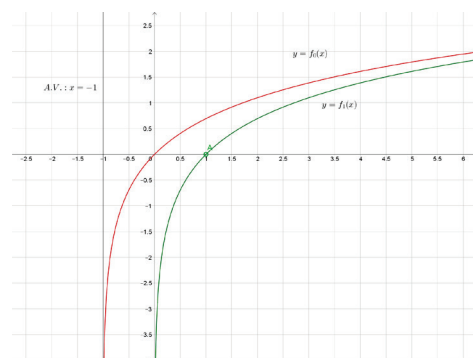


## Corrigé de l'exercice I de la FSE 3

A.  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad f_0(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x}\right) = \ln x$ , donc :  $f_0 = \ln$ .

$$(\forall x \in ]-1, +\infty[ \setminus \{1\}) \quad f_1(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = \ln(x+1)$$

**Attention** : le graphe de  $f_1$  admet un trou en  $(1,0)$ .



B. Donc à partir de maintenant :  $m \neq 0$  et  $m \neq 1$ .

(1) C.E. :  $\frac{x^2 - m}{x - m} > 0$

a) **1er cas**  $m < 0$  : Alors :  $x^2 - m > 0$ , donc la C.E. se simplifie en :  
 $x - m > 0 \Leftrightarrow x > m$ . Donc :  $\text{dom } f_m = ]m, +\infty[ = \text{dom}_c f_m$

b) **2e cas**  $m > 0$  : Alors les valeurs critiques du numérateur sont  $\sqrt{m}$  et  $-\sqrt{m}$  et celle du dénominateur est  $m$ . Il faut donc envisager deux cas :

b1)  $m > \sqrt{m} \Leftrightarrow m > 1$

Alors on a le tableau de signes suivant :

$x$	$-\infty$		$-\sqrt{m}$		$\sqrt{m}$		$m$		$+\infty$
$x^2 - m$		+	○	-	○	+		+	
$x - m$		-		-		-	○	+	
$\frac{x^2 - m}{x - m}$		-	○	+	○	-		+	

Donc :  $\text{dom } f_m = ]-\sqrt{m}, \sqrt{m}[ \cup ]m, +\infty[ = \text{dom}_c f_m$

b1)  $m < \sqrt{m} \Leftrightarrow 0 < m < 1$

$x$	$-\infty$		$-\sqrt{m}$		$m$		$\sqrt{m}$		$+\infty$
$x^2 - m$		+	○	-		-	○	+	
$x - m$		-		-	○	+		+	
$\frac{x^2 - m}{x - m}$		-	○	+		-	○	+	

Donc :  $\text{dom } f_m = ]-\sqrt{m}, m[ \cup ]\sqrt{m}, +\infty[ = \text{dom}_c f_m$

(2) En supposant que  $m \neq 0$  et  $m \neq 1$  :

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \Rightarrow \text{pas d'A.H.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_m(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left( \frac{x^2}{x} \cdot \frac{1 - \frac{m}{x^2}}{1 - \frac{m}{x}} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{\ln \left( \frac{1 - \frac{m}{x^2}}{1 - \frac{m}{x}} \right)}{x}}_{\rightarrow 0} = 0$$

$\Rightarrow$  pas d'A.O. mais B.P. de direction asymptotique  $(Ox)$ .

$$\text{Calcul à part : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{"}\infty\text{"}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1} = 0$$

b) Si  $\boxed{m > 0}$  (et  $m \neq 1$ ) :

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{m}} f_m(x) = \text{"}\ln 0^+\text{"} = -\infty \Rightarrow A.V. : x = -\sqrt{m}$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{m}} f_m(x) = \text{"}\ln 0^+\text{"} = -\infty \Rightarrow A.V. : x = \sqrt{m}$$

c) Dans tous les cas :

$$\lim_{x \rightarrow m} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow m} \ln \left( \frac{x^2 - m}{x - m} \right) = \text{"}\ln(+\infty)\text{"} = +\infty \Rightarrow A.V. : x = m$$

Il est sous-entendu que :

- $x \rightarrow m^+$  lorsque  $m > 1$  ou  $m < 0$  et
- $x \rightarrow m^-$  lorsque  $0 < m < 1$

(3) a) Toujours en supposant que  $m \neq 0$  et  $m \neq 1$  :

$$\begin{aligned} f_m(x) = 0 & \Leftrightarrow \frac{x^2 - m}{x - m} = 1 \\ & \Leftrightarrow x^2 - m = x - m \\ & \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{aligned}$$

Ces racines appartiennent toujours au  $\text{dom } f_m$  !

b)  $\rightarrow$  Si  $m < 0$  ou  $m > 1$  alors  $f_m$  est continue et dérivable sur  $[0,1]$  qui est inclus dans  $\text{dom}_c f_m = \text{dom } f_m'$ . Dans ce cas le théorème de Rolle permet de conclure que  $f_m'$  admet au moins une racine dans  $]0,1[$ . Plus précisément  $f_m$  admet au moins un extrémum (maximum ou minimum) entre 0 et 1.

$\rightarrow$  Par contre, si  $0 < m < 1$ , alors  $f_m$  n'est pas continue sur  $[0,1]$  (car  $m \notin \text{dom } f_m$ ) et dans ce cas le théorème de Rolle ne permet pas de conclure quoi que ce soit.

$$(4) \quad \text{dom } f_m' = \text{dom } f_m$$

$$f_m'(x) = \frac{\frac{2x(x-m) - x^2 + m}{(x-m)^2}}{\frac{x^2 - m}{x-m}} = \frac{2x^2 - 2mx - x^2 + m}{(x-m)^2} \cdot \frac{x-m}{x^2 - m} = \frac{x^2 - 2mx + m}{\underbrace{(x-m)(x^2 - m)}_{>0}}$$

On remarque que :

$(x-m)(x^2-m)$  est toujours  $> 0$  sur le domaine (car le produit a même signe que le quotient.) Donc il suffit d'analyser le signe du numérateur  $x^2-2mx+m$ .

$$\left(\forall x \in \text{dom } f_m\right):$$

$$f'_m(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2mx + m^2) = m^2 - m \quad (\text{méthode du complément quadratique !})$$

$$\Leftrightarrow (x - m)^2 = m^2 - m$$

$$\Leftrightarrow x - m = \pm \sqrt{m^2 - m} \quad \text{et} \quad m^2 \geq m$$

$$\Leftrightarrow x = m \pm \sqrt{m^2 - m} \text{ et } (m \geq 1 \text{ ou } m \leq 0)$$

sous condition évidemment que ces solutions appartiennent au domaine.

Posons :  $x_1 = m - \sqrt{m^2 - m}$  et  $x_2 = m + \sqrt{m^2 - m}$

1er cas :  $m < 0$

Alors  $\text{dom } f_m = ]m, +\infty[$  et donc  $x_1 < m$  n'est pas dans le domaine. Cette racine est donc à écarter ! L'autre racine  $x_2 > m$  est à retenir et on sait même d'après (3b) qu'elle appartient à  $]0, 1[$ .

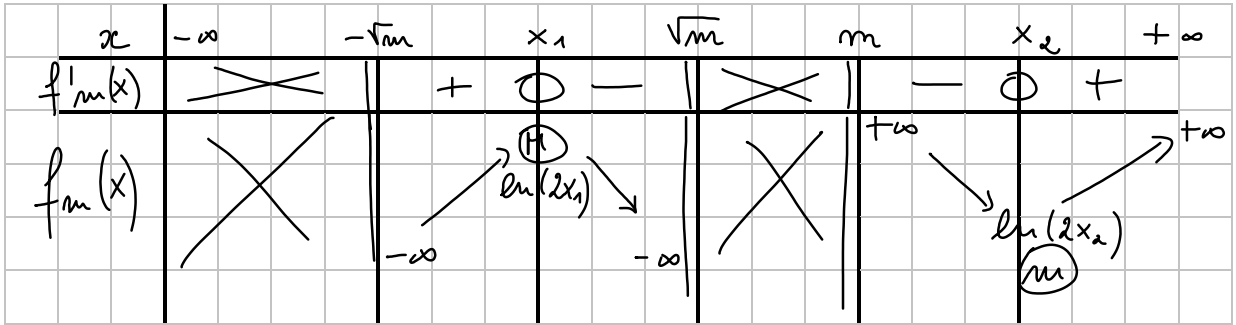
$x$	$m$	$x_2$	$+\infty$
$f'_m(x)$		-	0
$f_m(x)$	$+\infty$		$+\infty$

$\ln(2x_2)$   
 $(m)$

$$\begin{aligned}
f_m(x_2) &= \ln \left( \frac{\left(m + \sqrt{m^2 - m}\right)^2 - m}{m + \sqrt{m^2 - m} - m} \right) = \ln \left( \frac{m^2 + m^2 - m + 2m\sqrt{m^2 - m} - m}{\sqrt{m^2 - m}} \right) \\
&= \ln \left( \frac{2\left((m^2 - m) + m\sqrt{m^2 - m}\right)}{\sqrt{m^2 - m}} \right) \\
&= \ln \left( 2\left(m + \sqrt{m^2 - m}\right) \right) = \ln(2x_2)
\end{aligned}$$

**2e cas :**  $m > 1$

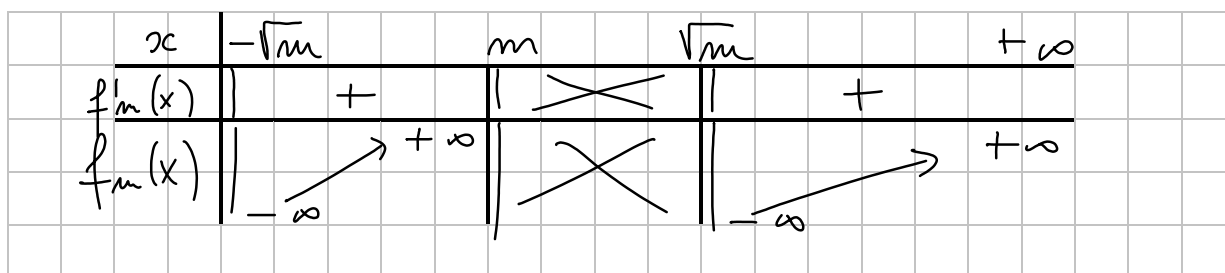
Alors  $\text{dom } f_m = ]-\sqrt{m}, \sqrt{m}[ \cup ]m, +\infty[$ . Il est clair que  $x_2 > m$  et d'après (3b) on sait que nécessairement :  $0 < x_1 < 1$ . Les 2 racines sont donc à retenir.



$$\begin{aligned}
f_m(x_1) &= \ln \left( \frac{\left(m - \sqrt{m^2 - m}\right)^2 - m}{m - \sqrt{m^2 - m} - m} \right) = \ln \left( \frac{m^2 + m^2 - m - 2m\sqrt{m^2 - m} - m}{-\sqrt{m^2 - m}} \right) \\
&= \ln \left( \frac{2\left((m^2 - m) - m\sqrt{m^2 - m}\right)}{-\sqrt{m^2 - m}} \right) \\
&= \ln \left( 2\left(m - \sqrt{m^2 - m}\right) \right) = \ln(2x_1)
\end{aligned}$$

**3e cas :**  $0 < m < 1$

Dans ce cas, ni  $x_1$ , ni  $x_2$  n'existent et le trinôme au numérateur de  $f'_m(x)$  est toujours  $> 0$ . D'où le dernier tableau de variation :



- (5) Comme  $f_m$  est toujours dérivable en 0 et en 1 (si  $m \neq 0$  et  $m \neq 1$ ), les tangentes demandées existent !

$$\begin{aligned} t_0 \equiv y = f'_m(0)x + f_m(0) & \quad t_1 \equiv y = f'_m(1)(x-1) + f_m(1) \\ \Leftrightarrow y = \frac{x}{m} & \quad \text{et} \quad \Leftrightarrow y = \frac{x-1}{1-m} \end{aligned}$$

On a :

$$t_0 \parallel t_1 \Leftrightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{1-m} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

Dans ce cas :  $t_0 : y = 2x$  et  $t_1 : y = 2x - 2$  sont strictement parallèles, donc pas de point d'intersection.

Si  $m \neq \frac{1}{2}$ ,  $t_0$  et  $t_1$  sont sécantes et leur point d'intersection est solution du système :

$$I_m \begin{cases} y = \frac{x}{m} & (1) \\ y = \frac{x-1}{1-m} & (2) \end{cases}$$

(1) dans (2) :

$$(1-m)y = my - 1 \Leftrightarrow (1-2m)y = -1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2m-1} \text{ et } m \neq \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow (1) : x = \frac{m}{2m-1}$$

$$\text{Donc : } I_m \left( \frac{m}{2m-1}, \frac{1}{2m-1} \right)$$

(6) Représentation graphique :

