac{25}{72} \approx 0{,}3472$$

c) On doit lancer le dé n fois
p(au moins une fois 4) = 1 - p(jamais 4)

= 1 - p(pas de 4)·p(pas de 4)·... **n fois**)

$$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

équation:

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0{,}9$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n = 1 - 0{,}9$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n = 0{,}1$$

$$n = \frac{\log(0{,}1)}{\log\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 13$$

Méthode pour compter des événements équiprobables

Considérons une urne avec 6 boules rouges et 4 boules vertes. On tire 5 boules sans les remettre dans l'urne (probabilité conditionnelle). On veut calculer la probabilité d'obtenir 3 boules rouges et 2 boules vertes.

Evénement : A = { (r,r,r,v,v) ou (v,r,r,r,v) ou ... }
Il faut trouver le nombre de ces événements partiels (r,r,r,v,v) ... qui sont équiprobables.

On calcule le nombre de permutations des 5 boules. Ensuite, on biffe les permutations des 3 boules rouges (indistinguables entre elles) et des 2 boules vertes:

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

Ainsi
p(A) = 10 p(r,r,r,v,v)

= 10 p(r) p(r /r) p(r /r,r) p(v /r,r,r) p(v /r,r,r,v)

$$= 10 \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6}$$

$$= \frac{10}{27} \approx 0{,}4762$$

EXERCICES

1. a) On lance un dé cinq fois. Calcule la probabilité pour obtenir au moins une fois 6.
   b) Combien de fois faut-il lancer le dé pour que la probabilité d'obtenir 6 soit au moins 0,9 ?

2. On a dans une urne trois boules rouges et deux boules vertes. On tire deux boules sans les remettre. Calcule la probabilité
   a) d'obtenir 2 boules vertes;
   b) d'obtenir 2 boules rouges;
   c) d'obtenir 1 verte et 1 rouge.

3. Une urne contient 3 boules rouges, 4 boules vertes et 7 boules blanches.
   a) On tire une boule. Quelle est la probabilité de tirer une boule verte? de tirer une boule qui n'est pas verte?
   b) On tire trois boules (sans les remettre). Quelle est la probabilité de tirer 2 boules blanches et 1 boule verte?
   c) On tire simultanément cinq boules. Calcule la probabilité de tirer exactement 3 boules blanches; de tirer au moins 3 boules blanches.

4. Al est un joueur de cartes professionnel. D'un jeu de 52 cartes, il doit tirer deux cartes et il a besoin de deux trèfles. Onze cartes se trouvent déjà sur la table et sont découvertes. Parmi ces cartes il voit trois trèfles. Calcule la probabilité pour Al de tirer deux trèfles.

5. On tire avec plusieurs fusils sur une cible. La probabilité d'atteindre la cible vaut pour chaque fusil 0,25. Avec combien de fusils doit-on tirer, pour que la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois, soit égale à 0.95?

6. On tire trois cartes (sans les remettre) dans un jeu de 36 cartes. Calcule la probabilité de tirer au moins deux rois ou deux dames.

7. On tire 5 cartes (sans les remettre) dans un jeu de 52 cartes. Calcule la probabilité de tirer
   a) 4 as
   b) 2 rois et 3 dames.

8. Une classe est formée de 30 élèves. Quelle est la probabilité pour qu' au moins deux élèves aient leur anniversaire le même jour de l'année?

9. On lance deux dés une fois. Calcule la probabilité d'obtenir la somme 12. Combien de fois faut-il lancer une paire de dés pour que la probabilité d'obtenir au moins un fois la somme 12 soit 0,5 ?

10. On mélange 49 boules numérotées 1, 2, ..., 49. On tire 6 boules (sans remise).
    a) Calcule la probabilité de tirer les boules 1, 2, 3, 4, 5, 6.
    b) Calcule la probabilité de tirer les boules 1, 2, 3, 4.

11. Dans une urne on a 4 boules rouges, 5 boules noires et 6 boules vertes. On tire 6 boules (sans remise). Calcule la probabilité de tirer
    a) les 6 boules vertes;
    b) 3 boules rouges et 3 boules noires;
    c) 2 boules de chaque couleur;
    d) pas de boule verte;
    e) au moins une boule rouge.

12. Slim est un joueur de cartes redoutable, car il a étudié le calcul des probabilités. Pour le jeu suivant on utilise 3 cartes, dont une avec une croix. Slim gagne, s'il tire la carte avec la croix:
    Il tire d'abord une carte sans la regarder. Une autre personne regarde les deux cartes restantes et écarte une carte sans croix. Ensuite, Slim peut garder la carte qu'il a déjà tirée ou bien il peut prendre la carte qui reste. Pour quelle stratégie va-t-il se décider? Justifie ta réponse en calculant les probabilités de tirer la carte avec croix dans les deux cas.

    Même problème, si on joue avec 5 cartes dont deux ont une croix.

13. Le poker est un jeu de cartes d'origine américaine. Chaque joueur obtient cinq cartes. Les combinaisons de jeu sont les suivantes:

1 pair	une paire: 2 cartes de même valeur
2 pairs	deux paires
three of a kind	un brelan: 3 cartes de même valeur
straight	une séquence: 5 cartes qui se suivent
flush	un floche: 5 cartes de même couleur (nom)
full house	un plein: brelan + paire
poker	un carré: 4 cartes de même valeur
straight flush	une quinte floche: 5 cartes de même couleur qui se suivent
royal flush	une quinte floche royale: une quinte floche qui commence avec un as.

    Calcule la probabilité de chaque combinaison de cartes.

14. Dans une boîte se trouvent 5 boules numérotées 1, 2, 3, 4, 5. On tire 3 boules sans les remettre. Calcule la probabilité
    a) de tirer le numéro 1;
    b) de tirer les numéros 1 et 2;
    c) de tirer les numéros 1, 2 et 3.

15. Dans une boîte se trouvent 5 boules rouges numérotées de 1 à 5 et 3 boules vertes numérotées 1, 2, 3. On tire simultanément 3 boules. Calcule la probabilité de tirer
    a) exactement 1 boule verte
    b) 3 boules vertes
    c) 1 boule rouge et 2 boules vertes.
    d) les numéros 1, 2, 3.

16. Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire 4 fois une boule et on la remet chaque fois dans l'urne. Calcule la probabilité de tirer
    a) 4 numéros différents
    b) au moins deux fois le même numéro.

17. On tire 6 cartes dans un jeu de 52 cartes. Calcule la probabilité de tirer
    a) exactement deux rois;
    b) au moins deux rois;
    c) exactement deux rois et deux dames;
    d) au moins deux rois et deux dames.

REPONSES

1. a) p(au moins 1 fois 6) = 1 - p(jamais 6)

$$=1 - p(x; x; x; x; x) \qquad \text{où} \quad x \neq 6$$

$$=1 - p(x)\, p(x)\, p(x)\, p(x)\, p(x)$$

$$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{4651}{7776} \approx 0{,}5981$$

b) On sait que p(au moins 1 fois 6)=0,9

$$0{,}9 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n = 0{,}1$$

$$n = \frac{\log(0{,}1)}{\log\left(\frac{5}{6}\right)} = 13$$

2. a) p(v; v) = p(v)·p(v/v)

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} = 0{,}1$$

b) p(r; r) = p(r) p(r/r)

$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = 0{,}3$$

c) p[(v; r) ou (r; v)] =p(v; r) + p(r; v) [2 événements équiprobables]

= p(v) p(r/v) + p(r) p(v/r)

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

3. a)

$$\text{p(v)} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \approx 0{,}2857$$

$$\text{p}(x \neq v) = \frac{10}{14} = \frac{5}{7} = 1 - \text{p(v)} \approx 0{,}7143$$

b)

p[(b;b;v) ou (v;b;b) ou (b;v;b)] 3 événements équiprobables

$$= 3\cdot \text{p(b;b;v)}$$

$$= 3\cdot \text{p(b)}\cdot\text{p(b / b)}\cdot\text{p(v / b;b)}$$

$$= 3\cdot\frac{7}{14}\cdot\frac{6}{13}\cdot\frac{4}{12}$$

$$= \frac{3}{13} \approx 0{,}2308$$

c)

p [(b;b;b;x;x) ou (b;x;b;x;b) ou ...] ; $x \neq b$

$$\frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{3\cdot2\cdot2} = 10 \text{ évén. équiprobables}$$

$$= 10\cdot\text{p(b;b;b;x;x)}$$

$$= 10\cdot\text{p(b)}\cdot\text{p(b / b)}\cdot\text{p(b / b;b)}\cdot\text{p(x / b;b;b)}\cdot\text{p(x / b;b;b;x)}$$

$$= 10\cdot\frac{7}{14}\cdot\frac{6}{13}\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10} \approx 0{,}3671$$

p(au moins 3 b)

= p (3 b ou 4 b ou 5 b)

= p (3 b) + p (4 b) + p (5 b)

$$= \frac{105}{286} + \text{p [(b;b;b;b;x) + (b;x;b,b;b) + ...] + p (b;b;b;b;b)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{105}{286} + 5 \cdot \text{p}(b;b;b;b;x) + \text{p}(b;b;b;b;b) \\
&= \frac{105}{286} + 5 \cdot \text{p}(b) \cdot \text{p}(b/b) \cdot \text{p}(b/b;b) \cdot \text{p}(b/b;b;b) \cdot \text{p}(x/b;b;b;b) + \\
&\qquad \text{p}(b) \cdot \text{p}(b/b) \cdot \text{p}(b/b;b) \cdot \text{p}(b/b;b;b) \cdot \text{p}(b/b;b;b;b) \\
&= \frac{105}{286} + 5 \cdot \frac{7}{14} \cdot \frac{6}{13} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10} + \frac{7}{14} \cdot \frac{6}{13} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

4.

$$\text{p}(t;t) = \text{p}(t) \cdot \text{p}(t/t) = \frac{10}{41} \cdot \frac{9}{40} = \frac{9}{164} \approx 0{,}0549$$

5. p(atteindre la cible au moins 1 fois) = 1- p(ne pas atteindre la cible avec n fusils)

$$
\begin{aligned}
0{,}95 &= 1 - 0{,}75^n \\
0{,}75^n &= 0{,}05 \\
n &= \frac{\log(0{,}05)}{\log(0{,}75)} \\
n &= 11
\end{aligned}
$$

6.

$$
\begin{aligned}
&\text{p}[(r;r;x) \text{ ou } \ldots \text{ ou } (r;r;r) \text{ ou } (d;d;x) \text{ ou } \ldots \text{ ou } (d;d;d)] \\
&= 3 \cdot \text{p}(r;r;x) + \text{p}(r;r;r) + 3 \cdot \text{p}(d;d;x) + \text{p}(d;d;d) \\
&= 2 \cdot [3 \cdot \text{p}(r) \cdot \text{p}(r/r) \cdot \text{p}(x/r;r) + \text{p}(r) \cdot \text{p}(r/r) \cdot \text{p}(r/r;r;)] \\
&= 6 \cdot \frac{4}{36} \cdot \frac{3}{35} \cdot \frac{32}{34} + 2 \cdot \frac{4}{36} \cdot \frac{3}{35} \cdot \frac{2}{34} = \frac{14}{255} \approx 0.0549
\end{aligned}
$$

Autre méthode:

p(au moins 2 cartes de même nom) = 1 – p(pas de 2 cartes de même nom)
9· p(au moins 2 rois) = 1 – p(x_1; $x_2 \neq x_1$; $x_3 \neq x_1$ et x_2)
9· p(au moins 2 rois) =1 – p(x_1) p(x_2 / x_1) p(x_3 / x_1; x_2)

$$\text{p(au moins 2 r ou 2 d)} = \frac{2}{9}\left(1 - \frac{36}{36} \cdot \frac{32}{35} \cdot \frac{28}{34}\right) = \frac{14}{255}$$

7. a) p [(as; as; as; as; x) ou ...] $x \neq$ as ; 5 événements équiprobables
= 5 p(as) p(as/as) p(as/as;as) p(as/as;as;as) p(x/ as;as;as;as)

$$= 5 \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} \cdot \frac{1}{49} \cdot \frac{48}{48} \approx 0{,}00001847$$

b) p [(r;r;d;d;d) ou (r;d;r;d;d) ou ...]

$$\frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 2} = 10 \text{ év. équipr.}$$

= 10 p(r) p(r/r) p(d/r;r) p(d/r;r;d) p(d/r;r;d;d)

$$= 10 \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{4}{50} \cdot \frac{3}{49} \cdot \frac{2}{48} \approx 0{,}000009234$$

8. Calculons d'abord l'événement complémentaire:
p' (chaque élève a son anniversaire un autre jour de l'année)

$$p' = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \cdots \cdot \frac{336}{365}$$
$$= \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right)\left(1 - \frac{3}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{29}{365}\right)$$

Calcul rapide de ce produit:
On calcule d'abord le logarithme de p' et on utilise l'approximation $\ln(1+x) \approx x$ pour x assez proche de 0:

$$\ln(p') = \ln\left(1 - \frac{1}{365}\right) + \ln\left(1 - \frac{2}{365}\right) + \cdots + \ln\left(1 - \frac{29}{365}\right)$$
$$\approx -\left(\frac{1 + 2 + \cdots + 29}{365}\right)$$
$$= -\frac{29 \cdot 30}{2 \cdot 365}$$

$$p' = e^{-\frac{29 \cdot 30}{2 \cdot 365}}$$

$$p = 1 - e^{-\frac{29 \cdot 30}{2 \cdot 365}} \approx 0{,}70$$

9.

$$p(S = 12) = p(6;6) = p(6)\cdot p(6) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$p(S \neq 12) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$$

$$p(\text{au moins n fois } S = 12) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$$

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n = 0{,}5$$

$$n = \frac{\log(0{,}5)}{\log\left(\frac{35}{36}\right)} \approx 25$$

10.

a) p[(1;2;3;4;5;6) ou (2;1;3;4;5;6) ou ...]
6!=720 événements équiprobables
= 720 p(1;2;3;4;5;6)
=720 p(1) p(2 / 1) p(3 / 1;2) p(4 / 1;2;3) p(5 / 1;2;3;4) p(6 / 1;2;3;4;5)

$$= 720\cdot\frac{1}{49}\cdot\frac{1}{48}\cdot\frac{1}{47}\cdot\frac{1}{46}\cdot\frac{1}{45}\cdot\frac{1}{44} \approx 0{,}000\,000\,072$$

b) p[(1;2;3;4;x;x) ou (x;x;1;2;3;4) ou ...]
6! / 2! = 360 évén. équipr.
=360 p(1) p(2 / 1) p(3 / 1;2) p(4 / 1;2;3) p(x / 1;2;3;4) p(x / 1;2;3;4;x)

$$= 360\cdot\frac{1}{49}\cdot\frac{1}{48}\cdot\frac{1}{47}\cdot\frac{1}{46}\cdot\frac{45}{45}\cdot\frac{44}{44} \approx 0{,}0000708$$

11.

a) p(v;v;v;v;v;v)
= p(v) p(v / v) p(v / v;v) p(v / v;v;v) p(v / v;v;v;v) p(v / v;v;v;v;v)

$$= \frac{6}{15}\cdot\frac{5}{14}\cdot\frac{4}{13}\cdot\frac{3}{12}\cdot\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{10} \approx 0{,}0001998$$

b) p[(r;r;r;n;n;n) ou (r;n;r;n;r;n) ou ...]
6! / (3! 3!) = 20 évén. équipr.
= 20 p (r;r;r;n;n;n)
= 20 p(r) p(r / r) p(r / r;r) p(n / r;r;r) p(n / r;r;r;n) p(n / r;r;r;n;n)

$$= 20\cdot\frac{4}{15}\cdot\frac{3}{14}\cdot\frac{2}{13}\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10} \approx 0{,}007992$$

c) p[(r; r; n; n; v; v) ou ...]
6! / (2! 2! 2!) = 90 évén. équipr.
= 90 p (r; r; n; n; v; v)
= 90 p(r) p(r / r) p(n / r;r) p(n / r;r;n) p(v / r;r;n;n) p(v / r;r;n;n;v)

$$= 90 \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{14} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \approx 0{,}17982$$

d) p(x;x;x;x;x;x) où $x \neq$ verte

$$= \frac{9}{15} \cdot \frac{8}{14} \cdot \frac{7}{13} \cdot \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} \approx 0{,}01678$$

e) p (au moins une rouge) = 1 - p(x;x;x;x;x;x) où $x \neq$ rouge

$$= 1 - \frac{11}{15} \cdot \frac{10}{14} \cdot \frac{9}{13} \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} \approx 0{,}90769$$

12. Stratégie 1: Slim garde la 1^{ière} carte
p(croix) = 1/3

Stratégie 2: Slim se décide pour la 2^{ième} carte;
le gain est l'événement (pas de croix; croix).

p(pas de croix; croix)
= p(pas de croix) p(croix/ pas de croix)

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} \quad \text{(évén. sûr)}$$

$$= \frac{2}{3}$$

13. 52 cartes
13 cartes de même couleur
4 cartes de même valeur
l'as peut être considéré comme carte avec la plus grande valeur et comme carte avec la plus petite valeur:
as, roi, dame, valet, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, as.

- p(royal flush)
=p[(a, r, d, v, 10) ou (r, a, d, v, 10) ou ...]
5¨! = 120 évén. équipr.
=120 p (a, r, d, v, 10)
=120 p(a) p(r / a) p(d / a, r) p(v / a, r, d) p(10 / a, r, d, v)

$$= 120 \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{1}{51} \cdot \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{49} \cdot \frac{1}{48} \approx 0{,}0000015$$

- p(straight flush) = 10 p(royal flush) = 0,000015

- p(poker) = 13 p[(a, a, a, a, c) ou (a, c, a, a, a) ou ...] (13 valeurs)
  5! / 4! = 5 évén. équipr.
  = 13 · 5 p(a, a, a, a, c)
  = 65 p(a) p(a /a) p(a / a, a) p(a / a, a, a) p(c / a, a, a, a)
  $$= 65 \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} \cdot \frac{1}{49} \cdot \frac{48}{48} \approx 0.000240$$
- p (full house)
  exemple : (a, a, a, v, v) 13 · 12 = 156 possibilités

  p (full house) = 156 p[(a, a, a, v, v) ou (v, v, a, a, a) ou ...]
  5! / (3! 2!) = 10 évén. équipr.
  = 1560 p(a) p(a / a) p(a / a, a) p(v / a, a, a) p(v / a, a, a, v)
  $$= 1560 \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} \cdot \frac{4}{49} \cdot \frac{3}{48} \approx 0.001441$$

- p (straight)
  exemple: (r; d; v; 10; 9) 10 possibilités (voir straight flush)

  p (straight) = 10 p[(r; d; v; 10; 9) ou (d; r; v; 10; 9) ou ...]
  5! = 120 évén. équipr.
  = 1200 p(r) p(d / r) p(v / r; d) p(10 / r; d; v) p(9 / r; d; v; 10)
  $$= 1200 \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51} \cdot \frac{4}{50} \cdot \frac{4}{49} \cdot \frac{4}{48} \approx 0.003940$$

- p (three of a kind)
  exemple: (a; a; a; x; x) 13 kinds ; x cartes ≠ a

  p (three of a kind) = 13 p[(a; a; a; x; x) ou (a; x; a; x; a) ou ...]
  5! / (3! 2!) = 10 évén. équipr.
  = 130 p(a) p(a / a) p(a / a;a) p(x / a;a;a) p(x / a;a;a;x)
  $$= 130 \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} \cdot \frac{48}{49} \cdot \frac{44}{48} \approx 0.021128$$
  (les deux cartes x n'ont pas la même valeur)

- p (two pair)
  exemple : (a; a; r; r; x) (13·12) / 2 = 78 possibilités
  p(two pair) = 78 p[(a; a; r; r; x) ou (a; r; a; r; x) ou ...]
  5! / (2! 2!) = 30 évén. équipr.
  = 2340 p(a) p(a / a) p(r / a;a) p(r / a;a;r) p(x / a;a;r;r)
  $$= 2340 \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{4}{50} \cdot \frac{3}{49} \cdot \frac{44}{48} \approx 0.047539$$

- p (1 pair)
  exemple : (a; a; x; x; x) les cartes x ont des valeurs différentes; 13 poss.
  p (1 pair) = 13 p[(a; a; x; x; x) ou (a; x; a; x; x) ou ...]
  5! / (2! 3!) = 10 évén. équipr.
  = 130 p(a) p(a / a) p(x / a;a) p(x / a;a;x) p(x / a;a;x;x)

$$= 130 \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{48}{50} \cdot \frac{44}{49} \cdot \frac{40}{48} \approx 0.422569$$

Résumé:

p(1 pair)	0,422569
p(2 pair)	0,047539
p(3 of a kind)	0,021128
p(straight)	0,003940
p(full house)	0,001441
p(poker)	0,000240
p(straight flush)	0,000015
p(royal flush)	0,0000015

14. a) p[(1; x; x) ou (x; 1; x) ou (x; x; 1)]
= 3 p(1; x; x)
= 3 p(1) p(x / 1) p(x / 1; x)

$$= 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{3} = 0{,}6$$

b) p[(1; 2; x) ou (1; x; 2) ou ...]
3! = 6 évén. équipr.
= 6 p(1; 2; x)
=6 p(1) p(2 / 1) p(x / 1;2)

$$= 6 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} = 0{,}3$$

c) p[(1; 2; 3) ou (2; 1; 3) ou ...]
3! = 6 évén. équipr.
=6 p(1P p(2 / 1) p(3 / 1;2)

$$= 6 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = 0{,}1$$

15. a) p[(v; x; x) ou (x; v; x) ou (x; x; v)]
=3 p(v; x; x)
= 3 p(v) p(x / /) p(x / v; x)

$$= 3 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} \approx 0{,}5357$$

b) p(v; v; v) = p(v) p(v / v) p(v / v; v)

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \approx 0{,}01786$$

c) p[(r; v; v) ou (v; r; v) ou (v; v; r)]
=3 p(r) p(v / r) p(v / r; v)

$$= 3 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \approx 0{,}2679$$

d) p[(1; 2; 3) ou (2; 1; 3) ou ...] 3! = 6 évén. équipr.
= 6 p(1) p(2 / 1) p(3 / 1; 2)

$$= 6 \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{6} \approx 0{,}1429$$

16. a) p(a; b; c; d)
= p(a) p(b / a) p(c / a; b) p(d / a; b; c)

$$= \frac{10}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{10} = 0{,}504$$

b) p(au moins 2 fois le même numéro) = 1 - p(4 numéros différents)
= 1 - 0,504
= 0,496

17. a) p[(r; r; x; x; x; x) ou ...] 6! / (2! 4!) = 15 évén. équipr.
= 15 p(r) p(r / r) p(x / r; r) p(x / r; r; x) p(x / r; r; x; x) p(x / r; r; x; x; x)

$$= 15 \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{48}{50} \cdot \frac{47}{49} \cdot \frac{46}{48} \cdot \frac{45}{47} \approx 0{,}057346$$

b) p(au moins 2 rois) = 1 - p(pas 2 rois)
= 1 - p[(r; x; x; x; x; x) ou ...] - p(x; x; x; x; x; x)

$$= 1 - 6 \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{48}{51} \cdot \frac{47}{50} \cdot \frac{46}{49} \cdot \frac{45}{48} \cdot \frac{44}{47} - \frac{48}{52} \cdot \frac{47}{51} \cdot \frac{46}{50} \cdot \frac{45}{49} \cdot \frac{44}{48} \cdot \frac{43}{47} \approx 0{,}0608$$

c) p[(r; r; d; d; x; x) ou ...] 6! / (2! 2! 2!) = 90 évén. équipr.
= 90 p(r) p(r / r) p(d / r;r) p(d / r; r; d) p(x / r; r; d; d) p(x / r; r; d; d; x)

$$= 90 \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{4}{50} \cdot \frac{3}{49} \cdot \frac{44}{48} \cdot \frac{43}{47} \approx 0{,}00167$$

d) p (au moins 2 rois et 2 dames) = 6! / (2! 2! 2!) p(r; r; d; d; x) +
2· 6! / (2! 3!) p(r; r; r; d; d; x) + 2· 6! / (2! 4!) p(r; r; r; r; d; d) +
6! / (3! 3!) p(r; r; r; d; d; d)

$$= 90 \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{4}{50} \cdot \frac{3}{49} \cdot \frac{44}{48} \cdot \frac{43}{47} + 120 \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} \cdot \frac{4}{49} \cdot \frac{3}{48} \cdot \frac{44}{47}$$

$$+ 60 \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} \cdot \frac{1}{49} \cdot \frac{4}{48} \cdot \frac{3}{47} + 20 \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} \cdot \frac{4}{49} \cdot \frac{3}{48} \cdot \frac{2}{47} \approx 0{,}0017785$$