Fiche d'exercices supplémentaires 3

I. Soit la fonction

$$f_m : x \mapsto \ln\left(\frac{x^2 - m}{x - m}\right),$$

où m est un paramètre réel et soit $\mathcal{G}_m$ le graphe de f_m dans un repère orthonormé. On discutera en fonction du paramètre m si nécessaire.

A. Etudier et représenter graphiquement dans un repère orthonormé (unité = 1 cm) les fonctions f_0 et f_1.

B. Dans la suite du problème, on pourra supposer $m \neq 0$ et $m \neq 1$.

(1) Déterminer les domaines de définition et de continuité de f_m.

(2) Etudier les limites de f_m aux bornes du domaine, le comportement asymptotique et la nature des branches infinies de $\mathcal{G}_m$.

(3) a) Déterminer les racines de f_m. b) Que peut-on en déduire d'après le théorème de Rolle ?

(4) Calculer f_m' et en déduire le tableau des variations de f_m.

(5) Déterminer le point d'intersection des tangentes à $\mathcal{G}_m$ aux points d'abscisses 0 et 1 respectivement, s'il existe.

(6) Représenter graphiquement f_{-1}, $f_{1/2}$ et f_2 dans le repère de la question A.

II. Déterminer le nombre de solutions de l'équation :

$$\ln(x + m) = x,$$

où m est un paramètre réel donné.

III. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$x - 2\log_4(2^x - 5) + 2\log_{\frac{1}{2}} 7 < \frac{-1}{\log_7 2}$$ *(section B, épreuve orale 2016)*