Enseignement secondaire		
Division supérieure		
MATH2 - Mathématiques II		
Divers		
1CB_1MB		

Exercices supplémentaires

Exercice 1

Étudier le comportement asymptotique des fonctions suivantes et étudier la position de la courbe représentative par rapport à une asymptote horizontale ou oblique éventuelle:

$f_1 : x \mapsto \frac{x}{2} + 1 + \frac{\ln x}{x}$

$f_2 : x \mapsto x + \ln \frac{ex}{x+1}$

$f_3 : x \mapsto 2x - 3 + \ln \frac{2x+1}{x+2}$

$f_4 : x \mapsto 3x + 5 - e^{-x}$

$f_5 : x \mapsto 2x + 1 + \frac{2e^x}{e^x + 3}$

$f_6 : x \mapsto x + 1 - xe^x$

$f_7 : x \mapsto \frac{e^x - 2}{e^x + 1}$

$f_8 : x \mapsto \ln\left(e^x + 1\right)$

Exercice 2

A

Soit la fonction g définie par $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.

1. Déterminer le domaine de définition de g.
2. Déterminer les limites de g aux bornes du domaine de définition.
3. Étudier les variations de g. Dresser le tableau de variation de g.
4. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de g sur son domaine de définition.

B

Soit la fonction *f* définie par $f(x) = x - 1 - \dfrac{\ln x}{x^2}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1. Déterminer le domaine de définition de *f*.
2. Déterminer les limites de *f* aux bornes du domaine de définition.
3. Calculer sa fonction dérivée. Montrer qu'elle s'écrit: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.
4. Utiliser les résultats de la partie A pour déterminer les variations de *f*.
5. Rechercher les branches infinies de *f*.
6. Étudier la position de la courbe C_f par rapport à une éventuelle asymptote oblique.
7. Étudier la concavité de C_f.
8. Dresser le tableau de variation de *f* et tracer C_f et son éventuelle asymptote oblique dans un repère orthonormé (unité de longueur 2 cm).

<u>Exercice 3</u>

A

Soit la fonction *g* définie par $g(x) = x\ln x - 2x + 3$.

1. Déterminer le domaine de définition de *g*.
2. Déterminer les limites de *g* aux bornes du domaine de définition.
3. Étudier les variations de *g*. Dresser le tableau de variation de *g*.
4. Calculer $g(e)$ et en déduire le signe de *g* sur son domaine de définition.

B

Soit la fonction *f* définie par $f(x) = 2x^2\ln x - 5x^2 + 12x$ et soit C_f sa courbe représentative.

1. Déterminer le domaine de définition de *f*.
2. Déterminer les limites de *f* aux bornes du domaine de définition.
3. Calculer sa fonction dérivée. Montrer qu'elle s'écrit: $f'(x) = 4g(x)$.
4. Utiliser les résultats de la partie A pour déterminer les variations de *f*. Dresser le tableau de variation de *f*.
5. Déterminer un éventuel point d'inflexion *I* et une équation de la tangente t_1 à C_f en ce point.
6. Déterminer une équation de la tangente t_2 à C_f en son point *J* d'abscisse 1.
7. Tracer C_f, t_1 et t_2 dans un repère orthogonal (unités: 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée).

Exercice 4

A

Soit la fonction g définie par $g(x) = x + e^{-x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de g.
2. Déterminer les limites de g aux bornes du domaine de définition.
3. Étudier les variations de g. Dresser le tableau de variation de g.
4. Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de g sur son domaine de définition.
5. Représenter graphiquement g dans un repère orthonormé (unité de longueur 2 cm).

B

Soit la fonction f définie par $f(x) = \left(x + e^{-x}\right)^2$ et soit C_f sa courbe représentative.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes du domaine de définition.
3. Calculer sa fonction dérivée. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ et $g'(x)$.
4. Utiliser les résultats de la partie A pour déterminer les variations de f. Dresser le tableau de variation de f.
5. Tracer C_f dans un repère orthonormé (unité de longueur 2 cm).

Exercice 5

A

Soit la fonction g définie par $g(x) = 1 - (x-1)^2 e^{-x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de g.
2. Déterminer les limites de g aux bornes du domaine de définition.
3. Étudier les variations de g. Dresser le tableau de variation de g.
4. Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de g sur son domaine de définition.
5. Représenter graphiquement g dans un repère orthonormé (unité de longueur 2 cm).

B

Soit la fonction f définie par $f(x) = x + e^{-x}\left(x^2 + 1\right)$ et soit C_f sa courbe représentative.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes du domaine de définition.
3. Calculer sa fonction dérivée. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.
4. Utiliser les résultats de la partie A pour déterminer les variations de f. Dresser le tableau de variation de f.
5. Déterminer d'éventuels points d'inflexion I et J et une équation de chacune des tangentes t_1 et t_2 à C_f en ces points.
6. Tracer C_f, t_1 et t_2 dans un repère orthonormé (unité de longueur 2 cm).

Exercice 6

Soit $f_m(x) = e^{2x} - me^x - 1 \quad (m > 0)$ définie sur $\mathbb{R}$ et soit C_{f_m} sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer, s'il y en a, les asymptotes et les branches paraboliques de C_{f_m}.
2. Discuter, en fonction de *m*, les variations de f_m.
3. Démontrer que pour chaque *m*, C_{f_m} admet exactement un point d'inflexion I_m et déterminer les valeurs exactes des coordonnées de I_m.
4. Démontrer qu'il existe un réel m_0 tel que $I_{m_0} \in (Oy)$ et déterminer l'équation réduite de la tangente à $C_{f_{m_0}}$ au point I_{m_0}.

Exercice 7

Soit $f_m(x) = \dfrac{e^x}{x^2 - mx + 1}$ $(0 \le m \le 2)$ et soit C_{f_m} sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer, en fonction de *m*, le domaine de définition de f_m.
2. Déterminer, s'il y en a, les asymptotes et les branches paraboliques de C_{f_m}.
3. Discuter, en fonction de *m*, les variations de f_m.
4. Pour quelle(s) valeur(s) de m $(0 \le m < 2)$, la tangente à C_{f_m} au point $P(0; f_m(0))$ passe-t-elle par le point $A(1; f_m(1))$? Justifier la réponse.

Exercice 8

Soit $f_m(x) = \ln\dfrac{1 - mx}{x + 1}$ $(m > 0)$ et soit C_{f_m} sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer, en fonction de *m*, le domaine de définition de f_m.
2. Déterminer, s'il y en a, les asymptotes de C_{f_m}.
3. Discuter, en fonction de *m*, les variations de f_m.
4. Démontrer que C_{f_m} admet un seul point d'inflexion I_m et calculer les coordonnées de I_m.

Exercice 9

Soit $f_m(x) = \ln\left|1 + me^{-x}\right|$ $(m \in \mathbb{R})$ et soit C_{f_m} sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer, en fonction de *m*, le domaine de définition de f_m.
2. Déterminer, s'il y en a, les asymptotes et les branches paraboliques de C_{f_m}.
3. Discuter, en fonction de *m*, les variations de f_m.
4. Discuter, en fonction de *m*, la concavité de C_{f_m}.
5. Démontrer qu'il existe un réel m_0 tel que la droite *t* d'équation $y = x$ est une tangente à $C_{f_{m_0}}$ et tracer $C_{f_{m_0}}$ avec tous ses éléments caractéristiques.

Exercice 10

Déterminer en fonction du paramètre réel *m* le nombre de solutions de l'équation $\ln \dfrac{x+1}{x^2 - m} = 0$.

Exercice 11

Déterminer en fonction du paramètre réel *m* le nombre de solutions de l'équation $m \ln x = x$.

Exercice 12

Déterminer en fonction du paramètre réel $m > 0$ le nombre de solutions de l'équation $m^x = x$.

Exercice 13

Pour chaque $m > 0$, on considère les fonctions f_m et g_m définies par $f_m(x) = \sqrt{mx - 1}$ et $g_m(x) = \dfrac{-m}{2}x + 2$. Soient C_{f_m} et C_{g_m} les courbes représentatives de f_m et g_m dans un repère orthonormé.

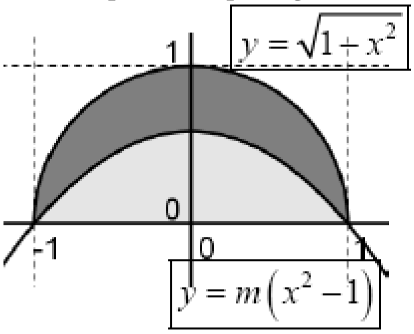
1. Montrer que C_{f_m} et C_{g_m} se coupent en un seul point I_m et calculer l'abscisse de I_m.
2. Représenter graphiquement C_{f_2} et C_{g_2} dans un repère orthonormé.
3. Déterminer la valeur de *m* pour laquelle l'aire de la surface délimitée par C_{f_m}, C_{g_m} et (*Ox*) est égale à 1 u.a.
4. Déterminer la valeur de *m* pour laquelle le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de (*Ox*) de la surface délimitée par C_{f_m}, C_{g_m} et (*Ox*) est égal à 1 u.v.

Exercice 14

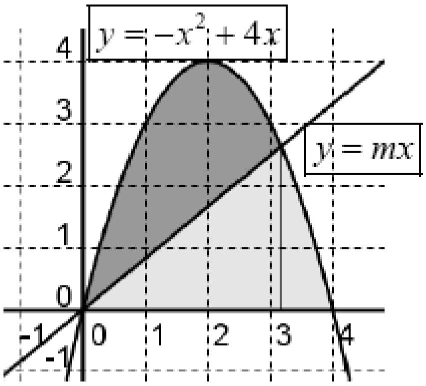
Dans chacun des cas suivants, déterminer la valeur arrondie à 0,001 près du réel *m* tel que l'aire de la surface coloriée en gris foncé soit égale à l'aire de la surface coloriée en gris clair.

Les figures ci-dessous ne sont pas exactes!

1. L'arc de parabole partage le demi-disque en deux surfaces de même aire.



2. La droite partage la surface délimitée par la parabole et (Ox) en deux surfaces de même aire.



3. La droite partage la surface délimitée par la parabole et (Ox) en deux surfaces de même aire.