

Corrigé des exercices supplémentaires du chapitre 3

Exercice 1

Pour simplifier, toutes les fonctions seront appelées f .

$$(1) \quad f : x \mapsto \frac{x}{2} + 1 + \frac{\ln x}{x}$$

$$a) \quad \text{dom } f = \mathbb{R}_+^*$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0}{2} + 1 + \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Donc \mathcal{G}_f admet l'A.V : $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(\frac{x}{2} + 1 \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{(H) \, x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

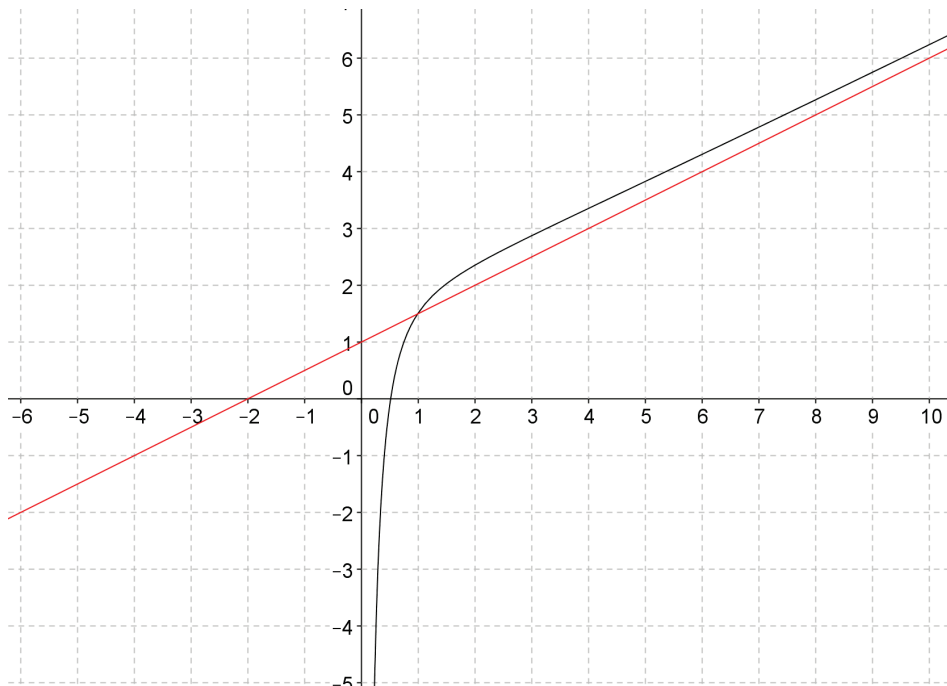
Donc \mathcal{G}_f admet l'A.O.D. $\Delta : y = \frac{x}{2} + 1$

c) La position de \mathcal{G}_f par rapport à son A.O. est déterminée par le signe de :

$$\delta(x) = f(x) - \frac{x}{2} - 1 = \frac{\ln x}{x}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\delta(x)$	-	0	+
Position de \mathcal{G}_f p.r. Δ	Δ / \mathcal{G}_f	P.Int.	\mathcal{G}_f / Δ

Le point d'intersection est P.Int. : $\left(1, \frac{3}{2}\right)$



$$(2) \quad f : x \mapsto x + \ln \frac{ex}{x+1}$$

$$a) \quad \text{dom } f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[.$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 + 1 + \ln 0^+ = -\infty \Rightarrow \text{A.V. : } x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -1 + \ln(+\infty) = -\infty \Rightarrow \text{A.V. : } x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln \frac{ex}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln \frac{e}{1 + \frac{1}{x}} = \ln e = 1, \text{ donc il est clair que :}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\ln \frac{ex}{x+1} - 1 \right) = 0$$

Donc \mathcal{G}_f admet l'A.O. $\Delta : y = x + 1$

c) La position de \mathcal{G}_f par rapport à Δ est déterminée par le signe de :

$$\delta(x) = f(x) - x - 1 = \ln \frac{ex}{x+1} - 1$$

$$\delta(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln \frac{ex}{x+1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{ex}{x+1} \geq e$$

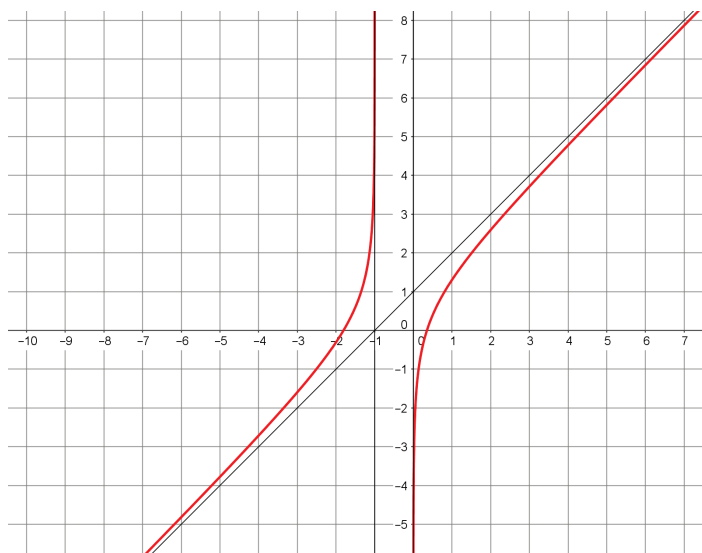
$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x - x - 1}{x+1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow x+1 < 0$$

$$\Leftrightarrow x < -1$$

x	$-\infty$	-1	//	0	$+\infty$
$\delta(x)$	+	//	//	//	-
Position de \mathcal{G}_f p.r. Δ	\mathcal{G}_f / Δ	//	//	//	Δ / \mathcal{G}_f

Il n'y a pas de point d'intersection.



$$(3) \quad f : x \mapsto 2x - 3 + \ln \frac{2x+1}{x+2}$$

$$a) \quad \text{dom } f =]-\infty, -2[\cup]-\frac{1}{2}, +\infty[.$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) = -1 - 3 + \ln \frac{0^+}{\frac{3}{2}} = -\infty \Rightarrow \text{A.V.} :$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -4 - 3 + \ln \left(\frac{-3}{0^-} \right) = -7 + \ln(+\infty) = +\infty \Rightarrow \text{A.V.} : x = -2$$

$$\text{Comme } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln \frac{2x+1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln \frac{2}{1} = \ln 2, \text{ il est clair que :}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[f(x) - (2x - 3 + \ln 2) \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\ln \frac{2x+1}{x+2} - \ln 2 \right) = 0$$

Donc \mathcal{G}_f admet l'A.O. $\Delta : y = 2x - 3 + \ln 2$.

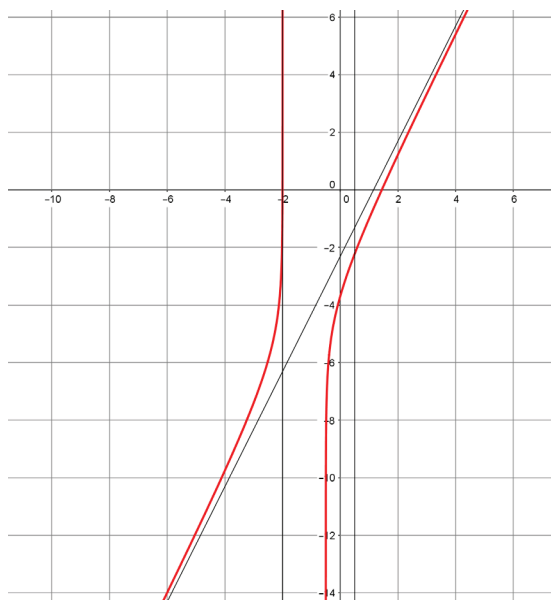
c) La position de \mathcal{G}_f par rapport à Δ est déterminée par le signe de :

$$\delta(x) = f(x) - (2x - 3 + \ln 2) = \ln \frac{2x+1}{x+2} - \ln 2$$

$$\begin{aligned} \delta(x) \geq 0 &\Leftrightarrow \ln \frac{2x+1}{x+2} \geq \ln 2 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x+2} \geq 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x+1-2x-4}{x+2} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-3}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow x+2 < 0 \Leftrightarrow x < -2 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-2	$//$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$\delta(x)$	$+$	$//$	$//$	$//$	$-$
Position de \mathcal{G}_f p.r. Δ	\mathcal{G}_f / Δ	$//$	$//$	$//$	Δ / \mathcal{G}_f

Il n'y a pas de point d'intersection.



(4) $f : x \mapsto 3x + 5 - e^{-x}$

a) $\text{dom } f = \mathbb{R}$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (3x + 5)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

Donc \mathcal{G}_f admet l'A.O.D $\Delta : y = 3x + 5$.

On en déduit en particulier que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que \mathcal{G}_f n'admet pas d'A.H.D.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{3x}_{\rightarrow -\infty} + 5 - \underbrace{e^{-x}}_{\rightarrow +\infty} = -\infty$, donc pas d'A.H.G.

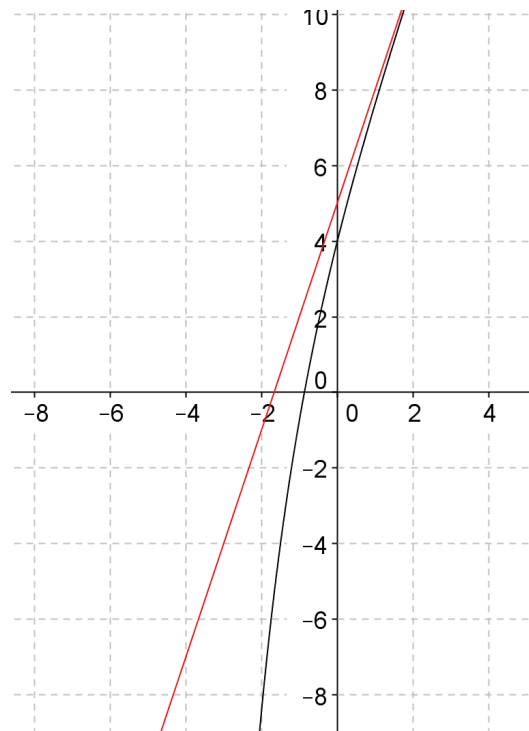
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \frac{5}{x} - \frac{e^{-x}}{x} = 3 + 0 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x} \stackrel{''\infty''}{\infty}}{x} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^{-x} = -\infty$

Donc pas d'A.O.G. mais une B.P. de direction asymptotique (Oy) .

c) La position de \mathcal{G}_f par rapport à Δ est déterminée par le signe de :

$$\delta(x) = f(x) - (3x + 5) = -e^{-x} < 0$$

Donc \mathcal{G}_f est toujours situé en-dessous de l'A.O.D. Δ .



$$(5) \quad f : x \mapsto 2x + 1 + \frac{2e^x}{e^x + 3}$$

a) $\text{dom } f = \mathbb{R}$.

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{e^x(1 + 3e^{-x})} = 2$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 3)] = 0$, c.-à-d. \mathcal{G}_f admet l'A.O.D $\Delta : y = 2x + 3$.

On en déduit en particulier que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que \mathcal{G}_f n'admet pas d'A.H.D.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x}{e^x + 3} = 0, \text{ c.-à-d. } \mathcal{G}_f \text{ admet l'A.O.G } \Delta' : y = 2x + 1.$$

On en déduit en particulier que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et que \mathcal{G}_f n'admet pas d'A.H.G.

c) La position de \mathcal{G}_f par rapport à Δ est déterminé par le signe de :

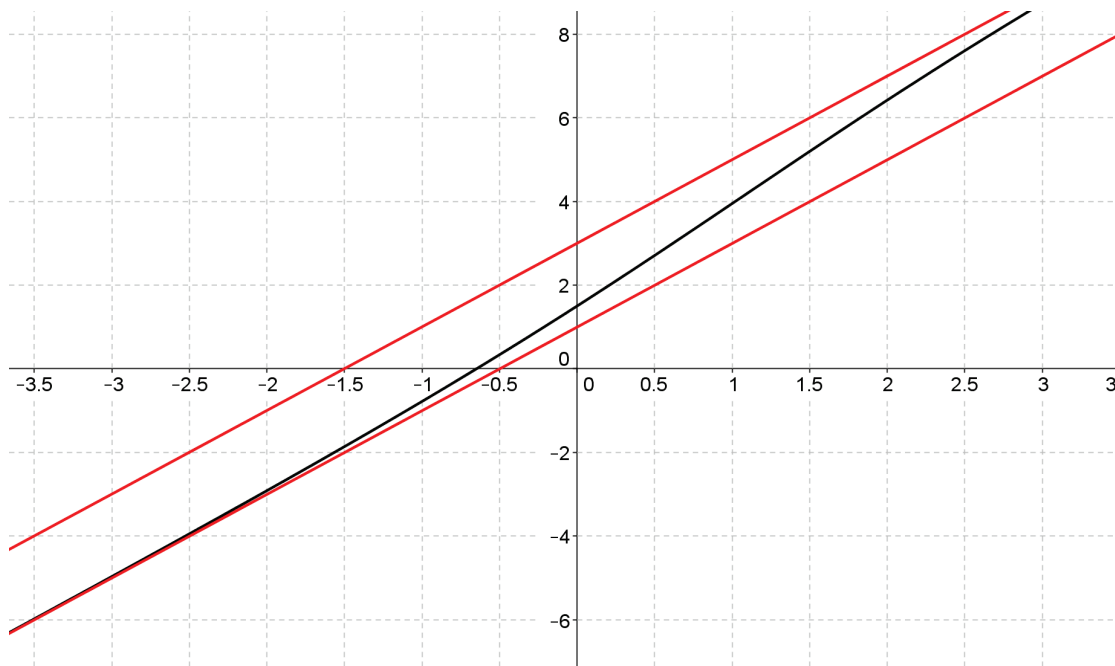
$$\delta_1(x) = f(x) - (2x + 3) = \frac{2e^x}{e^x + 3} - 2 = \frac{2e^x - 2e^x - 6}{e^x + 3} = -\frac{6}{e^x + 3} < 0$$

Donc \mathcal{G}_f est toujours situé en-dessous de l'A.O.D. Δ .

La position de \mathcal{G}_f par rapport à Δ' est déterminé par le signe de :

$$\delta_2(x) = f(x) - (2x + 1) = \frac{2e^x}{e^x + 3} > 0$$

Donc \mathcal{G}_f est toujours situé au-dessus de l'A.O.G. Δ' .



(6) $f : x \mapsto x + 1 - xe^x$

a) $\text{dom } f = \mathbb{R}$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$

Donc : \mathcal{G}_f admet l'A.O.G $\Delta : y = x + 1$.

On en déduit en particulier que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que \mathcal{G}_f n'admet pas d'A.H.D.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - e^x) + 1 = -\infty$, donc pas d'A.H. en $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - e^x\right) + \frac{1}{x} = -\infty$, donc pas d'A.O.D. mais une B.P. de direction asymptotique (Oy) en $+\infty$.

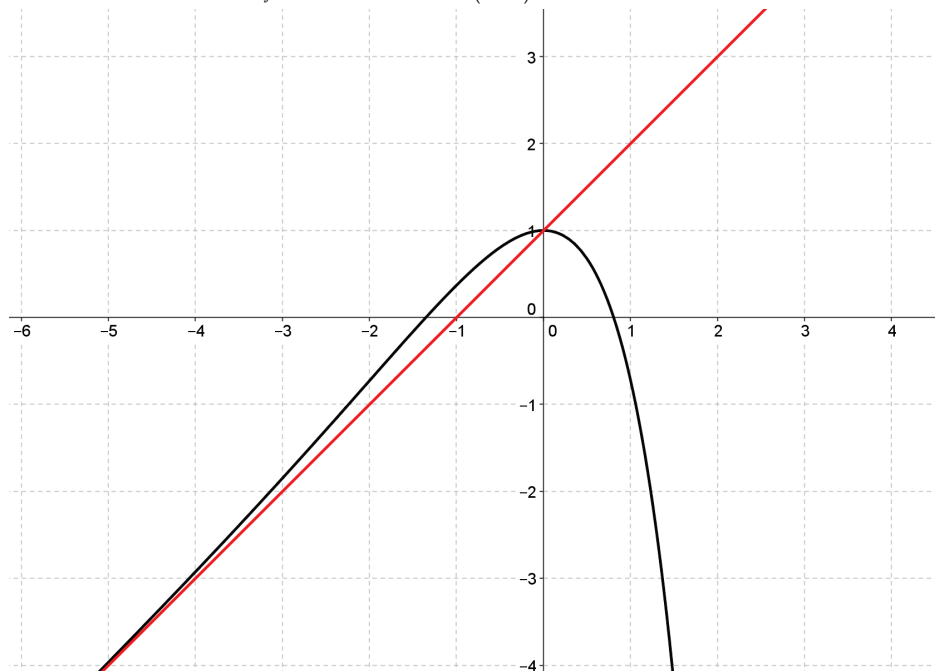
c) La position de \mathcal{G}_f par rapport à Δ est déterminé par le signe de :

$$\delta(x) = f(x) - (x + 1) = -xe^x \begin{cases} < 0 & \text{si } x > 0 \\ = 0 & \text{si } x = 0 \\ > 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Donc \mathcal{G}_f est toujours situé

- en-dessous de Δ sur \mathbb{R}_+
- au-dessus de Δ sur \mathbb{R}_- .

Le point d'intersection de \mathcal{G}_f et de Δ est $(0, 1)$



$$(7) \quad f : x \mapsto \frac{e^x - 2}{e^x + 1}$$

a) $\text{dom } f = \mathbb{R}$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{-2}{1} = -2$, donc \mathcal{G}_f admet l'A.H.G. $\Delta : y = -2$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2e^{-x}}{1 + e^{-x}} = 1, \text{ donc } \mathcal{G}_f \text{ admet l'A.H.D. } \Delta' : y = 1.$$

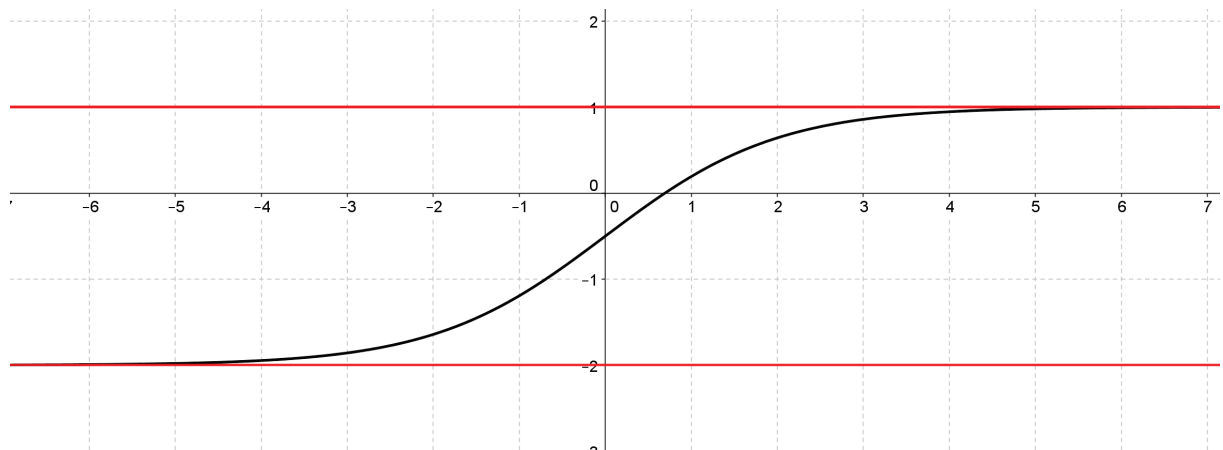
Or :

$$f(x) - (-2) = \frac{e^x - 2}{e^x + 1} + \frac{2e^x + 2}{e^x + 1} = \frac{3e^x}{e^x + 1} > 0,$$

donc \mathcal{G}_f est située au-dessus de Δ , sur \mathbb{R} .

$$f(x) - 1 = \frac{e^x - 2}{e^x + 1} - \frac{e^x + 1}{e^x + 1} = \frac{-3}{e^x + 1} < 0,$$

donc \mathcal{G}_f est située en-dessous de Δ' , sur \mathbb{R} .



$$(8) \quad f : x \mapsto \ln(e^x + 1)$$

a) $\text{dom } f = \mathbb{R}$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln 1 = 0$, donc \mathcal{G}_f admet l'A.H.G. $\Delta : y = 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, donc \mathcal{G}_f n'admet pas d'A.H.D.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x(1 + e^{-x}))}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x) + \ln(1 + e^{-x})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln(1 + e^{-x})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} + \overbrace{\frac{\ln(1 + e^{-x})}{x}}^{\rightarrow 0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln(1 + e^{-x}) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0$$

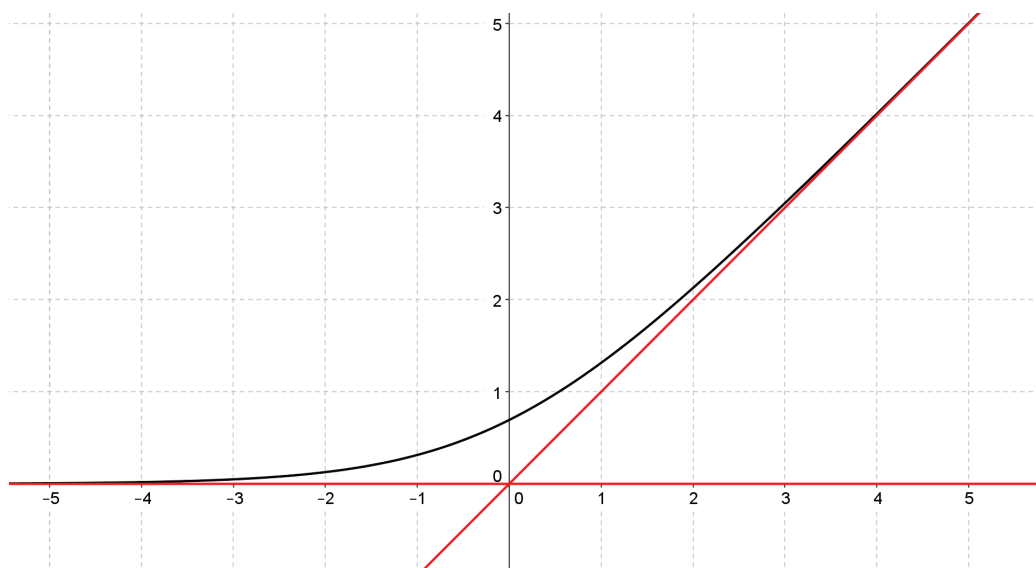
Donc \mathcal{G}_f admet l'A.O.G. $\Delta' : y = x$.

$$c) f(x) - 0 = \ln(1 + e^x) > 0, \text{ car } 1 + e^x > 1.$$

Donc \mathcal{G}_f est toujours située au-dessus de Δ .

$$f(x) - x = \ln(1 + e^{-x}) > 0, \text{ car } 1 + e^{-x} > 1.$$

Donc \mathcal{G}_f est toujours située au-dessus de Δ' .



Exercice 2

A

$$(1) \quad \text{dom } g = \mathbb{R}_+^*$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 1 + 2 \ln x = "+\infty - 1 + \infty" = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 - 1 + 2 \ln x = "0 - 1 - \infty" = -\infty$$

$$(3) \quad \text{dom } g' = \mathbb{R}_+^*$$

$$g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x} > 0$$

Donc g est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

(4) $g(1) = 1 - 1 + 2 = 0$, donc en tenant compte du sens de variation de g , on a le tableau du signe suivant :

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	$\begin{smallmatrix} \\ \end{smallmatrix}$	0	+

B

(1) $\text{dom } f = \mathbb{R}_+^*$.

(2) + (5) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 - \frac{\ln x}{x^2} = +\infty$, donc pas d'A.H.D

Calcul à part : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} \stackrel{''\infty''}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{-1}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln x}{x^2} = 0$

Donc : \mathcal{G}_f admet l'A.O.D. Δ : $y = x - 1$.

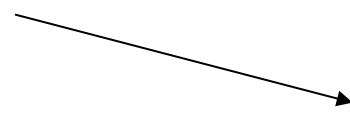

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x - 1 - \frac{\ln x}{x^2} = "0 - 1 - \frac{-\infty}{0^+}" = +\infty$

Donc : \mathcal{G}_f admet l'A.V. : $x = 0$

(3) $\text{dom } f' = \mathbb{R}_+^*$

$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \ln x}{x^4} = 1 - \frac{x(1 - 2 \ln x)}{x^4} = \frac{x^3 - 1 + 2 \ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$

(4) Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$\begin{smallmatrix} \\ \end{smallmatrix}$ $-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ 	0 (m)	 $+\infty$

(6) La position de \mathcal{G}_f par rapport à Δ est déterminée par le signe de :



$\delta(x) = f(x) - (x - 1) = -\frac{\ln x}{x^2}$

x	0	1	$+\infty$
$\delta(x)$	$\begin{smallmatrix} \\ \end{smallmatrix}$ $+$	0	$-$
Position de \mathcal{G}_f p.r. à Δ	$\begin{smallmatrix} \\ \end{smallmatrix}$ \mathcal{G}_f / Δ	P.I.	Δ / \mathcal{G}_f

Le point d'intersection est : $(1, 0)$

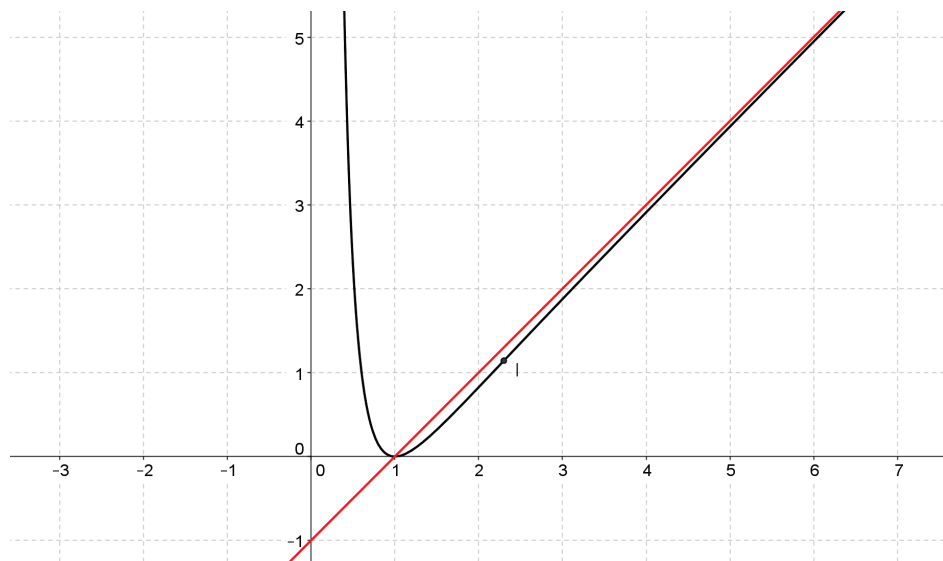
(7) $\text{dom } f'' = \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{g'(x)x^3 - g(x) \cdot 3x^2}{x^6} \\ &= \frac{x \cdot g'(x) - 3g(x)}{x^4} \\ &= \frac{3x^3 + 2 - 3(x^3 - 1 + 2 \ln x)}{x^4} \\ &= \frac{5 - 6 \ln x}{x^4} \end{aligned}$$

x	0	$e^{\frac{5}{6}}$	$+\infty$
$f''(x)$	 + 	0	—
\mathcal{G}_f	 	I	

Le point d'inflexion est $I\left(e^{\frac{5}{6}}; f\left(e^{\frac{5}{6}}\right)\right)$ avec $f\left(e^{\frac{5}{6}}\right) \simeq 1,14$

(8) Tableau de variation : cf. (4) et (7)



Exercice 3

A

$$(1) \quad \text{dom } g = \mathbb{R}_+^*$$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln x - 2) + 3 = "+\infty \cdot +\infty + 3" = +\infty$ (pas d'A.H.D.)

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x - 2x + 3 = 3 \neq g(0), \text{ donc point creux en } (0, 3).$$

$$\text{En effet : } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} \stackrel{(\text{H})}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

- (3) $\text{dom } g' = \mathbb{R}_+^*$ et :

$$g'(x) = \ln x + x \frac{1}{x} - 2 = \ln x - 1$$

x	0	e	$+\infty$
$g'(x)$	$\begin{smallmatrix} \\ \end{smallmatrix}$	0	+
$g(x)$	$\begin{smallmatrix} \\ \end{smallmatrix} 3$	$3 - e$ (m)	$+\infty$

- (4) $g(e) = 3 - e > 0$, donc g est une fonction strictement positive sur son domaine.

B

- (1) $\text{dom } f = \mathbb{R}_+^*$

- (2) En $+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 \ln x - 5x^2 + 12x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (2 \ln x - 5) + 12x && \text{donc pas d'A.H.D.} \\ &= "+\infty \cdot (+\infty) + \infty" = +\infty \end{aligned}$$

En 0 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} 2x^2 \ln x - 5x^2 + \underbrace{12x}_{\rightarrow 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln x - 5}{x^{-2}} && \text{donc trou en (0,0)} \\ &\stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^{-1}}{-2x^{-3}} \\ &\stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \end{aligned}$$

- (3) $\text{dom } f' = \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x \ln x + 2x^2 \cdot \frac{1}{x} - 10x + 12 \\ &= 4x \ln x + 2x - 10x + 12 \\ &= 4(x \ln x - 2x + 3) = 4g(x) \end{aligned}$$

- (4) Comme g est strictement positive sur son domaine, on en déduit que $f'(x) > 0$, donc que f est strictement croissante.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\begin{smallmatrix} \\ \end{smallmatrix}$	+
$f(x)$	$\begin{smallmatrix} \\ \end{smallmatrix} 0$	$+\infty$

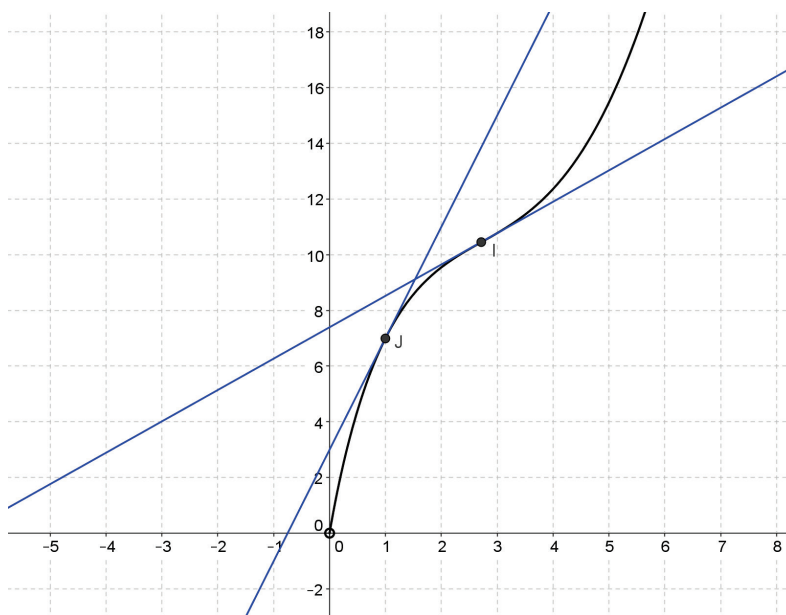
- (5) $\text{dom } f'' = \mathbb{R}_+^*$
 $f''(x) = 4g'(x)$, s'annule **et change de signe** en $x = e$ (cf. tableau de variation de g), donc le point d'abscisse e est un point d'inflexion du graphe de f : $I(e, 3e(4 - e))$.

$$\begin{aligned} t_e : y &= f'(e)(x - e) + f(e) \\ \Leftrightarrow y &= 4(3 - e)(x - e) + 3e(4 - e) \\ \Leftrightarrow y &= 4(3 - e)x - 4e(3 - e) + 3e(4 - e) \\ \Leftrightarrow y &= 4(3 - e)x + e^2 \end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned} t_1 : y &= f'(1)(x - 1) + f(1) \\ \Leftrightarrow y &= 4(x - 1) + 7 \\ \Leftrightarrow y &= 4x + 3 \end{aligned}$$

(7) Graphe :



Exercice 4

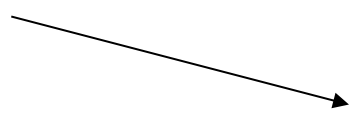
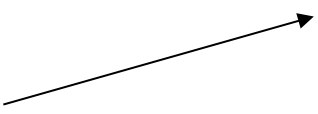
A

- (1) $\text{dom } g = \mathbb{R}$
 (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}(1 + xe^x) = +\infty$

$$\text{Calcul à part : } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{\text{"}\infty\text{"}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} \stackrel{(H)}{=} 0$$

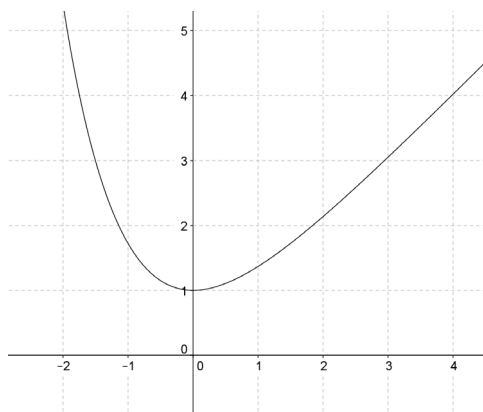
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + e^{-x} = +\infty.$$

- (3) $\text{dom } g' = \mathbb{R}$ et $g'(x) = 1 - e^{-x}$. On a : $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = e^{-x} \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	—	0	+
$g(x)$	$+\infty$ 	1 (m)	 $+\infty$

- (4) Comme $g(0) = 1$ est le minimum de la fonction g , on en déduit que g est strictement positive sur \mathbb{R}

- (5) Graphe :



B

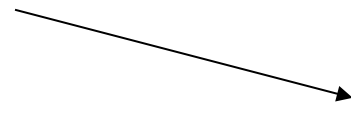

- (1) $\text{dom } f = \mathbb{R}$

- (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + e^{-x})^2 = (+\infty)^2 = +\infty$, cf. partie A pour la justification.

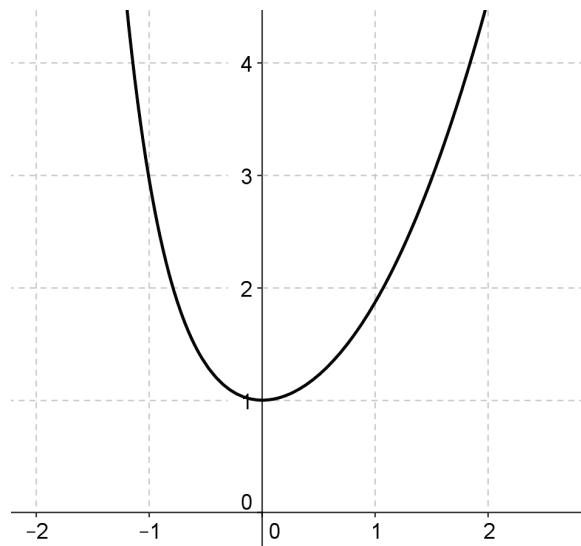
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^{-x})^2 = (+\infty)^2 = +\infty.$$

- (3) $\text{dom } f' = \mathbb{R}$ et $f'(x) = 2 \underbrace{g(x)}_{>0} \cdot g'(x)$

- (4)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$+\infty$ 	1 (m)	 $+\infty$

- (5) Graphe :



Exercice 5

A

(1) $\text{dom } g = \mathbb{R}$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - (x-1)^2 e^{-x} = "1 - (+\infty)" = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - (x-1)^2 e^{-x} = 1 - 0 = 1$

Calcul à part : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^2}{e^x} \stackrel{"\frac{\infty}{\infty}"}{=} \lim_{(H) x \rightarrow -\infty} \frac{2(x-1)}{e^x} \stackrel{"\frac{\infty}{\infty}"}{=} \lim_{(H) x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

(3) $\text{dom } g' = \mathbb{R}$

$g'(x) = -2(x-1)e^{-x} + (x-1)^2 e^{-x} = (x-1)e^{-x}(x-1-2) = (x-1)(x-3)e^{-x}.$

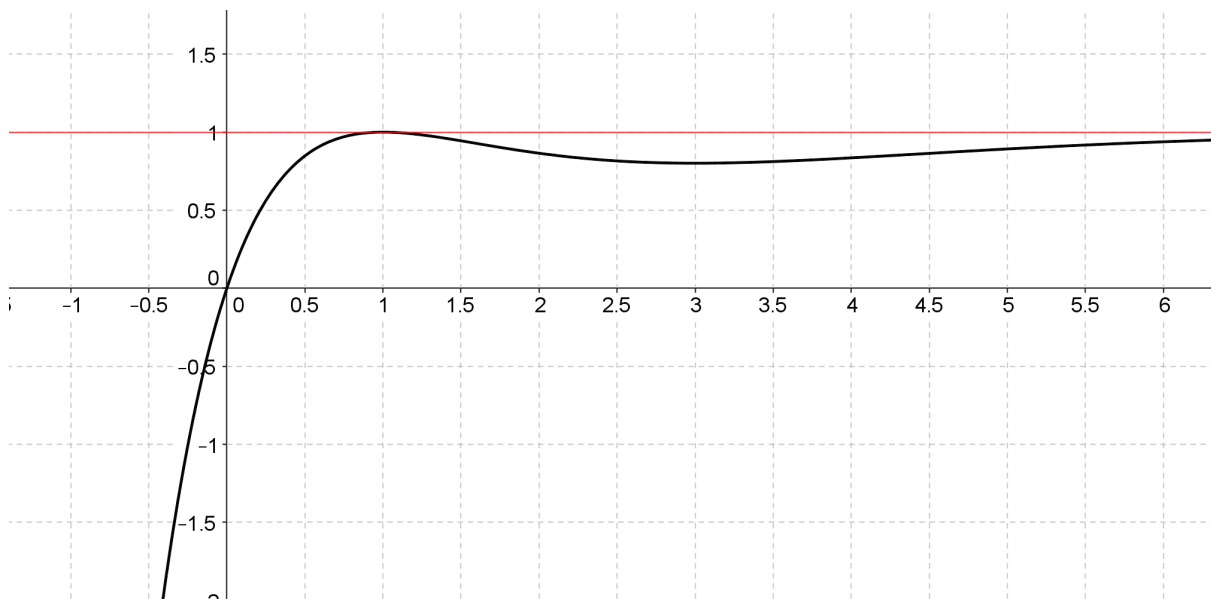
On a : $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 3$.

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$-\infty$	1 (M)		$1 - \frac{4}{e^3}$ (m)	1

(4) Comme $g(0) = 0$ et que le minimum relatif $g(3) = 1 - \frac{4}{e^3} > 0$, on déduit du tableau de variation ci-dessus que :

a) si $x < 0$ alors $g(x) < 0$ et b) si $x > 0$ alors $g(x) > 0$

(5) Graphe :



B

(1) $\text{dom } f = \mathbb{R}$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + x^2 e^{-x} + e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x} \left(\underbrace{e^x}_{\rightarrow 0} + x + \frac{1}{x} \right) = +\infty$

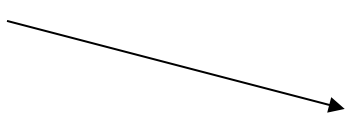
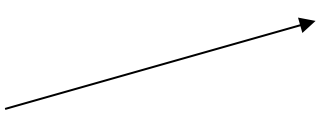
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + e^{-x}(x^2 + 1) = +\infty$

Calcul à part : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}(x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{e^x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

(3) $\text{dom } f' = \mathbb{R}$

$f'(x) = 1 - e^{-x}(x^2 + 1) + e^{-x}2x = 1 - e^{-x}(x^2 - 2x + 1) = 1 - e^{-x}(x - 1)^2 = g(x)$

(4) Le signe de $g(x)$ a été étudié dans la partie A.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$+\infty$ 	1 (m)	 $+\infty$

(5) $\text{dom } f'' = \mathbb{R}$

$f''(x) = g'(x) = (x - 1)(x - 3)e^{-x}$

$f''(x)$ s'annule et change de signe en 1 et en 3. \mathcal{G}_f admet donc deux points d'inflexions $I\left(1, 1 + \frac{2}{e}\right)$ et $J\left(3, 3 + \frac{10}{e^3}\right)$.

$$\begin{aligned} t_1 : y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ \Leftrightarrow y &= x - 1 + 1 + \frac{2}{e} \\ \Leftrightarrow y &= x + \frac{2}{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_3 : y &= f'(3)(x-3) + f(3) \\ \Leftrightarrow y &= \left(1 - \frac{4}{e^3}\right)(x-3) + 3 + \frac{10}{e^3} \\ \Leftrightarrow y &= \left(1 - \frac{4}{e^3}\right)x - 3 + \frac{12}{e^3} + 3 + \frac{10}{e^3} \\ \Leftrightarrow y &= \left(1 - \frac{4}{e^3}\right)x + \frac{22}{e^3} \end{aligned}$$

(6) Graphe :

