EXERCICES POUR GEOGEBRA

1) DROITES REMARQUABLES D'UN TRIANGLE

Définissez, sur la même feuille, quatre « macros » qui servent à dessiner, à partir de 3 points (*objets initiaux*):

a) le cercle circonscrit du triangle défini par ces 3 points et son centre.

b) le cercle inscrit au triangle défini par ces 3 points et son centre.

c) l'orthocentre du triangle défini par ces 3 points.

d) le centre de gravité du triangle défini par ces 3 points.

2) DROITE D'EULER (Leonhard Euler, 1707 – 1783, mathématicien suisse)

Construisez un triangle $\Delta(ABC)$, puis utilisez les macros définies en **1)** pour construire le centre O du cercle circonscrit, le centre I du cercle inscrit, l'orthocentre H et le centre de gravité G. Tracez la droite passant par O et H, cette droite est appelée **droite d'Euler**. Déformez le triangle $\Delta(ABC)$ et observez les points O, I, H et G (mesurez également les distances entre ces points !).

Enoncez le théorème que vous venez de vérifier !

3) ORTHOCENTRE

Construisez :

a) un triangle $\Delta(ABC)$ et son orthocentre H,

b) le triangle $\Delta(DEF)$ tel que $(DE)\parallel(AB)$ et $C\in(DE)$, $(EF)\parallel(BC)$ et $A\in(EF)$, $(DF)\parallel(AC)$ et $B\in(DF)$.

Que peut-on dire de H par rapport au triangle DEF ?

4) TRIANGLE ORTHIQUE

Définition

Soit un triangle $\Delta(ABC)$ *non rectangle* et A', B', C' les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B et C avec $A'\in(BC)$, $B'\in(AC)$ et $C'\in(AB)$. Le triangle $\Delta(A'B'C')$ est appelé **triangle orthique** du triangle $\Delta(ABC)$.

Que peut-on dire du cercle inscrit du triangle orthique d'un triangle $\Delta(ABC)$?

5) CERCLE D'EULER (ou « cercle des neuf points »)

Construisez :

a) un triangle $\Delta(ABC)$, son cercle circonscrit de centre O, son orthocentre H et son triangle orthique $\Delta(A'B'C')$,

b) les milieux A'', B'' et C'' des côtés [BC], [AC] et [AB] respectivement et le triangle $\Delta(A"B"C")$, appelé **triangle médian** de $\Delta(ABC)$,

c) le cercle circonscrit $\mathcal{C}$ de centre O' du triangle médian : ce cercle est appelé **cercle d'Euler**,

d) les milieux A''', B''' et C''' des segments [AH], [BH] et [CH].

Observez le cercle d'Euler et son centre O'puis énoncez le résultat correspondant connu sous le nom de « théorème du cercle d'Euler ».

6) QUADRILATERES COMPLETS I : DROITE DE NEWTON (Isaac Newton, 1643 – 1723, mathématicien, physicien et philosophe anglais)

Construisez :

a) deux segments [BC] et [CD], deux points $A \in [CD]$ et $E \in [BC]$, les segments $[ED]$ et $[AB]$, puis le point $F \in [AB] \cap [ED]$

Définition :

La figure ABCDEF, formée de 4 segments 2 à 2 sécants et portés par 4 droites 3 à 3 non concourantes, est appelée **quadrilatère complet** de « sommets » A, B, C, D, E, F et de « diagonales » $[BD], [AE]$ et $[CF]$.

b) les 3 diagonales du quadrilatère complet et leurs milieux respectifs M, P et Q (*une couleur pour le quadrilatère, une autre pour ses diagonales*),

c) la droite (MP) appelée **droite de Newton du quadrilatère complet.**

Observez la droite de Newton puis formulez le théorème correspondant.

7) QUADRILATERES COMPLETS II : POINT ET CERCLE DE MIQUEL

(Auguste Miquel, mathématicien français de la première moitié du 19e sècle)

Construisez :

a) un quadrilatère complet ABCDEF,

b) les cercles circonscrits $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ des triangles $\Delta(\mathrm{ABC})$, $\Delta(\mathrm{CDE})$, $\Delta(\mathrm{BEF})$ et $\Delta(\mathrm{ADF})$ respectivement, de centres O_1, O_2, O_3 et O_4.

Que constatez-vous en observant ces 4 cercles et leurs centres ? Quel est d'après vous ce point et ce cercle de Miquel dont parle le titre de l'exercice ?

8) AIRE D'UN TRIANGLE

Soit un triangle $\Delta(\mathrm{ABC})$ de côtés a, b, c et d'aire S, r le rayon de son cercle inscrit, R le rayon de son cercle circonscrit et $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ son demi périmètre.

Vérifiez les trois formules suivantes :

$$S = \frac{abc}{4R} \qquad (1)$$

$$S = pr \qquad (2)$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad (3)$$

(*formule de* ***Héron, mathématicien grec d'Alexandrie du 1er siècle de notre ère)***)

9) QUADRILATERE INSCRIT DANS UN CERCLE

Construisez un cercle $\mathcal{C}$ et A, B, C, D quatre points sur ce cercle : on dit que le quadrilatère ABCD est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$. En appelant p le demi périmètre de ABCD, vérifiez la formule suivante (appelée *formule de* ***Brahmagupta***) :

$$\text{Aire de ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Vous constatez (par déformation …) que la formule n'est cependant valable que si on impose une petite condition supplémentaire pour ABCD….. laquelle ?

10) CERCLE DE TAYLOR

Construisez :

- un triangle $\Delta(\mathrm{ABC})$ et son triangle orthique $\Delta(\mathrm{A'B'C'})$ (voir exercice 3),

- les projections orthogonales A'' et A''' de A' sur $[AB]$ et $[AC]$,
- les projections orthogonales B'' et B''' de B' sur $[BA]$ et $[BC]$,
- les projections orthogonales C'' et C''' de C' sur $[CA]$ et $[CB]$.

a) Dans le contexte de cette figure on parle d'un certain cercle $\mathcal{C}_T$ de centre O appelé **cercle de Taylor** du triangle $\Delta(ABC)$. De quel cercle pensez-vous qu'il s'agit ?

b) Construisez le triangle médian du triangle orthique de $\Delta(ABC)$ et analysez le rapport entre ce triangle et le centre O du cercle de Taylor.

c) Enoncez le théorème du cercle de Taylor.

11) DROITE DE SIMSON (Robert Simson, 1687 – 1768, mathématicien écossais)

a) Construisez un triangle $\Delta(ABC)$, son cercle circonscrit $\mathcal{C}$, un point $P \in \mathcal{C}$ et les **projections orthogonales** P', P'' et P''' de P sur les droites (AB), (BC) et (AC) respectivement. Que constatez-vous ?

b) Construisez un point $Q \notin \mathcal{C}$ et vérifiez que la propriété constatée pour P n'est plus vraie !

c) Essayez de « deviner » ce qu'on entend par **« droite de Simson associée au point P ».**

d) Enoncez le théorème que vous venez de vérifier.

e) Définissez une macro « droite de Simson » qui à partir d'un triangle, de son cercle circonscrit et d'un point P de ce cercle dessine la droite de Simson associée à P.

12) DROITE DE STEINER (Jakob Steiner, 1796 – 1863, mathématicien suisse)

a) Construisez un triangle $\Delta(ABC)$, son cercle circonscrit $\mathcal{C}$, un point $P \in \mathcal{C}$ et les symétriques P', P'' et P''' de P par rapport aux droites (AB), (BC) et (AC) respectivement. Que constatez-vous ?

b) Construisez un point $Q \notin \mathcal{C}$ et vérifiez que la propriété constatée pour P n'est plus vraie !

c) Essayez de « deviner » ce qu'on entend par **« droite de Steiner associée au point P ».**

d) Enoncez le théorème que vous venez de vérifier.

e) Définissez une macro « droite de Steiner » qui à partir d'un triangle, de son cercle circonscrit et d'un point P de ce cercle dessine la droite de Steiner associée à P.

13) Propriétés des droites de Simson et Steiner

En utilisant les macros définies aux exercices précédents, vérifiez les propriétés suivantes :

Propriété 1 :

En faisant parcourir au point P le cercle CC, vous pouvez observer que les droites de Steiner passent toutes par un certain point fixe ! Essayez de trouver de quel point bien connu il s'agit et vérifiez-le !

Propriété 2 :

Examinez les positions relatives des droites de Simson et Steiner associées à un même point.

Propriété 3 : Soient d et d' les droites de Simson associées aux points P et R, alors: $d \perp d' \Leftrightarrow \cdots$ Cette propriété est-elle vraie aussi pour les droites de Steiner ?

Propriété 4 : Soient A, B, C, D quatre points appartenant à un même cercle, d_1 la droite de Simson associée au point A par rapport au triangle $\Delta(BCD)$, d_2 la droite de Simson associée au point B par rapport au triangle $\Delta(ACD)$, d_3 la droite de Simson associée au point C par rapport au triangle $\Delta(ABD)$ et d_4 la droite de Simson associée au point D par rapport au triangle $\Delta(ABC)$. Que peut-on dire de ces quatre droites de Simson ?

14) EPICYCLES

Petit commentaire historique

Au 2e siècle après J.-C., vers 140, le savant grec **Claude Ptolémée** d'Alexandrie (Egypte), écrivit un livre, *l'Almageste* (« la Très grande » en arabe, le titre grec original ayant été plus modestement *Syntaxe mathématique*), dans lequel il exposait la cosmologie (i.e. la représentation de l'univers) de son temps. Ce livre, qui allait devenir la « bible » des astronomes européens et arabes pendant 14 siècles, reposait sur trois grands principes « physiques » définis cinq siècles plus tôt par le philosophe grec **Aristote** (385-322 av. J.-C.):

1er principe :

La terre est le centre immobile de l'Univers autour duquel évoluent le soleil et les planètes, c'est le **géocentrisme** (*gè* = terre, en grec).

2e principe : I

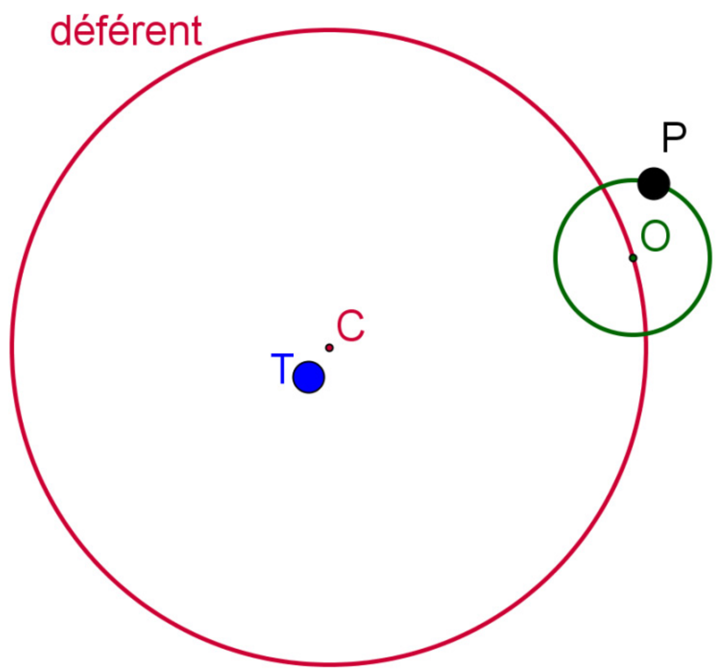
Il y a une **dichotomie** (i.e. une division en deux parties nettement séparées) **de l'Univers** : d'une part, le monde terrestre, qui va jusqu'à l'orbe de la Lune (monde « sublunaire »), qui est le monde du changement, du périssable, de la génération et de la corruption, de la vie et de la mort, des mouvements rectilignes (vers le haut pour les éléments légers, l'air et le feu ; vers le bas, pour les éléments lourds, la terre et l'eau) ; d'autre part, le cosmos, au-delà de l'orbe de la Lune, qui est le monde de l'immuable, du non-périssable, de la non-physique (les lois physiques terrestres n'y sont plus valables…), de la perfection absolue, « divine ».

3e principe :

Le seul mouvement digne de ces corps célestes parfaits est le **mouvement circulaire uniforme** ou, à défaut, la combinaison de tels mouvements circulaires.

Or dès cette époque les observations astronomiques montraient clairement que les distances terre-planètes et terre-soleil étaient variables et que les mouvements montraient des accélérations, des stagnations et même des rétrogradations apparentes ! Afin d'expliquer ces « anomalies » les astronomes grecs avaient

imaginé le **modèle géométrique** des **« épicycles »**. Selon ce modèle chaque planète P (y compris le soleil !) a un mouvement circulaire uniforme dont le centre O suit lui-même un mouvement circulaire uniforme dont le centre est la terre T ! Ce cercle de centre T est appelé le **« déférent »**. Si ces deux mouvements circulaires se faisaient dans le même sens, on parlait **d'épicycles directs**, dans le cas contraire **d'épicycles rétrogrades**.
En fait on était amené à considérer que la terre se trouvait légèrement à côté du centre C du cercle déférent (T était « excentrée » !) et au cours du temps on en venait également à envisager des « épicycles d'épicycles » afin d'adapter le modèle aux observations astronomiques de plus en plus précises….



Moyennant ces adaptations ce modèle « ptoléméen » (purement géométrique, puisque d'après le 2^{e} principe les planètes ne sont pas soumises aux lois physiques !) parvint à survivre pendant 14 siècles jusqu'en 1541, date de la publication par le moine polonais **Nicolas Copernic** (1473-1543) de son ouvrage *De revolutionibus orbium caelestium (De la révolution des orbes célestes)* dans lequel il abandonna le principe du géocentrisme pour passer à l'**héliocentrisme** (*hélios* = soleil, en grec) : dans ce livre il pose en effet le soleil au centre de l'Univers, la terre tournant comme toutes les planètes autour du soleil ! Ce **changement de repère**, qui constitue une des plus grandes révolutions scientifiques de tous les temps et qu'on désigne par **« révolution copernicienne »**, n'a cependant été imaginée par Copernic que pour mieux préserver le 3^{e} principe du mouvement circulaire (en le débarrassant des complications des épicycles et surtout de l'excentricité), qu'il considérait donc comme plus fondamental que le géocentrisme ! Il a fallu attendre **Johannes Kepler** (1571-1630) qui, en s'appuyant sur les observations très précises de l'astronome danois **Tycho Brahé** (1546-1601) et l'héliocentrisme de Copernic, arrivait en 1619 à établir ses trois lois sur les mouvements des planètes encore valables aujourd'hui, dont celle qui pose la **forme elliptique** et non circulaire des trajectoires des planètes (d'où **abandon du 3^{e} principe** !). En même temps **Galilée** (1564-1642), le plus grand physicien de l'époque considéré comme le fondateur de la physique moderne, affirmait (sans être toutefois à même d'en fournir une preuve irréfutable !) la **réalité physique** du mouvement de la terre qui selon lui était plus qu'un simple artifice géométrique comme le croyait encore Copernic! (d'où également **l'abandon définitif du 1er principe** !). Le point final de cette évolution fut atteint en 1687 avec la publication par le physicien anglais **Isaac Newton** (1642-1727) de son livre *Philosophiae naturalis principia mathematica (Principes mathématiques de la philosophie naturelle)* dans lequel, à partir de la fameuse formule fondamentale $F = m\gamma$ et de la théorie mathématique des fonctions dérivables qu'il venait d'inventer, il arrivait à **démontrer mathématiquement les lois de Kepler en appliquant aux corps célestes les mêmes lois physiques que celles qui régissent les phénomènes terrestres**. Le 2^{e} principe de la dichotomie fut ainsi abandonné à son tour. Depuis lors les trois principes de la physique aristotélicienne furent définitivement abandonnés.

Remarquons pour finir que dès le 3^{e} siècle avant J.-C. un astronome grec, **Aristarque de Samos**, formula l'hypothèse que le soleil se trouve au centre de l'Univers ! Faute de preuves suffisantes, cet héliocentrisme « prématuré » ne trouva cependant aucun écho à l'époque….

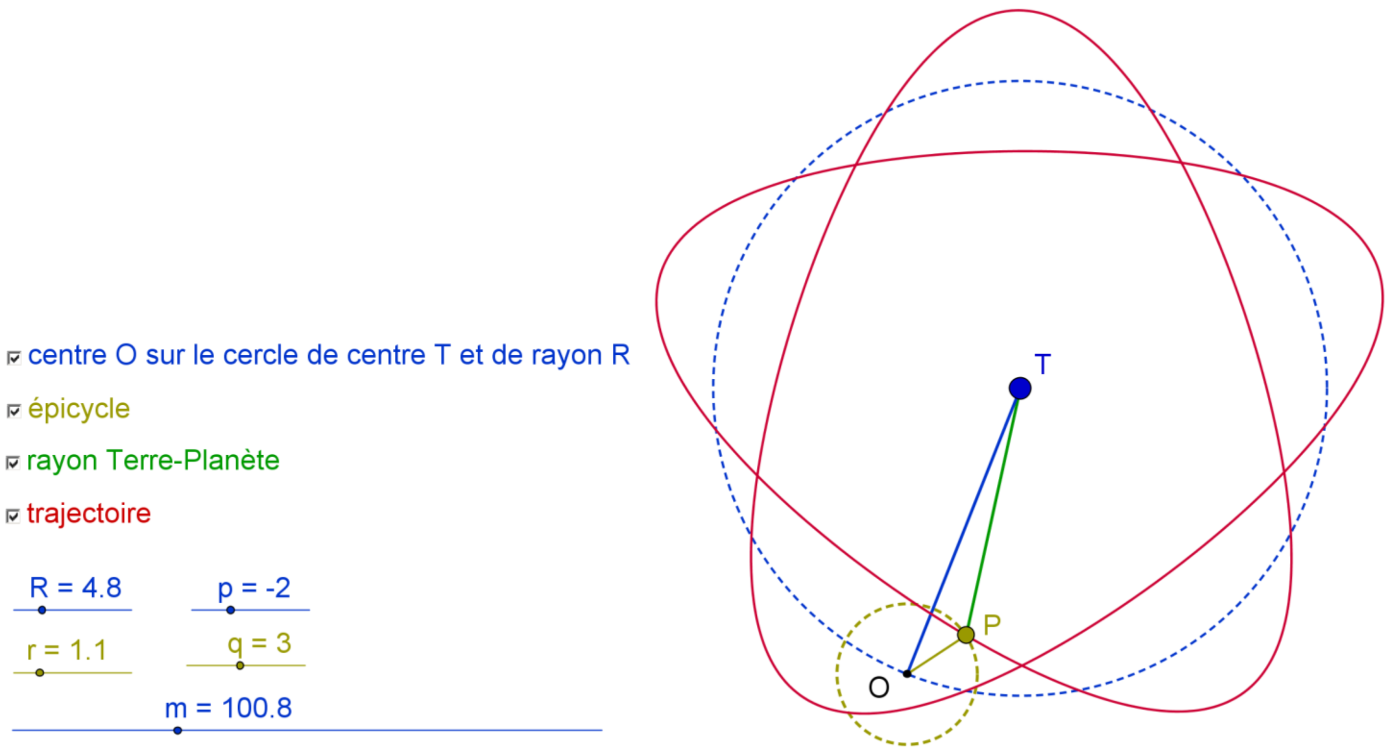
Construction des épicycles

Afin de montrer la richesse de la théorie des épicycles par la grande variété de courbes qu'on peut obtenir avec elle, nous allons réaliser avec GEOGEBRA une construction qui permettra de faire évoluer un point P (planète) en épicycle autour d'un point T (terre) sans tenir compte de l'excentricité.

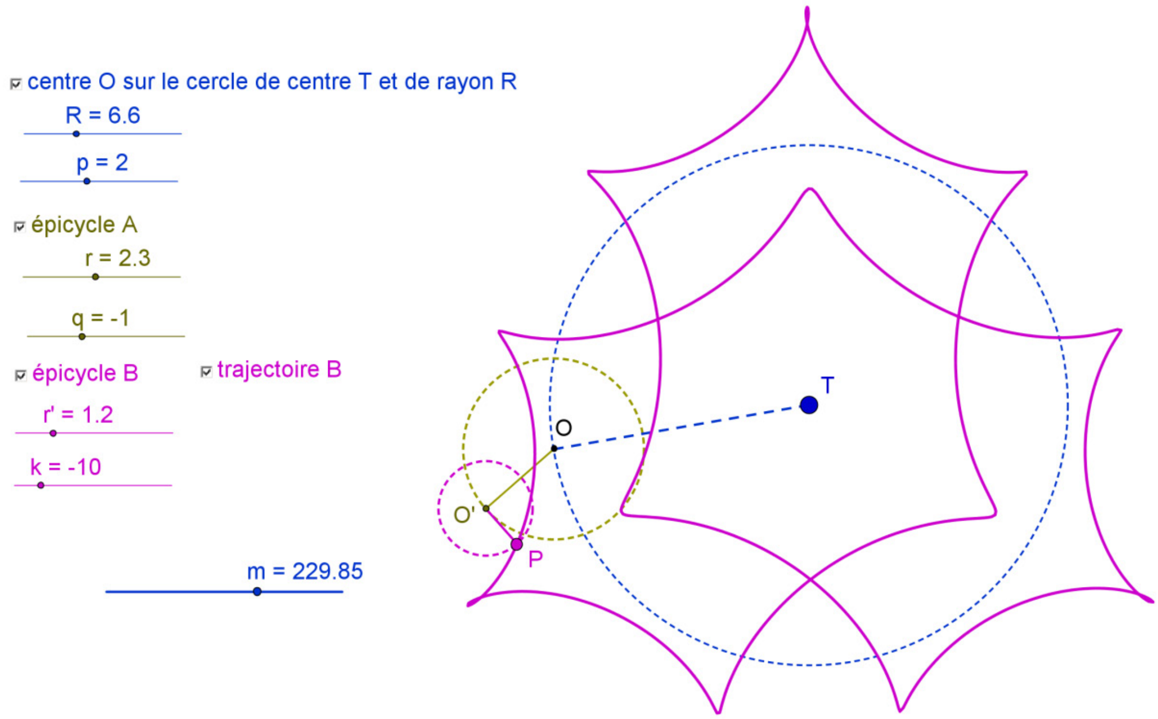
Pour cela vous pouvez suivre les étapes suivantes (ou alors inventer votre propre construction…) :

- Dessinez un cercle de centre T (pour « terre ») et de rayon variable R :
    - vous définissez d'abord un **curseur** R avec $0 \leq R \leq 15$ par exemple,
    - ensuite vous utilisez la commande « cercle avec centre et rayon »
- Dessinez un point fixe A sur ce cercle (positionné « à la verticale »)
- Construisez l'image O de A par la rotation de centre T et d'angle variable $p \cdot m°$:
    - vous définissez d'abord un **curseur** m avec $0 \leq m \leq 360$ (incrément : 0,1)
    - vous définissez ensuite un **curseur** p avec $-15 \leq p \leq 15$ et <u>p entier</u> (incrément : 1)
    - en faisant varier le cureur m de 0 à 360, le point O doit faire p fois le tour du cercle !
- Dessinez le cercle de centre O et de rayon variable r (curseur r avec $0 \leq r \leq 10$ par exemple) et un point fixe B sur ce cercle (positionné « à la verticale » comme le point A)
- Construisez l'image P (comme « planète ») de B par la rotation de centre O et d'angle variable $q \cdot m°$ (curseur q avec $-15 \leq q \leq 15$ et <u>q entier</u>.
- Afin de bien faire apparaître la rotation de O autour de T et de P autour de O construisez les segments $[TO]$ et $[OP]$.
- Construisez également le segment $[TP]$ afin de mieux comparer l'axe terre-planète avec le rayon $[TO]$.
- Désactivez l'affichage des points A et B.

- Observez la courbe décrite par P quand m varie de 0 à 360 pour différentes valeurs de p, q, R, et r. Pour p et q de même signe vous obtenez les <u>épicycles directs</u>, alors que si p et q sont de signes contraires vous obtenez les <u>épicycles rétrogrades</u>. Essayez de prévoir l'allure de ces courbes !
- Vous pouvez afficher ces courbes avec la commande « lieu » (du point P par rapport au curseur m)
- Voici un exemple pour $\mathbf{p} = -2$ et $\mathbf{q} = 3$ (ce qui signifie que P fait 3 tours complets autour de O quand O fait 2 tours complets autour de T, en sens contraire !)



- Les amateurs de courbes vraiment « bizarres » peuvent construire les « épicycles d'épicycles » en faisant évoluer P sur un troisième cercle dont le centre se trouverait sur le cercle de centre O ! Voici un exemple pour $\mathbf{p} = 2$, $\mathbf{q} = -1$ et $\mathbf{k} = -10$ ce qui signifie que pendant le temps où O fait 2 tours complets autour de T, O' fait un tour autour de O en sens contraire et P fait 10 tours complets autour de O' dans le sens contraire de O :



15) ELLIPSES

Problème

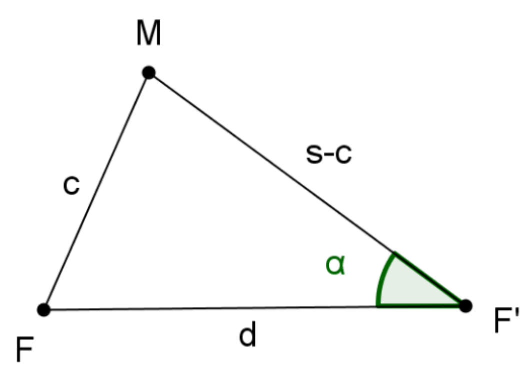
Soient deux points F et F', $\mathbf{d} = FF'$ et s un réel positif.

Nous allons construire le lieu $\mathbb{L}$ des points M du plan tel que $\mathbf{MF} + \mathbf{MF'} = \mathbf{s}$.

Réflexions et calculs préliminaires

a) Que peut-on dire de $\mathbb{L}$ si $\mathbf{s} < \mathbf{d}$? si $\mathbf{s} = \mathbf{d}$?

b) Nous supposons désormais que $\mathbf{s} > \mathbf{d}$. Posons $\mathbf{c} = \mathbf{MF}$, alors $\mathbf{MF'} = \mathbf{s} - \mathbf{c}$:



c) En exprimant c en fonction de α : $f(\alpha)=c$ à l'aide du théorème du cosinus et en dressant le tableau de variation de f montrez que si $\alpha\in[0;2\pi]$, alors $c\in\left[\frac{s-d}{2};\frac{s+d}{2}\right]$.

Conséquence :

On a alors également $s-c\in\left[\frac{s-d}{2};\frac{s+d}{2}\right]$ et en posant $p=\frac{s-d}{2}$ et $q=\frac{s+d}{2}$, p et q sont les valeurs minimale et maximale de c et de $s-c$.

Construction

d) Construisez F, F', mesurez la distance de F à F' et appelez-la d, créez un curseur a (avec p. ex. $0\le a\le 10$), calculez $s=a+d$ (ainsi on aura toujours $s\ge d$!), puis calculez $p=\frac{s-d}{2}$ et $q=\frac{s+d}{2}$.

e) En vous inspirant de l'exercice 13, construisez un nombre c qui varie entre p et q quand un certain point P « varie » sur un segment [AB].

f) En vous servant de c et $s-c$ construisez $\mathbb{L}$.

g) Utilisez la commande « lieu » pour observer les déformations de $\mathbb{L}$ quand vous variez le nombre s (en variant a !) ou quand vous déplacez F ou F'. Observez en particulier ce qui se passe quand $F=F'$!

Définition :

Le lieu $\mathbb{L}$ des points M du plan tel que $\overline{MF}+\overline{MF'}=s$ où F et F' sont deux points fixes du plan et s un réel supérieur à $\overline{FF'}$ est appelé **ellipse** de **foyers** F et F'.

16) HYPERBOLES

Problème

Soient deux points F et F', $d=\overline{FF'}$ et s un réel positif.

Nous allons construire le lieu $\mathbb{L}$ des points M du plan tel que $\left|\overline{MF}-\overline{MF'}\right|=s$.

<u>Réflexions et calculs préliminaires</u>

- Cas particulier : $\mathbf{s=0}$

  $\left|\overline{\mathbf{MF}}-\overline{\mathbf{MF'}}\right|=0 \Leftrightarrow \overline{\mathbf{MF}}=\overline{\mathbf{MF'}} \Leftrightarrow \mathbf{M}\in\mathbf{m}$ où m est la médiatrice de $[FF']$.

  D'où : $\mathbb{L}=\mathbf{m}$ pour $\mathbf{s=0}$.

- Nous supposerons désormais que $\mathbf{s>0}$.

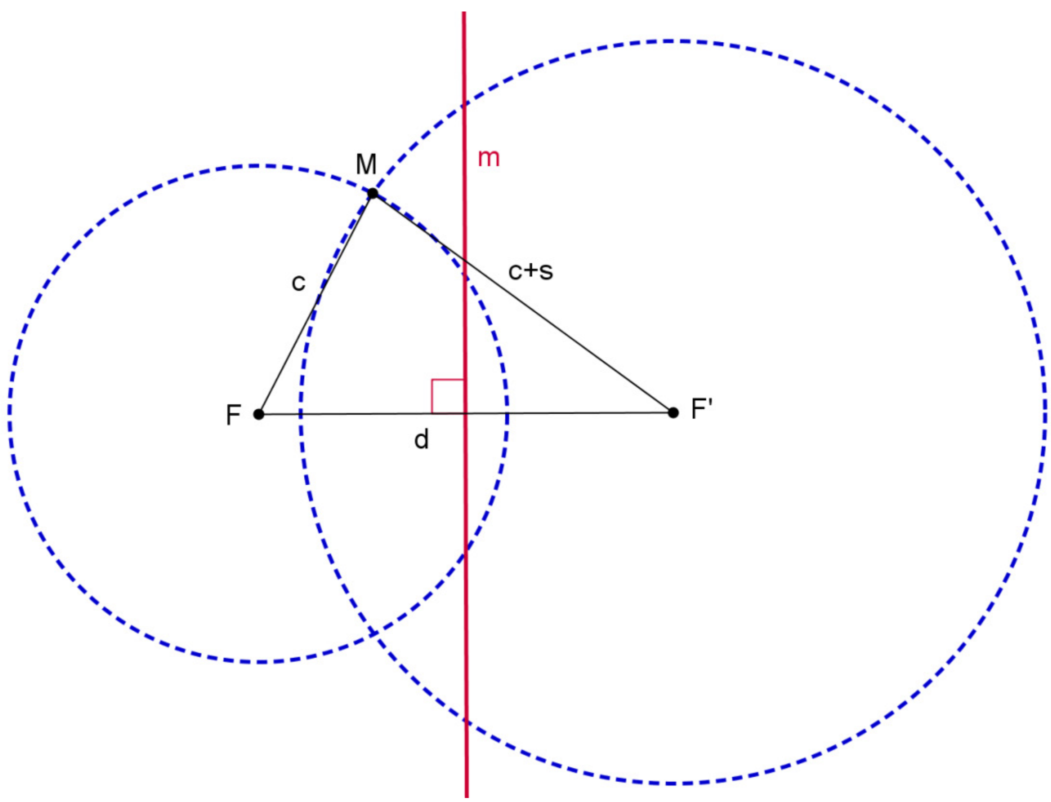
  $$\left|\overline{\mathbf{MF}}-\overline{\mathbf{MF'}}\right|=s>0 \Leftrightarrow \begin{cases}\overline{\mathbf{MF}}-\overline{\mathbf{MF'}}=\mathbf{s} & \textbf{si } \overline{\mathbf{MF}}>\overline{\mathbf{MF'}}\\ \overline{\mathbf{MF'}}-\overline{\mathbf{MF}}=\mathbf{s} & \textbf{si } \overline{\mathbf{MF}}<\overline{\mathbf{MF'}}\end{cases}$$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases}\overline{\mathbf{MF}}=\overline{\mathbf{MF'}}+\mathbf{s} & \textbf{si M et F' sont du même côté de m}\\ \overline{\mathbf{MF'}}=\overline{\mathbf{MF}}+\mathbf{s} & \textbf{si M et F sont du même côté de m}\end{cases}$$

- Analysons le cas où M et F sont du même côté de m (l'autre cas est symétrique de celui-ci par rapport à m) et posons $\mathbf{c}=\overline{\mathbf{MF}}$ et $\mathbf{c'}=\overline{\mathbf{MF'}}$.

  Alors : $\mathbf{M}\in\mathcal{C}(F,\mathbf{c})\cap\mathcal{C}'(F',\mathbf{c'})$ et comme $\overline{\mathbf{MF'}}=\overline{\mathbf{MF}}+\mathbf{s}\Leftrightarrow\mathbf{c'}=\mathbf{c}+\mathbf{s}$ on a :

  $$\mathbf{M}\in\mathcal{C}(F,\mathbf{c})\cap\mathcal{C}'(F',\mathbf{c}+\mathbf{s}).$$



D'autre part il faut que $\overline{MF'} \leq \overline{MF} + \overline{FF'} \Leftrightarrow c + s \leq c + d \Leftrightarrow s \leq d$, donc pour que $\mathbb{L}$ ne soit ni vide, ni égal à m, il faut que $\boxed{0 < s \leq d}$.

De plus $\overline{FF'} \leq \overline{FM} + \overline{MF'} \Leftrightarrow d \leq c + c + s \Leftrightarrow c \geq \frac{d-s}{2}$.

Conclusion : $\boxed{\overline{MF'} - \overline{MF} = s \Leftrightarrow \exists c \geq \frac{d-s}{2} \quad M \in \mathcal{C}(F,c) \cap \mathcal{C}'(F',c+s)}$

- De même: $\boxed{\overline{MF} - \overline{MF'} = s \Leftrightarrow \exists c \geq \frac{d-s}{2} \quad M \in \mathcal{C}''(F',c) \cap \mathcal{C}'''(F,c+s)}$

<u>Construction</u>

- Pour des raisons techniques, on va commencer par définir un curseur s (p. ex. $0 \leq s \leq 20$), un curseur a (p. ex. $0 \leq a \leq 15$) et on calcule $d = a + s$ (ainsi on aura toujours $0 < s \leq d$!) et $p = \frac{d-s}{2}$.
- Construisez $[FF']$ avec $\overline{FF'} = d$
- Construisez une demi-droite $[AB)$ (changez son nom « c » en « f » dans la fenêtre algèbre afin de réserver le nom « c » pour la suite), un point $P \in [AB)$, mesurez $\overline{AP}$, puis calculez $c = p + \overline{AP}$: en faisant « varier » P sur $[AB)$, c varie de p à $+\infty$.
- En vous servant de c, $c + s$, F et F' construisez $\mathbb{L}$.

h) Utilisez la commande « lieu » pour observer les déformations de $\mathbb{L}$ quand vous variez les nombres s et d !

<u>Définition</u> :
Le lieu $\mathbb{L}$ des points M du plan tel que $\left|\overline{MF} - \overline{MF'}\right| = s$ où F et F' sont deux points fixes du plan et s un réel tel que $0 < s \leq \overline{FF'}$ est appelé **hyperbole** de **foyers** F et F'.

17) CONIQUES

<u>Notation</u> : la distance d'un point P à une droite d sera notée $\overline{Pd}$

Problème

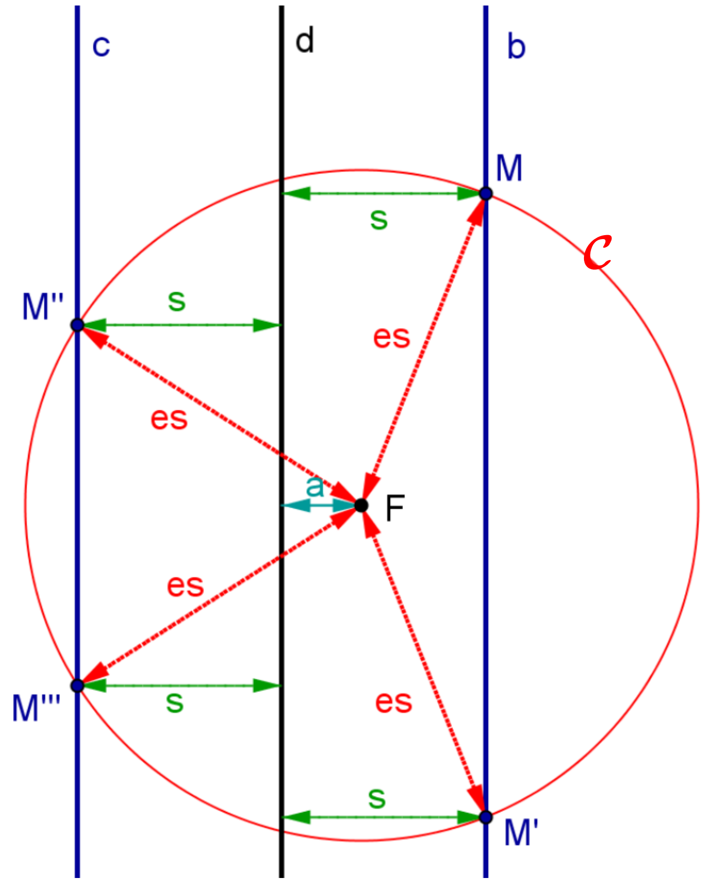
Soit une droite d, un point $F \notin d$, $a = \overline{Fd}$ et $e \in \mathbb{R}_+^*$. Nous allons construire le lieu $\mathbb{L}$ des points M du plan tel que $\overline{MF} = e \cdot \overline{Md}$.

Réflexions et calculs préliminaires

i) Soit s un réel positif, alors l'ensemble des points M tel que $s = \overline{Md}$ est constitué de deux droites b et $c = s_d(b)$ parallèles à d (et à la distance s de d) et l'ensemble des points M tel que $\overline{MF} = e \cdot s$ est le cercle $\mathcal{C}$ de centre F et de rayon $e \cdot s$.

j) Le lieu $\mathbb{L}$ cherché est donc constitué des points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ avec les droites b et c (pour un x donné, ces points d'intersection peuvent être au nombre de 0, 2 ou 4).

k) Voici une figure avec 4 points d'intersection M, M', M'' et M''' :



l) On a toujours $\overline{\mathbf{Fd}} \leq \overline{\mathbf{Md}} + \overline{\mathbf{MF}}$, quelle que soit la position de F par rapport aux droites d, b et c donc en posant $\mathbf{a} = \overline{\mathbf{Fd}}$ on a :

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{s} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{s} \Leftrightarrow \mathbf{s} \geq \frac{\mathbf{a}}{1+\mathbf{e}}$$

<u>Construction</u>

m) Construisez d et F et mesurez $\mathbf{a} = \overline{\mathbf{Fd}}$,

n) Construisez un curseur e (p. ex. $0 \leq \mathbf{e} \leq 5$) et calculez $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}}{1+\mathbf{e}}$.

o) Construisez un nombre s qui varie entre p et $+\infty$ quand un certain point P « varie » sur une demi-droite $[\mathrm{CD})$.

- En vous servant de s, $\mathbf{e} \cdot \mathbf{s}$, F et d, construisez $\mathbb{L}$.

p) Utilisez la commande « lieu » pour observer les déformations de $\mathbb{L}$ quand vous variez le nombre e (p. ex. $e = 1$, $e = 1{,}8$, $e = 0{,}7$, etc.) ou quand vous déplacez F !

Définition :

Le lieu $\mathbb{L}$ des points M du plan tel que $\overline{MF} = e \cdot \overline{Md}$ où d est une droite, F un point et e un réel positif est appelé **conique** de **directrice** d, de **foyer** F et d'**excentricité** e. Plus précisément :

- si $0 < e < 1$ c'est une **ellipse**
- si $e > 1$ c'est une **hyperbole**
- si $e = 1$ c'est une **parabole**.