CHAPITRE I

MATRICES ET DETERMINANTS

A) OPERATIONS SUR LES MATRICES (théorie)

1) Addition de deux matrices

- **Exemple**

Andrée, Bernard, Charlotte et Dominique ont décidé de passer leur week-end à faire de la natation, de la course à pied et du vélo. Chaque jour chacun note dans un tableau combien de longueurs il a nagé, combien d'heures il a couru et combien de km il a fait en vélo.
Voici le tableau pour le samedi :

	Andrée	Bernard	Charlotte	Dominique
natation (longueurs)	8	25	0	15
jogging (h)	1,5	0	1	0,5
vélo (km)	10	15	30	25

On peut représenter cette situation par la **matrice de genre 3×4** (càd à 3 lignes et à 4 colonnes) suivante :

$$S=\begin{pmatrix} 8 & 25 & 0 & 15 \\ 1{,}5 & 0 & 1 & 0{,}5 \\ 10 & 15 & 30 & 25 \end{pmatrix}$$

En faisant de même pour le dimanche on obtient une matrice **de même genre 3×4** :

$$D=\begin{pmatrix} 14 & 30 & 40 & 10 \\ 2 & 1 & 0 & 1{,}5 \\ 17 & 29 & 10 & 23 \end{pmatrix}$$

Le bilan du week-end est alors représenté par la matrice **de genre 3×4** suivante :

$$W=\begin{pmatrix} 22 & 55 & 40 & 25 \\ 3,5 & 1 & 1 & 2 \\ 27 & 44 & 40 & 48 \end{pmatrix}$$

Chaque terme de la matrice W est obtenu par addition des termes correspondants des matrices S et D.

On note : $W = S + D$.

- **Définition**

Soient $A=(a_{ij})_{1\le i\le m;1\le j\le n}$ et $B=(b_{ij})_{1\le i\le m;1\le j\le n}$ deux matrices de même genre **m**×**n**, alors la **somme** des deux matrices est la matrice $S=(s_{ij})_{1\le i\le m;1\le j\le n}$ de **genre m×n** définie par :

$$\boxed{\forall i\le m,\ j\le n \quad s_{ij}=a_{ij}+b_{ij}}$$

On note :

$S=A+B$ ou encore $(s_{ij})_{1\le i\le m;1\le j\le n}=(a_{ij})_{1\le i\le m;1\le j\le n}+(b_{ij})_{1\le i\le m;1\le j\le n}=(a_{ij}+b_{ij})_{1\le i\le m;1\le j\le n}$

2) Multiplication d'une matrice par un nombre

- **Exemple**

Le week-end suivant ils décident d'augmenter toutes leurs performances de 20%, ce qui revient à les multiplier par 1,2. Le bilan de leur week-end est alors représenté par la matrice W' obtenue en multipliant chaque terme de W par 1,2 :

$$W'=\begin{pmatrix} 26,4 & 66 & 48 & 30 \\ 4,2 & 1,2 & 1,2 & 2,4 \\ 32,4 & 52,8 & 48 & 57,6 \end{pmatrix}$$

- **Définition**

Soient $A=(a_{ij})_{1\le i\le m;1\le j\le n}$ une matrice de genre **m**×**n** et $\alpha\in\mathbb{R}$, alors le produit de la matrice A par α est la matrice de même genre **m**×**n** obtenue en multipliant chaque terme de A par α :

$$\boxed{\alpha\cdot A=\alpha\cdot(a_{ij})_{1\le i\le m;1\le j\le n}=(\alpha\cdot a_{ij})_{1\le i\le m;1\le j\le n}}$$

3) Multiplication de deux matrices

- **Exemple**

Le tableau suivant donne le prix, en euros par kg, de quatre fruits chez trois marchands :

marchands	bananes	oranges	pommes	poires
A	1,75	2,32	2,81	2,92
B	1,48	2,44	2,63	2,37
C	2,16	2,19	3,15	2,53

Cette situation peut être représentée à l'aide de la matrice (de genre 3×4) suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1,75 & 2,32 & 2,81 & 2,92 \\ 1,48 & 2,44 & 2,63 & 2,37 \\ 2,16 & 2,19 & 3,15 & 2,53 \end{pmatrix}$$

Le tableau suivant indique, pour Anne et pour Pierre, la quantité de fruits (en kg) de chaque sorte qu'ils désirent acheter :

	Anne	Pierre
bananes	3	1
oranges	1,5	3
pommes	2	1,5
poires	2,5	4

Cette situation peut être représentée à l'aide de la matrice (de genre 4×2) suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1,5 & 3 \\ 2 & 1,5 \\ 2,5 & 4 \end{pmatrix}$$

Pour faire ses achats chez le marchand A,

Anne doit payer : $1,75 \cdot 3 + 2,32 \cdot 1,5 + 2,81 \cdot 2 + 2,92 \cdot 2,5 = 21,65$ € (1)

Pierre doit payer : $1,75 \cdot 1 + 2,32 \cdot 3 + 2,81 \cdot 1,5 + 2,92 \cdot 4 = 24,605$ € (2)

Pour faire ses achats chez le marchand B,

Anne doit payer : $1,48 \cdot 3 + 2,44 \cdot 1,5 + 2,63 \cdot 2 + 2,37 \cdot 2,5 = 19,285$ € (3)

Pierre doit payer : $1,48 \cdot 1 + 2,44 \cdot 3 + 2,63 \cdot 1,5 + 2,37 \cdot 4 = 22,225$ € (4)

Pour faire ses achats chez le marchand C,

Anne doit payer : $2{,}16\cdot 3+2{,}19\cdot 1{,}5+3{,}15\cdot 2+2{,}53\cdot 2{,}5=22{,}39$ € (5)

Pierre doit payer : $2{,}16\cdot 1+2{,}19\cdot 3+3{,}15\cdot 1{,}5+2{,}53\cdot 0{,}5=23{,}575$ € (6)

Ces résultats peuvent être résumés dans le tableau :

prix à payer par :	Anne	Pierre
chez A	21,65	24,605
chez B	19,285	22,225
chez C	22,39	23,575

ou encore par la matrice :

$$P=\begin{pmatrix} 21{,}65 & 24{,}605 \\ 19{,}285 & 22{,}225 \\ 22{,}39 & 23{,}575 \end{pmatrix}$$

En appelant le calcul ….

(1) « produit » de la 1^re^ ligne de A par la 1^re^ colonne de B,

(2) « produit » de la 1^re^ ligne de A par la 2^e^ colonne de B,

(3) « produit » de la 2^e^ ligne de A par la 1^re^ colonne de B,

(4) « produit » de la 2^e^ ligne de A par la 2^e^ colonne de B,

(5) « produit » de la 3^e^ ligne de A par la 1^re^ colonne de B,

(6) « produit » de la 3^e^ ligne de A par la 2^e^ colonne de B,

on voit qu'on peut désigner P comme le « produit » de la matrice A par la matrice B.

On écrit : $A\cdot B=P$

<u>*Remarque*</u> : A est de genre 3x**4**, B de genre **4**x2 et P de genre 3x2

- **<u>Définition</u>**

Soient A une matrice de genre $\mathbf{m}\times\mathbf{n}$, B une matrice de genre $\mathbf{n}\times\mathbf{p}$, alors le **produit** $P=A\cdot B$ est la matrice de genre $\mathbf{m}\times\mathbf{p}$ définie par :

Le terme de la i^e ligne et de la j^e colonne de P est le « produit » de la i^e ligne de A et de la j^e colonne de B.

Ainsi si, $A=\left(a_{ij}\right)_{1\le i\le m;1\le j\le n}$, $B=\left(b_{jk}\right)_{1\le j\le n;1\le k\le p}$ et $P=\left(p_{ik}\right)_{1\le i\le m;1\le k\le p}$ alors :

$$p_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+a_{i3}\cdot b_{3k}+\cdots+a_{in}\cdot b_{nk}$$

- ***Attention***

  Pour que le produit de A par B soit *possible*, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B. Ceci montre en particulier que le produit des matrices n'est *pas commutatif* ! L'exemple suivant montre que même le produit des matrices carrées n'est pas commutatif :

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -41 & 25 \\ -1 & 21 \end{pmatrix}, \text{ mais } \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 20 \\ 45 & -16 \end{pmatrix}$$

4) Propriétés des opérations sur les matrices

- Soient A, B, C trois matrices de genre $m \times n$, O la matrice nulle de genre $m \times n$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors :
  - $A + B = B + A$
  - $A + (B + C) = (A + B) + C$
  - $A + O = A$
  - $A + (-A) = O$ où $-A = (-a_{ij})_{1 \le i \le m; 1 \le j \le n}$

  Conclusion : l'ensemble des matrices de genre $m \times n$ muni de l'addition est un **groupe commutatif.**

- Soient A, B deux matrices de genre $m \times n$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors :
  - $1 \cdot A = A$
  - $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha\beta) \cdot A$
  - $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$
  - $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$

  Conclusion : l'ensemble des matrices de genre $m \times n$ muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un **espace vectoriel**.

- Soient A, B, C trois matrices quelconques et I la matrice unité, à condition que les produits suivants soient *possibles* (ce qui dépend de leur genre !), on a :
  - $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
  - $A \cdot I = I \cdot A = A$

- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$

- Si A est une matrice carrée on pose :

  $A \cdot A = A^2$

  $A \cdot A \cdot A = A^3$

  $A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A = A^n$ (n facteurs)

- Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n tel que $A \cdot B = B \cdot A = I$ on dit que B est la **matrice inverse** de A et on note: $B = A^{-1}$. On voit facilement (exercice!) qu'une matrice A a *au plus une* matrice inverse et on verra plus loin une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle en admette une.

  Exemple

  Vérifiez que si $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{4}{27} \\ \frac{1}{18} & \frac{5}{54} \end{pmatrix}$

Exercices 1-9

B) EXERCICES

1) Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -9 & 3 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 5 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Calculez :

a) $2A - 3\,{}^tB$

b) $5C + \frac{1}{2}D$

c) ${}^t(AB)$ et ${}^tB\,{}^tA$ (conclusion ?)

d) $(C + D)^2$ (pensez-vous que $(C + D)^2 = C^2 + 2CD + D^2$?)

2) Soient les matrices :

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 5\\ -7 & 4\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B=\begin{pmatrix}1 & -4 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

a) Calculez $A\cdot {}^tA-B^2$.

b) Vous venez de calculer $A\cdot {}^tA$. En observant le résultat vous observez une certaine régularité, laquelle ? Pensez-vous que c'est dû au hasard ?

c) Analysez si les calculs suivants sont *possibles* (justifiez votre réponse sans faire les calculs) :

- $BA-5B$
- ${}^tB\cdot A+5\cdot A$
- A^3
- ${}^tA\cdot A+A\cdot {}^tA$
- ${}^tA\cdot B-A$

3) Soient les matrices :

$$A=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 5 & -15\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}3 & 21\\ 1 & 7\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 4\end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix}-5 & -6\\ 2 & -1\end{pmatrix} \quad E=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad F=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

Calculez :

a) AB

b) CD et DC

c) $E^2, E^3, \cdots, E^n$ avec $n\in\mathbb{N}$

d) $F^2, F^3, \cdots, F^n$ avec $n\in\mathbb{N}$

4) Calculez a et b pour que :

a) $$\begin{pmatrix}2 & -1 & a\\ -2 & b & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & b\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4b\\ -3 & 2a\end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix}a & 2\\ 5 & -7\end{pmatrix}^2-4\begin{pmatrix}a & a-b\\ 2 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -24\\ 2-10a & 7a^2\end{pmatrix}$$

5) Soit $\mathcal{M}_3$ l'ensemble des matrices d'ordre 3 de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

Montrez que $\mathcal{M}_3$ muni de la multiplication des matrices est un groupe commutatif.

6) Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ \frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}$$

Calculez AB et AC. Que peut-on en conclure ?

7) Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$. Déterminez a et b pour que $AB = BA$.

8) Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trouvez la matrice X telle que :

$$A + X = BA$$

9) Soit $\mathbb{M}$ l'ensemble des matrices d'ordre 3 de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}$$

a) Montrez que $\forall A, B \in \mathbb{M} \quad A \cdot B = B \cdot A$

b) Existe-t-il $A, B \in \mathbb{M}$ tel que $A \cdot B \in \mathbb{M}$?

c) Se peut-il que $A \in \mathbb{M}$ soit inversible ?

d) Calculez A^2, A^3 et A^4 pour $A \in \mathbb{M}$. Trouvez puis démontrez (par récurrence) une formule donnant A^n avec $n \geq 2$

10) Calculez les déterminants suivants en utilisant, si possible, les propriétés des déterminants pour rendre le calcul plus rapide :

a) $\begin{vmatrix} -3 & -41 & 37 \\ 0 & 12 & -8 \\ 0 & -7 & 5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 7 & -11 & 9 \\ 0 & -4 & 0 \\ 20 & 8 & -13 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} -9 & 12 & 21 \\ 73 & -94 & 107 \\ 3 & -4 & -7 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} \frac{4}{13} & 8,9 & 0,1 \\ 14 & 0 & 0 \\ 91 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 7 & -5 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 126 & \frac{3}{11} \\ 0 & 0 & -5 & 9,78 \\ 8 & 37,1 & \sqrt{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 17 & 12 & 28 & 8 \\ 5 & 3 & 7 & 2 \\ \frac{3}{8} & -149 & 0 & -27 \\ -6 & 458 & 501 & 19 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 24 & 5 & 1 & -30 \\ -39 & -7 & \frac{47}{91} & 42 \\ -9 & 9 & 0 & -54 \\ 0 & -8 & 0 & 48 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} -2 & 9 & 15 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & 4 & -7 \\ 14 & 5 & 11 & -1 & -5 \\ 9 & -4 & -6 & -5 & 2 \\ -35 & 8 & -21 & -28 & 49 \end{vmatrix}$

j) $\begin{vmatrix} 5 & -19 & 9 & 25 & 31 \\ 2 & -63 & 6 & 7 & 20 \\ -5 & -18 & -15 & 2 & -11 \\ 7 & 9 & 21 & -1 & 43 \\ 1 & 36 & 3 & -4 & -15 \end{vmatrix}$

k) $\begin{vmatrix} 5 & -13 & 1 & -2 & 8 \\ 15 & -38 & 3 & 47 & 24 \\ -65 & 7 & -13 & -73 & -3 \\ -2 & -4 & 7 & 3 & 12 \\ -7 & 9 & 6 & -5 & 4 \end{vmatrix}$

l) $\begin{vmatrix} 11 & 8 & 32 & 7 & -1 \\ -5 & -3 & 9 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 17 & 8 & 7 \\ 7 & 4 & -8 & 15 & 11 \\ 0 & 2 & 6 & -7 & -9 \end{vmatrix}$

11) Déterminants de Vandermonde d'ordre 3 et 4.

a) Montrez que pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$ on a : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$.

b) Utilisez cette formule pour calculer les déterminants :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ a & b & c \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

c) Calculez le déterminant de Vandermonde d'ordre 4.

12) Les matrices suivantes sont appelées *matrices antisymétriques* :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

d'ordre 2, 3 et 4 respectivement. Vérifiez sur ces exemples la propriété (générale) suivante : le déterminant d'une matrice antisymétrique d'ordre impair vaut 0, alors que le déterminant d'une matrice antisymétrique d'ordre pair est un carré.

13) Montrez que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\begin{vmatrix} 1 & n+1 & 2n+1 & \dots & (n-1)n+1 \\ 2 & n+2 & 2n+2 & \cdots & (n-1)n+2 \\ 3 & n+3 & 2n+3 & \cdots & (n-1)n+3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 2n & 3n & \cdots & n^2 \end{vmatrix} = 0$

14) Montrez que :

$$\forall x, y, x', y' \in \mathbb{R} \quad (x^2+y^2)(x'^2+y'^2) = (xx'+yy')^2 + (xy'-x'y)^2$$

en utilisant les matrices $A = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} x' & y' \\ -y' & x' \end{pmatrix}$.

15) Calculez, si elles existent, les inverses des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & -16 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

16) Soient A et B deux matrices régulières. Montrez que AB est aussi régulière et que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

17) Résolvez les systèmes suivants par la méthode indiquée :

a) $\begin{cases} 3x - 11y = 61 & (1) \\ -7x + 2y = -24 & (2) \end{cases}$ (par substitution <u>et</u> par calcul de la matrice inverse)

b) $\begin{cases} \dfrac{3-x}{5} - \dfrac{y-2x}{7} = 1 & (1) \\ 2x + 5\left(\dfrac{x}{3} - y\right) + 9y = x - 2y + 2 & (2) \end{cases}$ (règle de Cramer)

c) $\begin{cases} 5x - y + 3z = 12 & (1) \\ -2x + 5y - z = 5 & (2) \\ 11x - 5y + 2z = 7 & (3) \end{cases}$ (par substitution <u>et</u> par la règle de Cramer)

d) $\begin{cases} x - 6y + 3z = 3 & (1) \\ \dfrac{3x}{2} + 2y - 9z = 1 & (2) \\ -5x + 18y + \dfrac{33}{2}z = 0 & (3) \end{cases}$ (par calcul de la matrice inverse)

e) $\begin{cases} 7x+9y+t=-8 & (1) \\ 5y-2z+3t=-14 & (2) \\ -3x+y-z-t=5 & (3) \\ 8x+3z=-1 & (4) \end{cases}$ (les trois méthodes)

18) Résolvez les systèmes suivants en discutant suivant les valeurs du paramètre m :

a) $\begin{cases} (m+1)x-2y=4 & (1) \\ (m-1)x-3y=5 & (2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+(m-2)y-m=0 & (1) \\ 4x+my-10=0 & (2) \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+my+z=2m & (1) \\ mx+y+z=0 & (2) \\ x+my+(m+1)z=m & (3) \end{cases}$

d) $\begin{cases} mx+y+z=1 & (1) \\ x+my+z=1 & (2) \\ x+y+mz=m & (3) \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+y+z=1 & (1) \\ x+y+mz=2 & (2) \\ mx+m^2y+m^3z=m & (3) \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+my+m^2z=m^3 & (1) \\ m^3x+m^2y+mz=1 & (2) \\ x+2my+3m^2z=4m^3 & (3) \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2mx-y+3z=1 \\ 7x-my+2z=0 \\ x+(m+1)y-5z=m+3 \end{cases}$