

## Calcul intégral – Exercices supplémentaires

### A. Intégration par parties

- |  |   |
|--|---|
| (1) $\int x \sin 2x \, dx$                 | (14) $\int \sin(\ln x) \, dx$ et $\int \cos(\ln x) \, dx$                                       |
| (2) $\int x^2 \cos(3x) \, dx$              | (15) $\int \sqrt{x} \, dx$  |
| (3) $\int \ln x \, dx$                     | (16) $\int x^2 2^x \, dx$   |
| (4) $\int \operatorname{Arctan} x \, dx$   | (17) $\int \ln^2(2x+1) \, dx$   |
| (5) $\int \operatorname{Arcsin} x \, dx$   | (18) $\int x \operatorname{Arctan} x \, dx$ et $\int x \operatorname{Arctan}^2 x \, dx$         |
| (6) $\int \operatorname{Arccos}(2x) \, dx$ | (19) $\int \cos^2 x \, dx$ et $\int \sin^2 x \, dx$   |
| (7) $\int x\sqrt{3-2x} \, dx$              | (20) $\int \sin^3 x \, dx$  |
| (8) $\int \frac{x}{\sqrt{1+2x}} \, dx$     | (21) $\int \ln(1+x^2) \, dx$  |
| (9) $\int x e^x \, dx$                     | (22) $\int x^n \ln x \, dx$ avec $n \in \mathbb{Z}$   |
| (10) $\int (3-x)e^{2x} \, dx$              | (23) $\int \cos x \ln(1+\cos x) \, dx$  |
| (11) $\int x^2 e^{-x} \, dx$               | (24) $\int \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \, dx$ et $\int x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \, dx$ |
| (12) $\int (x^2 - x - 1)e^{4x} \, dx$      | (25) $\int \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \, dx$  |
| (13) $\int e^{3x} \sin x \, dx$            |   |

### B. Intégration par substitution (changement de variables)

- (1) Refaire les exemples 7, 8, 17 de l'exercice précédent en faisant un changement de variables affine.
- (2)  $\int x^2 \sqrt{1-2x} \, dx$
- (3)  $\int (2x+1) \sqrt[3]{x-2} \, dx$
- (4)  $\int \sqrt[3]{x^4+1} \cdot x^7 \, dx$
- (5)  $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+25}} \, dx$
- (6)  $\int \frac{1}{\sqrt{x}-1} \, dx$       poser :  $t = \sqrt{x}$
- (7)  $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} \, dx$
- (8)  $\int \frac{1}{(\sqrt{x}+3)^2} \, dx$

- (9)  $\int \frac{e^{2x}}{e^x + 2} dx$       poser :  $u = e^x$
- (10)  $\int \frac{e^{3x}}{e^x - 1} dx$
- (11)  $\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}} dx$       poser :  $v = e^{-x}$
- (12)  $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$       poser :  $t = \sqrt{x+1}$
- (13)  $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx$       poser :  $t = \sqrt{x^2+1}$  ou  $x = \tan u$
- (14)  $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$       poser :  $t = \sqrt{x^2-1}$   $x = \frac{1}{\cos t}$
- (15)  $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}} dx$       poser :  $x = \frac{3}{\cos t}$
- (16)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$       poser :  $x = 2 \sin t$
- (17)  $\int x^2 \sqrt{1-x^2} dx$       poser :  $x = \sin t$
- (18)  $\int e^{3x} \sqrt{1-e^{2x}} dx$       poser :  $e^x = t$ , puis utiliser l'ex. précédent

### C. Intégrales trigonométriques

- (1)  $\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x dx$
- (2)  $\int \cos^3 x \cdot \sin^2 x dx$
- (3)  $\int \cos^2 x \cdot \sin^4 x dx$
- (4)  $\int \cos^6(2x) dx$
- (5)  $\int \tan^4 x dx$
- (6)  $\int \sin 3x \cdot \cos 3x dx$
- (7)  $\int \sin 5x \cdot \sin 7x dx$
- (8)  $\int \cos x \cdot \cos 2x dx$
- (9)  $\int \cos^2 x \cdot \sin 2x dx$
- (10)  $\int \cos 4x \cdot \sin^2 3x dx$
- (11)  $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x} dx$
- (12)  $\int \frac{1}{\sin x} dx$       poser :  $t = \tan \frac{x}{2}$
- (13)  $\int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx$       poser :  $t = \tan \frac{x}{2}$
- (14)  $\int \frac{1}{\cos x + 2} dx$       poser :  $t = \tan \frac{x}{2}$
- (15)  $\int \frac{1}{1 + \sin^2 x} dx$       poser :  $t = \tan x$
- (16)  $\int \frac{\cos^3 x}{1 + 2 \sin x} dx$       poser :  $t = \sin x$

## D. Intégration de fractions rationnelles

- |  |  |
|--|--|
| (1) $\int \frac{1}{x^2-9} dx$                | (10) $\int \frac{x^2}{(x-1)(x^2+4x+5)} dx$ |
| (2) $\int \frac{x}{x^2+5x+6} dx$             | (11) $\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$    |
| (3) $\int \frac{x^4-4x^2+x+1}{x^2-4} dx$     | (12) $\int \frac{x^4+1}{x^3+9x} dx$        |
| (4) $\int \frac{2x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$ | (13) $\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx$        |
| (5) $\int \frac{1}{x^2+4x+5} dx$             | (14) $\int \frac{x^2}{(x-1)(x^2+4)^2} dx$  |
| (6) $\int \frac{x}{x^2-2x+4} dx$             | (15) $\int \frac{x+1}{x^3+2x^2-x-2} dx$    |
| (7) $\int \frac{3}{(x+1)^2} dx$              | (16) $\int \frac{x^2+2}{x(x^2+5x+6)} dx$   |
| (8) $\int \frac{x-4}{x^2-4x+4} dx$           |  |
| (9) $\int \frac{1}{x(x^2+5)} dx$             |  |

## E. Problèmes

- (1) Soit  $r > 0$ . Calculer :
- a)  $\int \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}} dx$
- b)  $\int \sqrt{r^2-x^2} dx$       a) poser :  $x = r \sin t$  ou b) intégrer par parties
- (2) a)  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$       poser :  $x = \tan t$  avec  $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ , puis  $u = \sin t$
- b) En déduire :  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx$ , avec  $a > 0$
- c) En déduire :  $\int \sqrt{x^2+a^2} dx$ , avec  $a > 0$ , par parties
- (3) a)  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$ , sur  $]1, +\infty[$       poser :  $x = \frac{1}{\cos t}$  avec  $0 < t < \frac{\pi}{2}$ , puis  $u = \sin t$
- b) En déduire :  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx$ , avec  $a > 0$ , sur  $]a, +\infty[$
- c) En déduire :  $\int \sqrt{x^2-a^2} dx$ , avec  $a > 0$ , sur  $]a, +\infty[$
- d) Calculer aussi :  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx$  et  $\int \sqrt{x^2-a^2} dx$  sur  $] -\infty, a[$  (poser :  $x = -u$ )

(4) Soit  $f$  et  $g$  définies par :  $f(x) = e^{-x} \cos^2 x$  et  $g(x) = e^{-x} \sin^2 x$

a) Calculer les intégrales indéfinies :  $\int [f(x) + g(x)] dx$  et  $\int [f(x) - g(x)] dx$

b) En déduire  $\int f(x) dx$  et  $\int g(x) dx$

## F. Intégrales définies

(1)  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \sin x)^2 dx$

(2)  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3}{1 - \sin x} dx$

(3)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 - \cos x} dx$

(4)  $\int_2^3 \frac{3x^3 + 10x^2 - 2x}{(x^2 - 1)^2} dx$

(5)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \tan x} dx$

(6)  $\int_0^a \frac{x^3}{a + x^2} dx$ , avec  $a > 0$

(7)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \sin^2 x} dx$ , poser  $t = \tan x$

(8)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln(1 + \cos x) dx$

(9)  $\int_{-\frac{3}{2}}^{-2} \frac{1}{x^4 - 1} dx$

(10)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos x}{(3 + \cos 2x)^2} dx$

(11)  $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{x^2}{\sqrt{25 - x^6}} dx$

(12)  $\int_{-1}^1 e^{2x} \operatorname{Arctan} e^{x+1} dx$

(13)  $\int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$

(14)  $\int_{-1}^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$

(15)  $\int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx$

## G. Calculs d'aires (quadratures)

(1) Déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par le graphe de la fonction  $f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$  dans les cas suivants :

	$f(x) =$	$a =$	$b =$
(1)	$4x - x^3$	$-2$	$3$
(2)	$x^4 - 4x^2 + 3$	$-2$	$2$
(3)	$\frac{x-1}{x^2+4}$	$0$	$2$
(4)	$\tan^2 x$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
(5)	$\sin x$	$-\frac{33\pi}{4}$	$\frac{55\pi}{6}$
(6)	$(x^2 + x) \ln(x+2)$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
(7)	$e^x \sin(2x)$	$0$	$\frac{3\pi}{2}$

- (2) Déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par les graphes des fonctions  $f$  et  $g$ , et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$  dans les cas suivants :

	$f(x) =$	$g(x) =$	$a =$	$b =$
(1)	$x^2 - 1$	$5 - x - x^2$	$-2$	$2$
(2)	$e^x$	$\ln x$	$\frac{1}{2}$	$2$
(3)	$e^x$	$2e^{-x} - 1$	$-1$	$1$
(4)	$4^x$	$3 \cdot 2^x + 4$	$-2$	$2$
(5)	$x^4$	$x^3 - x^2$	$-\sqrt{2}$	$2$
(6)	$\cos^2 x$	$\sin^2 x$	$-\pi$	$\frac{5\pi}{2}$

- (3) Déterminer l'aire de la partie finie (bornée) du plan délimitée par les graphes des fonctions suivantes dans les cas suivants :

	$f(x) =$	$g(x) =$	$h(x) =$	$k(x) =$
(1)	$x^2 - 3$	$2x$	$/$	$/$
(2)	$\frac{1}{4 - x^2}$	$2$	$/$	$/$
(3)	$4 - x^2$	$\frac{4}{x+2} - 1$	$/$	$/$
(5)	$\ln x$	$-2 \ln x + 6$	$2 \ln x$	$/$
(6)	$\frac{2}{x}$	$x - 1$	$x + 1$	$/$
(7)	$e^x$	$e^{-x}$	$-e^x + \frac{2}{e}$	$-e^{-x} + \frac{2}{e}$

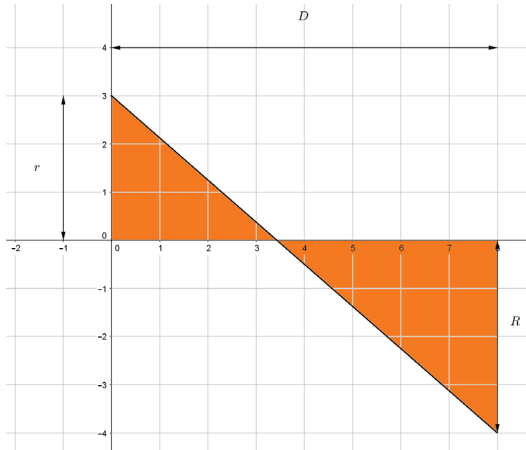
- (4) a) Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$  où  $r$  est un nombre réel strictement positif.

b) Soit les cercles  $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 = 2$  et  $\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 - 4x = 0$  et soit  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  les deux disques de bords  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  respectivement. Faire une figure et déterminer par le calcul les points d'intersections des deux cercles. Déterminer ensuite par un calcul intégral l'aire  $\mathcal{A}_1$  de  $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ . **Indication** : utiliser le résultat de la question a) pour calculer les intégrales définies. En déduire l'aire  $\mathcal{A}_2$  de  $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ .

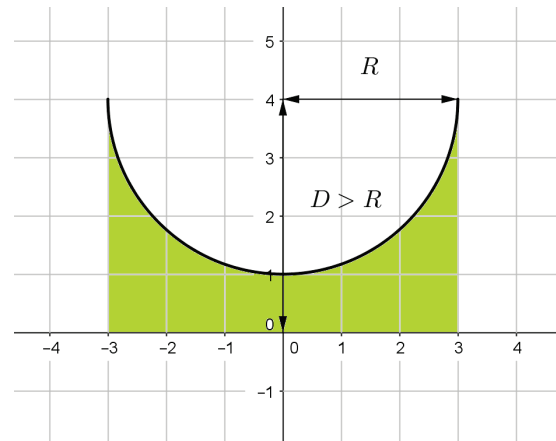
## H. Calculs de volumes (cubatures)

- (1) Calculer le volumes des des solides de révolution obtenus par la rotation autour de l'axe des abscisses des surfaces colorées ci-après :

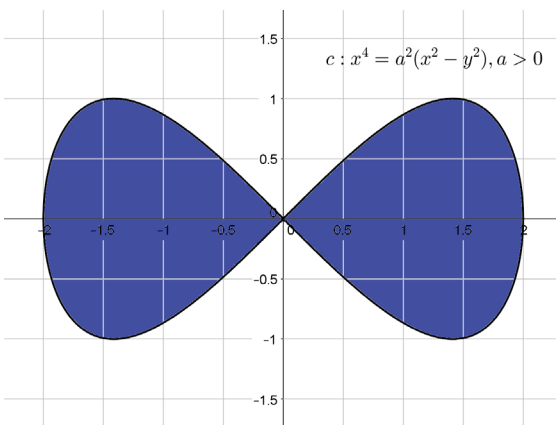
a)



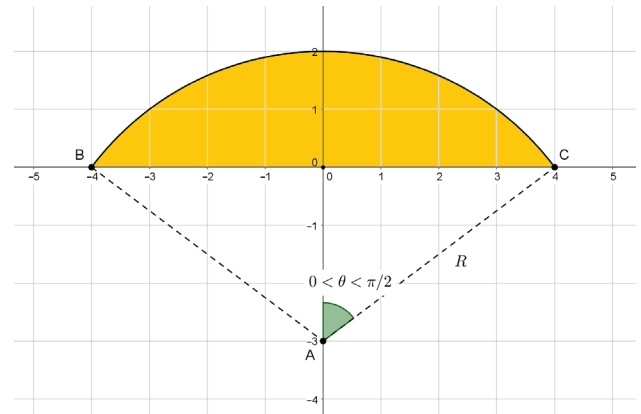
b)



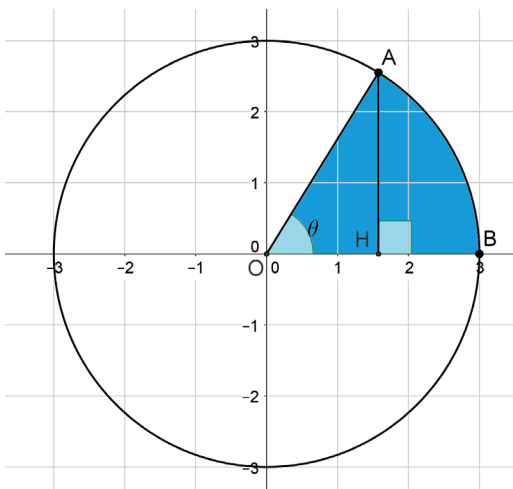
c) Le « huit » ou lemniscate de Geronon



d) Calculer en fonction de  $\theta$  :



e) Calculer en fonction de  $\theta$  :



(2) En supposant que  $a > 0$  et  $b > 0$ , calculer le volume des solides de révolution obtenus par la rotation autour de l'axe des abscisses des surface décrites ci-après :

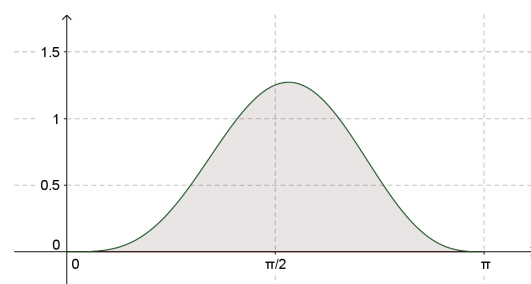
- la surface délimitée par l'ellipse d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  et l'axe des abscisses (*ellipsoïde*) ;
- la surface délimitée par l'hyperbole d'équation  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ , les droites  $x = r$  et  $x = -r$ , et l'axe des abscisses (*hyperboloïde à une nappe*) ;
- la surface délimitée par l'hyperbole d'équation  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , les droites  $x = r$  et  $x = -r$  avec  $r > a$  et l'axe des abscisses (*hyperboloïde à deux nappes*)

(3) a) Linéariser  $\sin^6 x$  et en déduire  $\int \sin^6 x \, dx$  sur  $\mathbb{R}$ .

b) Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, \pi]$  par :

$$f(x) = \sqrt{x} \sin^3 x.$$

Déterminer la valeur exacte du volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la surface comprise entre le graphe de  $f$  (ci-contre) et l'axe des abscisses.



(4) Soit  $\lambda$  un réel positif et  $S(\lambda)$  la surface du plan délimitée par :

- le graphe de la fonction  $f : x \mapsto 1 + \frac{2}{(x+1)^2}$  et
- les droites  $x = 0$ ,  $x = \lambda$  et  $y = 1$ .

On note  $\mathcal{A}(\lambda)$  l'aire de la surface  $S(\lambda)$  et  $\mathcal{V}(\lambda)$  le volume du solide de révolution obtenu en faisant tourner la surface  $S(\lambda)$  autour de l'axe des abscisses.

- Faire une figure.
- Montrer que la fonction  $\lambda \mapsto \mathcal{A}(\lambda)$ , avec  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  est strictement croissante.
- Calculer  $\mathcal{A}(\lambda)$ , puis  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$ . Interpréter géométriquement cette limite.
- Calculer  $\mathcal{V}(\lambda)$ , puis  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{V}(\lambda)$ .
- Calculer le volume du solide de révolution obtenu en faisant tourner la surface  $S(1)$  (avec  $\lambda = 1$ ) autour de l'axe des ordonnées.

(5) Dans un repère orthonormé du plan, on donne :

- la parabole  $\mathcal{P}$  d'équation  $y = x^2$
- la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 4$ ,
- la droite  $d_m$ , d'équation  $y = m$ , avec  $0 \leq m \leq 4$ .

On note  $\mathcal{D}$  la partie du plan délimitée par la parabole  $\mathcal{P}$  et la droite  $\Delta$ .

- Illustrer la situation à l'aide d'un graphique.
- La droite  $d_m$  partage le domaine  $\mathcal{D}$  en deux parties. Déterminer la valeur de  $m$  pour laquelle ces deux parties ont même aire.

- c) Calculer le volume  $\mathcal{V}_1$  du solide obtenu par la rotation de la surface  $\mathcal{D}$  autour de l'axe des abscisses.
- d) Calculer le volume  $\mathcal{V}_2$  du solide obtenu par la rotation de la surface  $\mathcal{D}$  autour de la droite  $\Delta$ .
- e) Comparer les volumes des deux solides.

## I. Méthodes des rectangles et des trapèzes

- (1) a) Rappeler la démonstration de la formule :

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- b) Démontrer (par récurrence ou par une autre méthode) que :

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{et } S_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

- c) Au 17<sup>e</sup> siècle, Pascal, Fermat et Wallis ont déterminé les valeurs des intégrales :

$$I_k = \int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}, \text{ pour } k \in \mathbb{N}^*$$

sans aucune connaissance du calcul de primitives. Leur astuce consistait à appliquer la méthode des rectangles. Retrouver par cette méthode  $I_2$  et  $I_3$  en utilisant les formules des points a) et b).

- (2) En comparant des sommes et des intégrales, montrer que :

$$\text{a) } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = +\infty$$

On dit que la série harmonique, c.-à-d. la somme des inverses des entiers naturels non nuls diverge. La signification précise est que si l'on définit les sommes partielles :

$$H_N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N}, \text{ pour } N > 0$$

alors :  $\lim_{N \rightarrow +\infty} H_N = +\infty$

$$\text{b) } 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots < +\infty$$

La valeur exacte de cette série (des inverses des carrés des entiers naturels non nuls) a été déterminée en 1735 par Euler : c'est  $\pi^2 / 6$ .

- (3) On définit pour tout entier naturel non nul :

$$S_n = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln n$$

- a) En utilisant une « méthode des rectangles », montrer que :  $S_n \geq n \ln n - n + 1$
- b) En utilisant une « méthode des trapèzes », montrer que :  $S_n \leq n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + 1$
- c) En déduire un encadrement de  $n!$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .