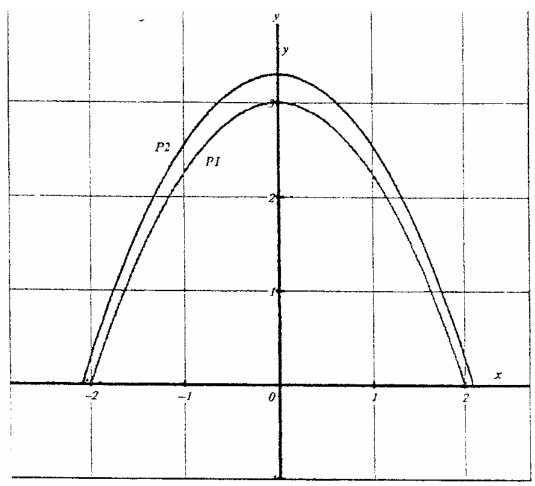
PROBLEMES

Tous les calculs sont à faire avec la V200

Problème 1 (œufs de Pâques)

Lorsqu'on fait tourner les deux arcs de parabole de la figure ci-dessous autour de l'axe des x, on obtient un corps qui ressemble (très vaguement…) à un œuf de Pâques. L'intérieur de cet œuf est vide tandis que sa paroi, c'est-à-dire la partie comprise entre le deux courbes, est en chocolat.

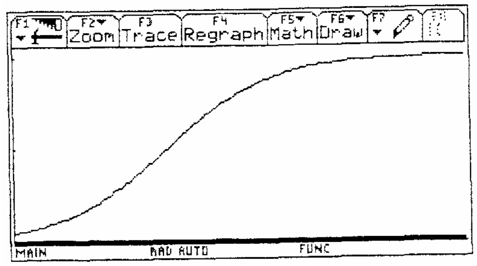


unité de longueur = 1 cm

1) En vous basant sur les données de la figure, établissez l'équation de la parabole P_1.
2) Etablissez également l'équation de P_2, sachant que celle-ci est obtenue à partir de P_1 par une translation de 0,3 cm dans la direction de l'axe des ordonnées.
3) Quel est le volume de la partie vide de l'œuf ?
4) Un confiseur veut fabriquer 10 000 de ces œufs. Sachant que le poids spécifique du chocolat est de 1,052 (càd que 1 dm^3 de chocolat pèse 1,052 kg), calculez la quantité de chocolat (en kg) dont le confiseur aura besoin.

Problème 2 (la croissance du tournesol)

1) Si on mesure la hauteur d'un tournesol tout au long de sa croissance, on obtient à peu près la courbe suivante :



Au début des mesures (jour 0) la hauteur est de 0,1 m, après 100 jours elle est de 1,27 m et au bout de 200 jours de 2 m. Déterminez une fonction polynôme du 3e degré qui décrit la croissance du tournesol pendant les 200 premiers jours.

2) Les botanistes proposent la fonction $h_r(t) = \dfrac{2e^{rt}}{e^{rt} + 19}$ pour modéliser la croissance du tournesol où t représente le temps mesuré en jours, r une certaine constante réelle strictement positive et $h_r(t)$ la hauteur du tournesol au moment t.

a) Montrez que la fonction h_r est strictement croissante.

b) Vers quelle valeur limite la hauteur du tournesol tend-elle d'après ce modèle ?

c) A quel instant t_m la vitesse de croissance est-elle maximale et quelle est alors la hauteur du tournesol ? Quelle particularité présente le graphe de la fonction pour cette valeur de t ?

d) Essayez de donner une valeur à la constante r pour que ce modèle mathématique soit aussi près que possible de la réalité observée (càd des mesures données au début). Commentez les résultats de vos calculs !

e) Discutez les avantages et les inconvénients de ces deux modèles mathématiques : la fonction h_r et celle trouvée en **1)**.

3) D'une manière générale on appelle <u>*fonction logistique*</u> toute fonction de la forme $H(t) = \dfrac{ae^{rt}}{e^{rt} + b}$ où a, b et r sont des constantes réelles strictement positives et t la variable.

a) Faites une étude succincte de la fonction H (domaine, limites, variations).

b) Déterminez les paramètres a et b de telle sorte que la fonction H décrive la croissance d'une variété de tournesol dont la hauteur est de 0,2 m au début des mesures (càd pour $t = 0$) et dont la hauteur tend vers la valeur limite de 1,8 m.

c) Analysez l'influence du paramètre r sur l'allure de la courbe de H sur $\mathbb{R}_+$.

Problème 3 (la croissance de l'épicéa)

Le diamètre d'un certain type d'épicéa a été étudié sur une période de quelque 200 ans. Le tableau suivant donne les différentes mesures prises, l'année 0 correspondant au début des mesures :

Années	0	25	50	75	100	125	150	175	200
Diamètre (m)	0,05	0,15	0,41	0,76	1,07	1,19	1,23	1,24	1,25

1) Placez les données dans un repère approprié. Quelle épaisseur maximale atteindra probablement l'épicéa ?

2) Jugez de la qualité du modèle basé sur la croissance exponentielle suivante : $f(t) = 0,05 \cdot 2,73^{\frac{t}{25}}$ où f(t) indique le diamètre (en m) à l'instant t (en années, le début des mesures correspondant à $t = 0$).

3) Même question pour la fonction logistique suivante : $g(t) = \dfrac{5}{100e^{-\frac{t}{20}} + 4}$.

4) D'après ce dernier modèle :

a) A quel moment l'arbre avait-il une épaisseur de 1 m ?

b) Quand la vitesse de croissance de l'arbre a-t-elle été maximale et quelle était alors sa valeur ?

c) Parmi les graphes suivants, lequel peut correspondre au graphe de la fonction g' ? Expliquez sans tracer le graphe de g' ! Donnez également les raisons pour lesquelles les autres graphes ne conviennent pas !

figure 1

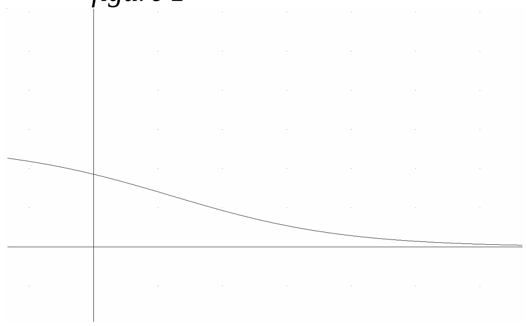


figure 2

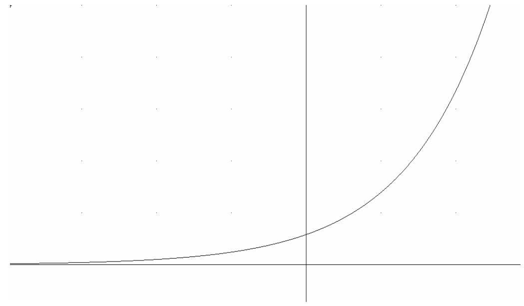


figure 3

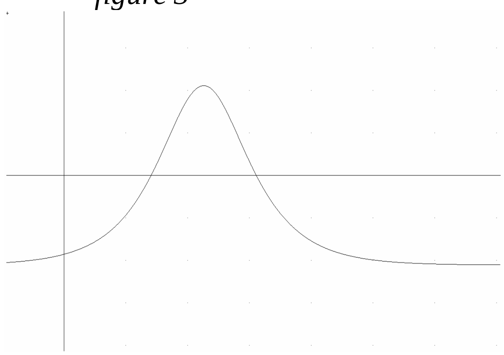
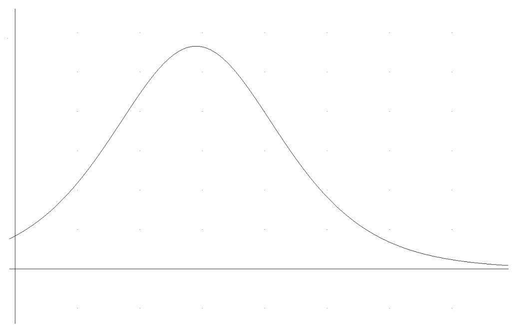
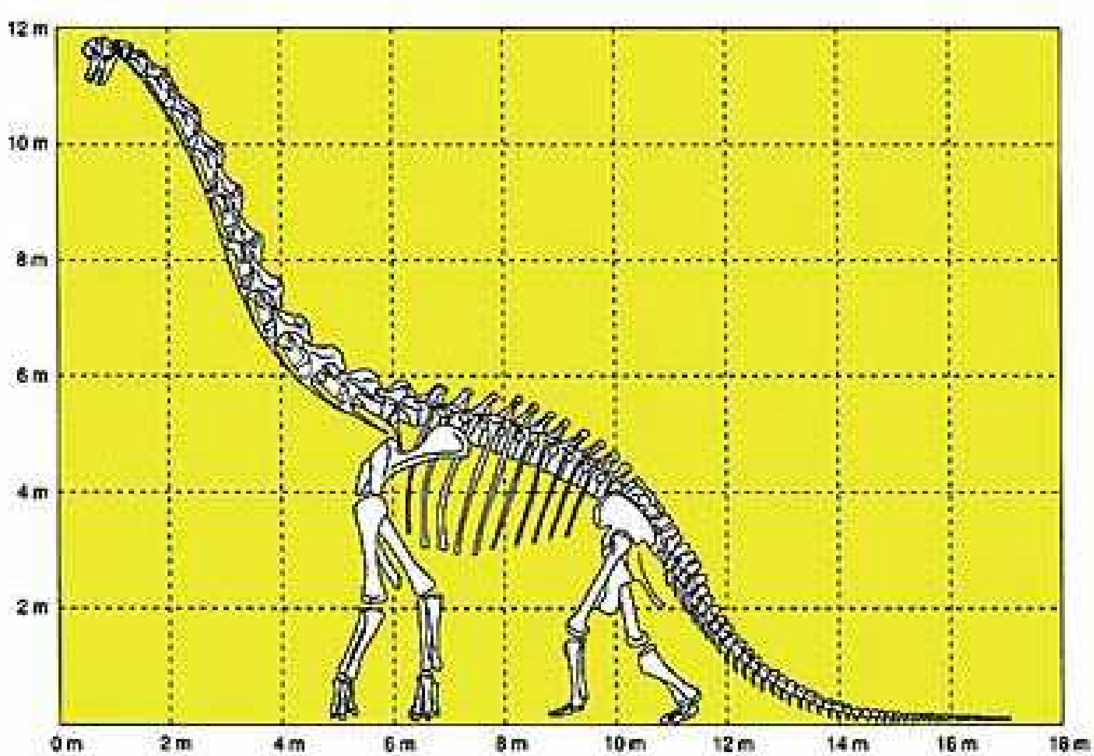


figure 4



Problème 4 (paléonthologie)

Sur la figure suivante on a représenté le squelette d'un dinosaure :



On veut modéliser la peau du dinosaure au-dessus de la colonne vertébrale de la tête jusqu'au bout de la queue à l'aide de graphes de fonctions.

1) Déterminez une fonction polynôme du 4e degré qui représenterait la peau du tronc de l'animal (càd $4 \le x \le 11$) en supposant qu'elle passe par le point $I(7;6)$ et que la tangente à la courbe en ce point est horizontale.

2) Complétez le tableau suivant puis dessinez le graphe de la fonction trouvée sur la figure :

x	4	5	6	7	8	9	10	11
f(x)								

3) Trouvez des fonctions simples qui fournissent des approximations satisfaisantes de la tête et de la queue du dinosaure.

Pour décrire la vitesse de croissance des animaux, les biologistes utilisent souvent des fonctions du type $c_{k,h}(t) = \dfrac{2500 \cdot k \cdot e^{k \cdot t}}{\left(4 \cdot e^{k \cdot t} + 50\right)^2} \cdot h$ où k et h sont des constantes réelles positives dépendant de la race de l'animal et t est le temps mesuré en années.

4) Pour les brachiosaures, la mensuration des fossiles trouvés a amené les paléontologues à choisir $k = 0,27$ et $h = 1,1$. Sachant qu'à la naissance (càd pour $t = 0$) un brachiosaure mesurait à peu près 40 cm, trouvez une fonction g(t) qui donne sa taille à l'âge t.

5) Déterminez , d'après ce modèle :

- **a)** la taille d'un brachiosaure de 30 ans.
- **b)** la taille maximale d'un brachiosaure.
- **c)** L'âge auquel un brachiosaure a atteint 95% de sa taille définitive.
- **d)** L'âge auquel un brachiosaure croît le plus vite.

6) En prenant $h = 1,1$, analysez l'influence du paramètre k sur la vitesse de croissance d'un brachiosaure en traçant les courbes de $c_{k,h}(t)$ pour différentes valeurs de k.

7) Comment faudrait-il choisir les paramètres h et k si on savait que la vitesse de croissance maximale de 0,85 m/an serait atteinte vers l'âge de 5 ans ?

Problème 5 (construction d'une ligne de chemin de fer))

Notions préliminaires

a) longueur d'un arc de courbe

Si f est une fonction dérivable sur $[a,b]$, avec a<b, alors la **longueur** l de la partie du graphe de f comprise entre $A(a,f(a))$ et $B(b,f(b))$ est donnée par la formule :

$$\boxed{l=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}$$

Vérifiez cette formule en calculant la longueur du segment $[AB]$ avec $A(-3;5)$ et $B(4;-1)$ avec et sans la formule !

b) courbure d'un arc de courbe

Soient f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et $M(x;f(x))\in G_f$. On appelle **courbure** du graphe de f en M le nombre k(x) défini par :

$$\boxed{k(x)=\frac{f''(x)}{\left(1+f'^2(x)\right)^{3/2}}}$$

Le signe de k(x) étant le même que celui de $f''(x)$, la courbure d'une courbe est positive là où la courbe est convexe et négative dans le cas contraire. Afin de mieux comprendre le « fonctionnement » de cette formule et la notion de « courbure », tracez sur un même graphique les courbes de f et de k pour plusieurs fonctions (*p.ex.* $f(x)=3x-2$, $f(x)=x^2$, $f(x)=x^4$, $f(x)=1/x$, …). Vous constaterez que plus l'allure du graphe de f se rapproche d'une droite, plus k(x) est proche de 0, et plus le graphe de f est « courbé », plus k(x) est éloigné de 0 !

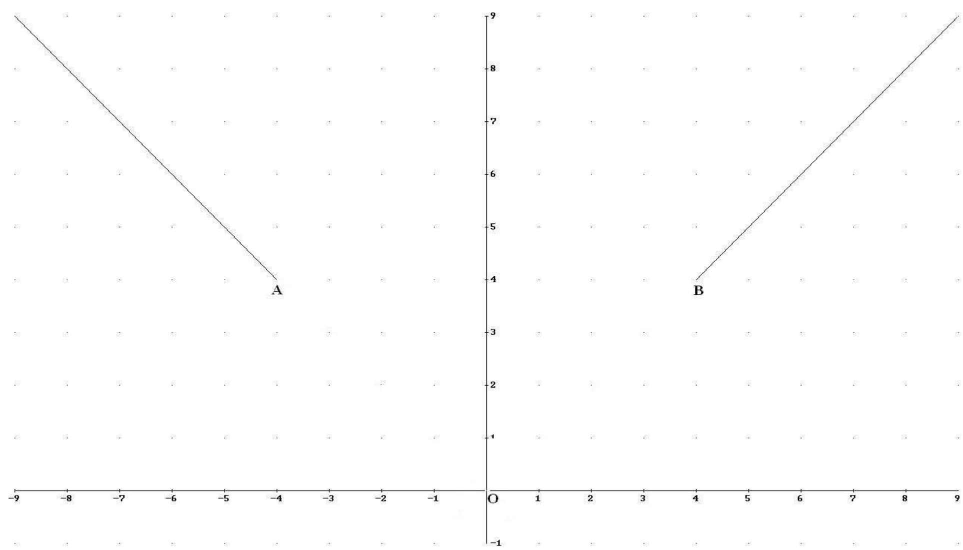
c) raccordement « sans heurts » de deux courbes

Soient f une fonction définie et deux fois dérivable à gauche de a (p.ex. sur l'intervalle $(-\infty;a]$) et g fonction définie et deux fois dérivable à droite de a (p.ex. sur $[a;+\infty)$). La réunion des deux courbes donne une courbe *continue* ssi $f(a)=g(a)$. Si on veut de plus que le raccordement de ces deux courbes au point $A(a;f(a))$ de fasse de la façon la moins « brutale » possible, il faut de plus que $f'(a)=g'(a)$ (pour éviter que A soit un point anguleux) et $f''(a)=g''(a)$ (afin que les deux courbes aient aussi la même courbure en A !). Pour que les deux courbes aient donc un **« raccordement sans heurts »** en A, il faut donc que les trois conditions suivantes soient vérifiées :

$$\boxed{\begin{cases} f(a)=g(a) \\ f'(a)=g'(a) \\ f''(a)=g''(a) \end{cases}}$$

Problème

Deux lignes de chemin de fer arrivent en ligne droite, l'une sur le point $A(-4;4)$, l'autre sur le point $B(4;4)$ dans un repère bien choisi comme indiqué sur la figure suivante :



On projette de relier ces deux lignes par un arc de courbe allant de A à B.

1) Déterminez une fonction polynôme de degré minimal réalisant cette connexion de telle sorte que les passages en A et B se fassent « sans heurts ».
2) Parmi les cinq fonctions suivantes, lesquelles réaliseraient une telle connexion « sans heurts » ?

$$f_1(x)=\frac{1}{8}x^2+2$$

$$f_2(x)=8-\sqrt{32-x^2}$$

$$f_3(x) = -\frac{1}{512}x^4 + \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{2}$$

$$f_4(x) = -\frac{8}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right) + 4$$

$$f_5(x) = -\frac{512}{x^2+48} + 12$$

3) En dehors d'une connexion « sans heurts » en A et en B, on veut que deux conditions supplémentaires soient réalisées :

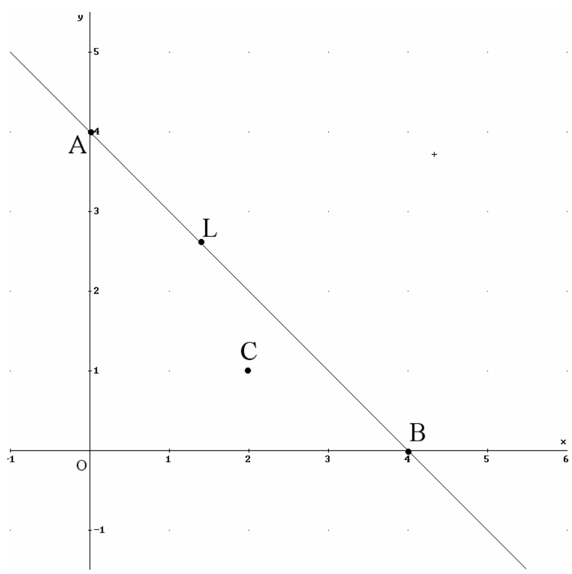
1re condition : la longueur de l'arc de courbe allant de A à B soit aussi petite que possible.

2e condition : la courbure maximale de l'arc AB doit être aussi faible que possible afin que les trains circulant entre A et B ne soient pas obligés de trop réduire leur vitesse.

Quelle est alors la meilleure solution ?

Problème 6 (construction d'une route)

Une localité L est traversée par une route rectiligne AB avec $A(0,4)$ et $B(4,0)$. Pour mettre fin aux nuisances dues à un trafic de plus en plus dense, la commune décide de construire une route de contournement. Cette route doit passer par $C(2,1)$ et doit déboucher tangentiellement en A et en B dans l'ancienne route.



1) Etablissez l'expression d'un polynôme P du 4^e degré qui vérifie ces contraintes. Esquissez le graphe de P.
2) Examinez le comportement de P aux points de raccordement (est-ce que les raccords se font « sans heurts »).
3) Cherchez l'expression analytique d'un polynôme R de degré minimal qui vérifie les contraintes de départ tout en réalisant un raccord « sans heurts » en A et en B. Esquissez le graphe de R sur la même figure.

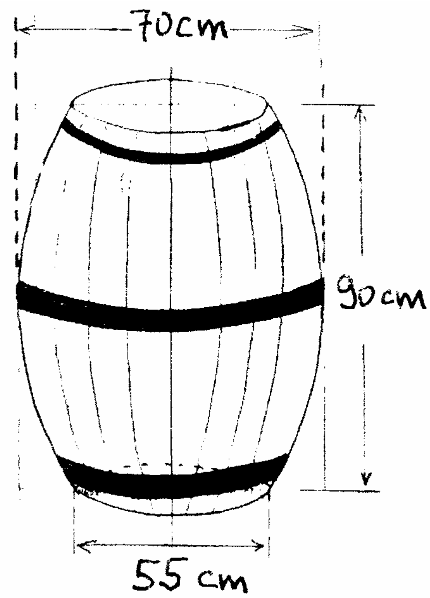
Problème 7 (tonneau à vin)

La figure ci-contre représente un tonneau à vin à sections circulaires :

hauteur $= 90\text{ cm}$

diamètre de la plus petite section $= 55\text{ cm}$

diamètre de la plus grande section $= 70\text{ cm}$



Dans la suite on négligera l'épaisseur de la paroi du tonneau.

1) Un vigneron a rangé les tonneaux de sa cave en les classant par catégories de 100, 200, 250, 300 et 350 litres. Estimez, avec les moyens de la géométrie élémentaire, dans quelle catégorie est classé notre tonneau.
2) Déterminez le volume du tonneau en vous servant du calcul intégral.
3) L'astronome allemand Johannes Kepler (1571-1630) a établi la formule suivante pour calculer le volume d'un tonneau :

$$V = \frac{\text{aire de la base inf érieure} + 2 \cdot \text{aire de la base moyenne}}{3} \cdot \text{hauteur}$$

Comparez le résultat obtenu à l'aide de cette formule avec celui obtenu par intégration.

4) Quel est le niveau du vin lorsque le tonneau est repli aux deux tiers de son volume ?

Problème 8 (démographie)

En 1990 l'ONU a réalisé une étude sur l'évolution de la population mondiale. Le tableau suivant donne les résultats de cette étude :

Années	1960	1990	2000	2025	2050	2100	2150	Après 2200
Population en milliards	3,02	5,3	6,23	8,15	9,75	11,04	11,54	Stabilisée à 11,6

Alors que les deux premiers chiffres ont été effectivement *mesurés* en 1990, les six suivants constituaient un *pronostic* sur l'évolution ultérieure. Nous essayerons par la suite de dégager le modèle mathématique qui a permis d faire ce pronostic.

1) Voici trois fonctions qui représentent chacun un modèle de croissance différent :

- croissance *linéaire* : $y(t) = 0,093 \cdot t + 5,3$
- croissance *exponentielle* : $y(t) = 5,3 \cdot e^{0,016 \cdot t}$
- croissance *parabolique* : $y(t) = \sqrt{1,072 \cdot t + 28,09}$

y(t) indique la population (en milliards) à l'instant t (en années, l'année 1990 correspondant à t = 0, 1991 à t = 1, etc)

a) Représentez les graphes des trois fonctions pour la période allant de 1960 à 2150.

b) A l'aide de deux arguments différents, expliquez pourquoi aucune de ces fonctions ne peut être à la base du pronostic de l'ONU.

c) Sur la même figure reportez les données de l'ONU, puis jugez de la qualité de ces trois modèles.

2) En fait la fonction qui a servi pour l'étude de l'ONU est une fonction logistique :

$$y(t) = \frac{a}{1 + be^{-kt}}, \text{ avec } \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ et } k \in \mathbb{R}_+^*$$

a) Déterminez a.

b) Déterminez b et k sur la base des données des années 1960 et 1990.

3) Dans la suite on supposera que l'étude de l'ONU s'est basée sur la fonction :

$$y(t) = \frac{11,6}{1 + 1,1887 \cdot e^{-0,029 \cdot t}}$$

a) En traçant le graphe de cette fonction, jugez si elle est bien à la base du pronostic de l'ONU.

b) Déterminez les asymptotes, les extrema et les points d'inflexion de cette fonction.

c) Pour quelles périodes (en années) ce modèle donne-t-il un accroissement annuel de la population inférieur à 0,05 milliards (50 millions) ?

d) Calculez la moyenne de la population mondiale entre 1990 et 2150. Justifiez votre réponse !

e) Que représente le point d'inflexion de cette fonction dans le contexte de la croissance démographique mondiale ? Justifiez votre réponse !

Problème 9 (tâche répétitive)

Dans beaucoup de métiers, il faut accomplir la même tâche de façon répétitive et on observe alors que le temps d'exécution d'une telle tâche dépend de l'apprentissage ; c'est-à-dire qu'au fur et à mesure que l'employé s'habitue à ce nouveau travail, il augmente ses performances jusqu'à atteindre une performance maximale.

Voici un tableau indiquant le temps que met un informaticien pour encoder des dossiers d'inscription dans une école :

n-ième dossier	1	50	100	150	200
temps mis pour encoder ce dossier (en min)	6,76	3,62	3,29	3,13	3,02

1) Déterminez une fonction polynôme f donnant le temps nécessaire pour encoder le *n*-ième dossier et qui tient compte des données du tableau.

2) Calculez une approximation du temps nécessaire pour encoder les 200 premiers dossiers. Justifiez votre calcul !

3) On donne maintenant la fonction $g: x \to 2 + 6\cdot(1+x)^{-\frac{1}{3}}$.

Jugez de la qualité de ce modèle en tenant compte des données mesurées et en le comparant avec le modèle trouvé en **1)**. (*on s'intéressera tout particulièrement à l'évolution à long terme*)

4) Calculez une approximation du temps nécessaire pour encoder les 200 premiers dossiers d'après ce modèle.

5) Une école doit encoder 600 dossiers. Sachant qu'un informaticien gagne 18 € l'heure, est-il préférable d'engager une personne pour encoder les 600 dossiers seule ou vaut-il mieux engager deux informaticiens pour encoder 300 dossiers chacun ? (*pensez au facteur temps et au facteur coût !*)

Problème 10 (taux d'alcoolémie) *, examen juin 2006*

Après avoir bu une certaine quantité d'alcool q (en g) à l'instant $t = 0\ h$, on observe que le taux d'alcool dans le sang, appelé **taux d'alcoolémie** en ‰, varie avec le temps t (en *heures*) approximativement selon la fonction suivante :

$$f(t) = \frac{q}{b} \cdot \left(1 - e^{-a \cdot t}\right) - 0{,}145 \cdot t .$$

Le paramètre b dépend de la personne en question, notamment de son poids, et vaut ici $b = 29{,}5$. Le paramètre a dépend en particulier de la présence de nourriture dans l'estomac. Bien sûr, seule la partie de la courbe de f située dans le premier quadrant du repère a une signification réelle et tous les résultats des points suivants sont à donner à 10^{-3} près.

1) A l'instant $t = 0\ h$, une personne boit *à jeun* trois verres de vin contenant chacun en moyenne 11 g d'alcool. Vu l'absence de nourriture dans son estomac, la valeur de a vaut $a = 9$.

- **a)** Représentez dans un repère approprié le taux d'alcoolémie en fonction de t.
- **b)** Déterminez graphiquement l'intervalle de temps pendant lequel la personne a de l'alcool dans le sang.
- **c)** Analysez les variations du taux d'alcoolémie en fonction de t. Quand atteint-il son maximum ? Déterminez aussi sa valeur maximale. Résumez les résultats dans un tableau de variation.
- **d)** Sachant qu'un conducteur au Luxembourg est en infraction si son taux est égal ou supérieur à 0,8 ‰, déterminez graphiquement l'intervalle de temps pendant lequel la personne ne devrait pas conduire.
- **e)** L'***effet*** d'une substance dépend aussi bien de son taux que du temps de sa présence dans le corps humain. Il est souvent décrit par l'aire de la surface comprise entre l'axe des t et la courbe G_f. Déterminez l'*effet* des trois verres de vin !

2) Après avoir bien mangé, la même personne boit à l'instant $t = 0\ h$ trois verres de vin contenant chacun en moyenne 11 g d'alcool. Mais cette fois-ci, le paramètre a vaut $a = 1{,}2$.

- **a)** Trouvez le taux d'alcoolémie maximal dans ces nouvelles conditions. Est-ce qu'il dépasse le seuil de 0,8 ‰ ?
- **b)** Analysez si la personne pourrait boire un quatrième verre et rester en dessous du taux limite de 0,8 ‰.

Problème 11 (flétan du Pacifique), *examen septembre 2006*

Voici l'image d'un *flétan* (Heilbutt)

La longueur (en *cm*) de beaucoup de poissons de t années communément mis en vente peut être donnée par une fonction de croissance de *von Bertalanffy* de la forme :

$$f(t) = a \cdot \left(1 - b \cdot e^{-k \cdot t}\right)$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+^*$ sont des constantes.

Le poids (en *kg*) d'un flétan du Pacifique en fonction de sa longueur (en *m*) est donné par la formule :

$$p(l) = 10{,}375 \cdot l^3$$

1) Déterminez a, b et k sachant qu'à la limite un flétan atteindra une longueur de 2 m, qu'un flétan de 10 ans a une longueur de 168,4 cm et que la vitesse de croissance d'un flétan de 10 ans est de 5,69 cm/an.

2) Pour la suite de l'exercice on prendra $a = 200$, $b = 0{,}956$ et $K = 0{,}18$. Estimez l'âge et la vitesse de croissance d'un flétan dont la longueur est de 100 cm.

3) Calculez le poids d'un flétan de 5 ans.

4) Quelle est la limite du poids atteint par un flétan du Pacifique ?

5) **a)** Exprimez le poids d'un flétan en fonction de son âge.

b) Quand la vitesse de croissance du poids est-elle maximale et quelle est alors sa valeur ? (*utilisez l'expression de* **5)a)**)