Calcul intégral – Exercices supplémentaires

A. Intégration par parties

(1) $\int x\sin 2x\,\mathrm{d}x$

(2) $\int x^2\cos(3x)\,\mathrm{d}x$

(3) $\int \ln x\,\mathrm{d}x$

(4) $\int \mathrm{Arctan}\,x\,\mathrm{d}x$

(5) $\int \mathrm{Arcsin}\,x\,\mathrm{d}x$

(6) $\int \mathrm{Arccos}(2x)\,\mathrm{d}x$

(7) $\int x\sqrt{3-2x}\,\mathrm{d}x$

(8) $\int \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\,\mathrm{d}x$

(9) $\int xe^x\,\mathrm{d}x$

(10) $\int (3-x)e^{2x}\,\mathrm{d}x$

(11) $\int x^2e^{-x}\,\mathrm{d}x$

(12) $\int (x^2-x-1)e^{4x}\,\mathrm{d}x$

(13) $\int e^{3x}\sin x\,\mathrm{d}x$

(14) $\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$ et $\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$

(15) $\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

(16) $\int x^2 2^x\,\mathrm{d}x$

(17) $\int \ln^2(2x+1)\,\mathrm{d}x$

(18) $\int x\,\mathrm{Arctan}\,x\,\mathrm{d}x$ et $\int x\,\mathrm{Arctan}^2\,x\,\mathrm{d}x$

(19) $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ et $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$

(20) $\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$

(21) $\int \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$

(22) $\int x^n\ln x\,\mathrm{d}x$ avec $n\in\mathbb{Z}$

(23) $\int \cos x\ln(1+\cos x)\,\mathrm{d}x$

(24) $\int \ln(1+\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$ et $\int x\ln(1+\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$

(25) $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

(26) $\int \sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$

B. Intégration par substitution (changement de variables)

(1) Refaire les exemples 7, 8, 17 de l'exercice précédent en faisant un changement de variables affine.

(2) $\int x^2\sqrt{1-2x}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int (2x+1)\sqrt[3]{x-2}\,\mathrm{d}x$

(4) $\int \sqrt[3]{x^4+1}\cdot x^7\,\mathrm{d}x$

(5) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+25}}\,\mathrm{d}x$

(6) $\int \frac{1}{\sqrt{x}-1}\,\mathrm{d}x$ poser : $t=\sqrt{x}$

(7) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(8) $\int \frac{1}{\left(\sqrt{x}+3\right)^2}\,\mathrm{d}x$

(9) $\int \frac{e^{2x}}{e^x+2}\mathrm{d}x$ poser : $u=e^x$

(10) $\int \frac{e^{3x}}{e^x-1}\mathrm{d}x$

(11) $\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}\mathrm{d}x$ poser : $v=e^{-x}$

(12) $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$ poser : $t=\sqrt{x+1}$

(13) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\mathrm{d}x$ poser : $t=\sqrt{x^2+1}$ ou $x=\tan u$

(14) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\mathrm{d}x$ poser : $t=\sqrt{x^2-1}$ ou $x=\frac{1}{\cos t}$

(15) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}\mathrm{d}x$ poser : $x=\frac{3}{\cos t}$

(16) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$ poser : $x=2\sin t$

(17) $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ poser : $x=\sin t$

(18) $\int e^{3x}\sqrt{1-e^{2x}}\,\mathrm{d}x$ poser : $e^x=t$, puis utiliser l'ex. précédent

C. Intégrales trigonométriques

(1) $\int \sin^3 x\cdot\cos^4 x\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \cos^3 x\cdot\sin^2 x\,\mathrm{d}x$

(3) $\int \cos^2 x\cdot\sin^4 x\,\mathrm{d}x$

(4) $\int \cos^6(2x)\,\mathrm{d}x$

(5) $\int \tan^4 x\,\mathrm{d}x$

(6) $\int \sin 3x\cdot\cos 3x\,\mathrm{d}x$

(7) $\int \sin 5x\cdot\sin 7x\,\mathrm{d}x$

(8) $\int \cos x\cdot\cos 2x\,\mathrm{d}x$

(9) $\int \cos^2 x\cdot\sin 2x\,\mathrm{d}x$

(10) $\int \cos 4x\cdot\sin^2 3x\,\mathrm{d}x$

(11) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x}\mathrm{d}x$

(12) $\int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$ poser : $t=\tan\frac{x}{2}$

(13) $\int \frac{1}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$ poser : $t=\tan\frac{x}{2}$

(14) $\int \frac{1}{\cos x+2}\mathrm{d}x$ poser : $t=\tan\frac{x}{2}$

(15) $\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$ poser : $t=\tan x$

(16) $\int \frac{\cos^3 x}{1+2\sin x}\mathrm{d}x$ poser : $t=\sin x$

D. Intégration de fractions rationnelles

(1) $\int \frac{1}{x^2-9}\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{x}{x^2+5x+6}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int \frac{x^4-4x^2+x+1}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$

(4) $\int \frac{2x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,\mathrm{d}x$

(5) $\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$

(6) $\int \frac{x}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x$

(7) $\int \frac{3}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

(8) $\int \frac{x-4}{x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x$

(9) $\int \frac{1}{x(x^2+5)}\,\mathrm{d}x$

(10) $\int \frac{x^2}{(x-1)(x^2+4x+5)}\,\mathrm{d}x$

(11) $\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x$

(12) $\int \frac{x^4+1}{x^3+9x}\,\mathrm{d}x$

(13) $\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$

(14) $\int \frac{x^2}{(x-1)(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x$

(15) $\int \frac{x+1}{x^3+2x^2-x-2}\,\mathrm{d}x$

(16) $\int \frac{x^2+2}{x(x^2+5x+6)}\,\mathrm{d}x$

E. Problèmes

(1) Soit $r>0$. Calculer :

a) $\int \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x$

b) $\int \sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ a) poser : $x = r\sin t$ ou b) intégrer par parties

(2) a) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$ poser : $x=\tan t$ avec $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$, puis $u=\sin t$

b) En déduire : $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x$, avec $a>0$

c) En déduire : $\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$, avec $a>0$, par parties

(3) a) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$, sur $]1,+\infty[$ poser : $x=\frac{1}{\cos t}$ avec $0<t<\frac{\pi}{2}$, puis $u=\sin t$

b) En déduire : $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x$, avec $a>0$, sur $]a,+\infty[$

c) En déduire : $\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x$, avec $a>0$, sur $]a,+\infty[$

d) Calculer aussi : $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x$ et $\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x$ sur $]-\infty,a[$ (poser : $x=-u$)

(4) Soit f et g définies par : $f(x)=e^{-x}\cos^2 x$ et $g(x)=e^{-x}\sin^2 x$

a) Calculer les intégrales indéfinies : $\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$ et $\int[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$

b) En déduire $\int f(x)\mathrm{d}x$ et $\int g(x)\mathrm{d}x$

F. Intégrales définies

(1) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\sin x)^2\,\mathrm{d}x$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{3}{1-\sin x}\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2-\cos x}\mathrm{d}x$

(4) $\int_2^3\frac{3x^3+10x^2-2x}{\left(x^2-1\right)^2}\mathrm{d}x$

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan x}\mathrm{d}x$

(6) $\int_0^a\frac{x^3}{a+x^2}\mathrm{d}x$, avec $a>0$

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$, poser $t=\tan x$

(8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\ln\left(1+\cos x\right)\mathrm{d}x$

(9) $\int_{-\frac{3}{2}}^{-2}\frac{1}{x^4-1}\mathrm{d}x$

(10) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos x}{\left(3+\cos 2x\right)^2}\mathrm{d}x$

(11) $\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{25-x^6}}\mathrm{d}x$

(12) $\int_{-1}^{1}e^{2x}\,\mathrm{Arctan}\,e^{x+1}\,\mathrm{d}x$

(13) $\int_1^2\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$

(14) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{e^x+e^{-x}}\mathrm{d}x$

(15) $\int_{-1}^{2}\frac{x}{\sqrt{x+3}}\mathrm{d}x$

G. Calculs d'aires (quadratures)

(1) Déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par le graphe de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ dans les cas suivants :

	$f(x)=$	$a=$	$b=$
(1)	$4x-x^3$	-2	3
(2)	x^4-4x^2+3	-2	2
(3)	$\frac{x-1}{x^2+4}$	0	2
(4)	$\tan^2 x$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
(5)	$\sin x$	$-\frac{33\pi}{4}$	$\frac{55\pi}{6}$
(6)	$(x^2+x)\ln\left(x+2\right)$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
(7)	$e^x\sin\left(2x\right)$	0	$\frac{3\pi}{2}$

(2) Déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par les graphes des fonctions f et g, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ dans les cas suivants :

	$f(x) =$	$g(x) =$	$a =$	$b =$
(1)	$x^2 - 1$	$5 - x - x^2$	-2	2
(2)	e^x	$\ln x$	$\frac{1}{2}$	2
(3)	e^x	$2e^{-x} - 1$	-1	1
(4)	4^x	$3 \cdot 2^x + 4$	-2	2
(5)	x^4	$x^3 - x^2$	$-\sqrt{2}$	2
(6)	$\cos^2 x$	$\sin^2 x$	$-\pi$	$\frac{5\pi}{2}$

(3) Déterminer l'aire de la partie finie (bornée) du plan délimitée par les graphes des fonctions suivantes dans les cas suivants :

	$f(x) =$	$g(x) =$	$h(x) =$	$k(x) =$
(1)	$x^2 - 3$	$2x$	/	/
(2)	$\frac{1}{4 - x^2}$	2	/	/
(3)	$4 - x^2$	$\frac{4}{x+2} - 1$	/	/
(5)	$\ln x$	$-2\ln x + 6$	$2\ln x$	/
(6)	$\frac{2}{x}$	$x - 1$	$x + 1$	/
(7)	e^x	e^{-x}	$-e^x + \frac{2}{e}$	$-e^{-x} + \frac{2}{e}$

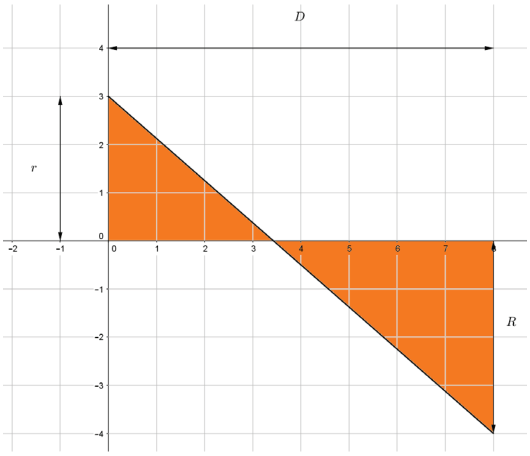
(4) a) Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$ où r est un nombre réel strictement positif.

b) Soit les cercles $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 = 2$ et $\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 - 4x = 0$ et soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les deux disques de bords $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ respectivement. Faire une figure et déterminer par le calcul les points d'intersections des deux cercles. Déterminer ensuite par un calcul intégral l'aire $\mathcal{A}_1$ de $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$. ***Indication*** : utiliser le résultat de la question a) pour calculer les intégrales définies. En déduire l'aire $\mathcal{A}_2$ de $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$.

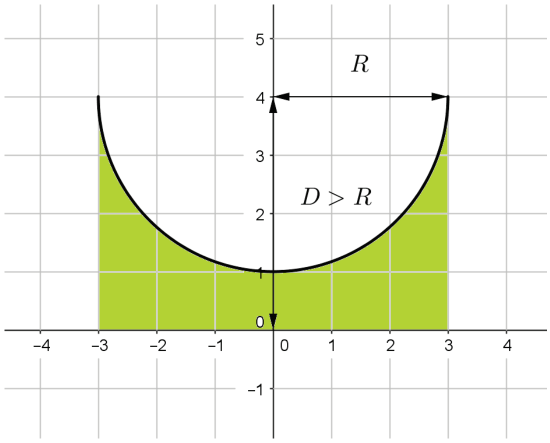
H. Calculs de volumes (cubatures)

(1) Calculer le volumes des des solides de révolution obtenus par la rotation autour de l'axe des abscisses des surfaces colorées ci-après :

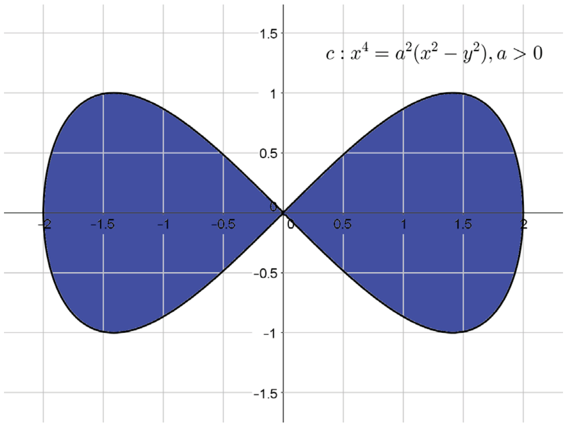
a)



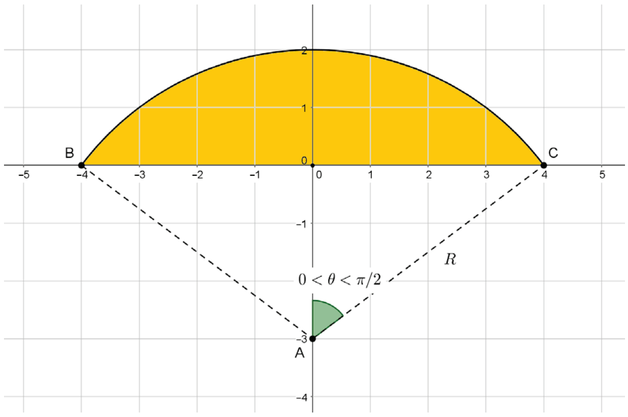
b)



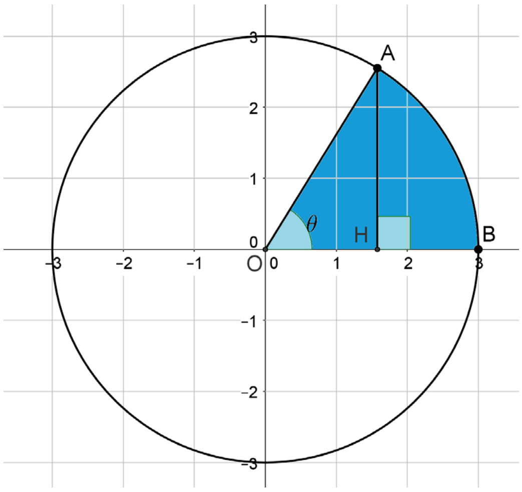
c) Le « huit » ou lemniscate de Gerono



d) Calculer en fonction de θ :



e) Calculer en fonction de θ :



(2) En supposant que $a > 0$ et $b > 0$, calculer le volume des solides de révolution obtenus par la rotation autour de l'axe des abscisses des surface décrites ci-après :

a) la surface délimitée par l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ et l'axe des abscisses (***ellipsoïde***) ;

b) la surface délimitée par l'hyperbole d'équation $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$, les droites $x=r$ et $x=-r$, et l'axe des abscisses (***hyperboloïde à une nappe***) ;

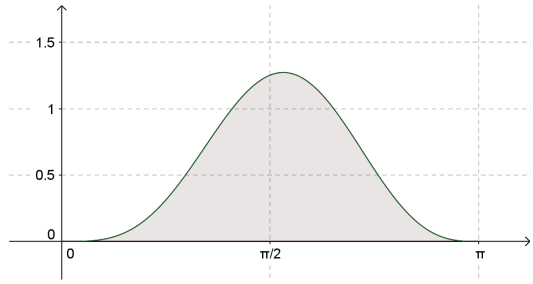
c) la surface délimitée par l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, les droites $x=r$ et $x=-r$ avec $r > a$ et l'axe des abscisses (***hyperboloïde à deux nappes***)

(3) a) Linéariser $\sin^6 x$ et en déduire $\int \sin^6 x \, \mathrm{d}x$ sur $\mathbb{R}$.

b) Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par :

$$f(x)=\sqrt{x}\sin^3 x\,.$$

Déterminer la valeur exacte du volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la surface comprise entre le graphe de f (ci-contre) et l'axe des abscisses.



(4) Soit λ un réel positif et $S(\lambda)$ la surface du plan délimitée par :

- le graphe de la fonction $f : x \mapsto 1+\frac{2}{(x+1)^2}$ et
- les droites $x=0$, $x=\lambda$ et $y=1$.

On note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire de la surface $S(\lambda)$ et $\mathcal{V}(\lambda)$ le volume du solide de révolution obtenu en faisant tourner la surface $S(\lambda)$ autour de l'axe des abscisses.

a) Faire une figure.

b) Montrer que la fonction $\lambda \mapsto \mathcal{A}(\lambda)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$ est strictement croissante.

c) Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$, puis $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathcal{A}(\lambda)$. Interpréter géométriquement cette limite.

d) Calculer $\mathcal{V}(\lambda)$, puis $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathcal{V}(\lambda)$.

e) Calculer le volume du solide de révolution obtenu en faisant tourner la surface $S(1)$ (avec $\lambda=1$) autour de l'axe des ordonnées.

(5) Dans un repère orthonormé du plan, on donne :

- la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y=x^2$
- la droite Δ d'équation $y=4$,
- la droite d_m, d'équation $y=m$, avec $0 \le m \le 4$.

On note $\mathcal{D}$ la partie du plan délimitée par la parabole $\mathcal{P}$ et la droite Δ.

a) Illustrer la situation à l'aide d'un graphique.

b) La droite d_m partage le domaine $\mathcal{D}$ en deux parties. Déterminer la valeur de m pour laquelle ces deux parties ont même aire.

c) Calculer le volume $\mathcal{V}_1$ du solide obtenu par la rotation de la surface $\mathcal{D}$ autour de l'axe des abscisses.

d) Calculer le volume $\mathcal{V}_2$ du solide obtenu par la rotation de la surface $\mathcal{D}$ autour de la droite Δ.

e) Comparer les volumes des deux solides.

I. Méthodes des rectangles et des trapèzes

(1) a) Rappeler la démonstration de la formule :

$$S(n) = 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

b) Démontrer (par récurrence ou par une autre méthode) que :

$$S_2(n) = 1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{et} \quad S_3(n) = 1^3+2^3+3^3+...+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

c) Au 17^e siècle, Pascal, Fermat et Wallis ont déterminé les valeurs des intégrales :

$$I_k = \int_0^1 x^k \, \mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}, \text{ pour } k \in \mathbb{N}^*$$

sans aucune connaissance du calcul de primitives. Leur astuce consistait à appliquer la méthode des rectangles. Retrouver par cette méthode I_2 et I_3 en utilisant les formules des points a) et b).

(2) En comparant des sommes et des intégrales, montrer que :

a) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+... = +\infty$

On dit que la série harmonique, c.-à-d. la somme des inverses des entiers naturels non nuls diverge. La signification précise est que si l'on définit les sommes partielles :

$$H_N = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...\frac{1}{N}, \text{ pour } N>0$$

alors : $\lim\limits_{N\to+\infty} H_N = +\infty$

b) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+... < +\infty$

La valeur exacte de cette série (des inverses des carrés des entiers naturels non nuls) a été déterminée en 1735 par Euler : c'est $\pi^2/6$.

(3) On définit pour tout entier naturel non nul :

$$S_n = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + ... + \ln n$$

a) En utilisant une « méthode des rectangles », montrer que : $S_n \geq n\ln n - n + 1$

b) En utilisant une « méthode des trapèzes », montrer que : $S_n \leq n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + 1$

c) En déduire un encadrement de $n!$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.