LIMITES

A) FORMES INDETERMINEES (f.i.)

1) f.i. $\boxed{\infty - \infty}$

A l'aide d'un tableau des images (*utilisez la V200 !*) de y1(x), y2(x) et $y3(x) = y1(x) + y2(x)$, où vous choisirez des valeurs appropriées de x (*en mode « ask »*), déterminez les limites demandées pour :

a) $y1(x) = 5x^3 - 7x^2 - 11x + 17$ et $y2(x) = 9x^4 + 2x^3 + 13x^2 + x - 47$:

$\lim\limits_{-\infty} y1(x) = \dots$ $\lim\limits_{-\infty} y2(x) = \dots$ $\lim\limits_{-\infty} y3(x) = \dots$

b) $y1(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 7}{4x^2 - 9x + 2}$ et $y2(x) = \dfrac{1 - x}{x^3 + 3x^2 - 11x + 2}$

$\lim\limits_{2^-} y1(x) = \dots$ $\lim\limits_{2^-} y2(x) = \dots$ $\lim\limits_{2^-} y3(x) = \dots$

c) $y1(x) = \dfrac{9}{-22x^2 + 11x + 11}$ et $y2(x) = \dfrac{22x - 28}{-55x^2 + 88x - 33}$

$\lim\limits_{1^+} y1(x) = \dots\dots\dots\dots$ $\lim\limits_{1^+} y2(x) = \dots\dots\dots\dots$ $\lim\limits_{1^+} y3(x) = \dots\dots\dots\dots$

Vérifiez vos résultats avec la **commande « limit »** (*sous « calc » F3*).

Essayez d'expliquer ces résultats en comparant les valeurs prises par les trois fonctions.

2) f.i. $\boxed{0 \cdot \infty}$

Mêmes questions pour y1(x), y2(x) et $y3(x) = y1(x) \cdot y2(x)$:

a) $y1(x) = 2x^3 - 9x^2 + 8x - 1$ et $y2(x) = \dfrac{19}{-5x^2 + 18x - 13}$:

$\lim\limits_{1^-} y1(x) = \dots\dots\dots\dots$ $\lim\limits_{1^-} y2(x) = \dots\dots\dots\dots$ $\lim\limits_{1^-} y3(x) = \dots\dots\dots\dots$

$\lim\limits_{+\infty} y1(x) = \dots\dots\dots\dots$ $\lim\limits_{+\infty} y2(x) = \dots\dots\dots\dots$ $\lim\limits_{+\infty} y3(x) = \dots\dots\dots\dots$

b) $y1(x) = 12x^2 + 31x + 17$ et $y2(x) = \dfrac{-8}{x^3 - 2x + 53}$

$\lim\limits_{-\infty} y1(x) = \dots\dots\dots\dots$ $\lim\limits_{-\infty} y2(x) = \dots\dots\dots\dots$ $\lim\limits_{-\infty} y3(x) = \dots\dots\dots\dots$

3) f.i. $\boxed{\frac{0}{0}}$

Mêmes questions pour y1(x), y2(x) et $y3(x) = \frac{y1(x)}{y2(x)}$:

a) $y1(x) = 2x^2 + x - 55$ et $y2(x) = -7x^2 + 44x - 45$:

$\lim_{5^-} y1(x) = \dots\dots\dots\dots$ $\lim_{5^-} y2(x) = \dots\dots\dots\dots$ $\lim_{5^-} y3(x) = \dots\dots\dots\dots$

b) $y1(x) = x^4 + x^3 - 20x^2 - 39x + 9$ et $y2(x) = -34x^4 - 92x^3 + 47x^2 + 46x - 15$:

$\lim_{-3^+} y1(x) = \dots\dots\dots\dots$ $\lim_{-3^+} y2(x) = \dots\dots\dots\dots$ $\lim_{-3^+} y3(x) = \dots\dots\dots\dots$

c) $y1(x) = 3x^6 + 5x^5 - 2x^4 + 11x^2 + 15x - 14$ et $y2(x) = -x^4 + 2x^3 + 33x^2 + 76x + 52$:

$\lim_{-2^-} y1(x) = \dots\dots\dots\dots$ $\lim_{-2^-} y2(x) = \dots\dots\dots\dots$ $\lim_{-2^-} y3(x) = \dots\dots\dots\dots$

4) f.i. $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$

Mêmes questions pour y1(x), y2(x) et $y3(x) = \frac{y1(x)}{y2(x)}$:

a) $y1(x) = 15x^2 - 71x + 101$ et $y2(x) = -3x^2 - 37x + 59$:

$\lim_{+\infty} y1(x) = \dots\dots\dots\dots$ $\lim_{+\infty} y2(x) = \dots\dots\dots\dots$ $\lim_{+\infty} y3(x) = \dots\dots\dots\dots$

b) $y1(x) = 8x^5 - 29x^3 + 4x - 13$ et $y2(x) = -x^2 - 34x + 16$:

$\lim_{-\infty} y1(x) = \dots\dots\dots\dots$ $\lim_{-\infty} y2(x) = \dots\dots\dots\dots$ $\lim_{-\infty} y3(x) = \dots\dots\dots\dots$

CONCLUSION

Il y a **quatre formes indéterminées** : $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$. Dans ces cas il y a « conflit » entre deux fonctions et on ne peut rien affirmer de général concernant le résultat : c'est la fonction la plus « rapide » (càd la plus « forte ») qui s'impose. ***« Lever l'indétermination »*** signifie déterminer laquelle des deux fonctions est dominante.

B) REGLES DE CALCUL AVEC L'INFINI

1) Addition

$\forall k \in \mathbb{R} \quad k+(+\infty)=+\infty$ et $k+(-\infty)=-\infty$

$(+\infty)+(+\infty)=+\infty \qquad (-\infty)+(-\infty)=-\infty$

2) Multiplication

$\forall k \in \mathbb{R}^* \quad k\cdot\infty=\infty$ + règle des signes

$\infty\cdot\infty=\infty$ + règle des signes

3) Division

$\forall k \in \mathbb{R} \quad \left(\frac{k}{\infty}\right)=0$ et $\left(\frac{\infty}{k}\right)=\infty$ + règle des signes

Ces règles s'appliquent avec les formules (où $\star \in \mathbb{R}$ ou $\star = \pm\infty$) :

$$\lim_{\star}(f+g)=\lim_{\star} f+\lim_{\star} g$$

$$\lim_{\star}\alpha\cdot f=\alpha\lim_{\star} f \quad (\alpha\in\mathbb{R})$$

$$\lim_{\star}(f\cdot g)=\lim_{\star} f\cdot\lim_{\star} g$$

$$\lim_{\star}\frac{f}{g}=\frac{\lim_{\star} f}{\lim_{\star} g}$$

C) BRANCHES INFINIES

1) Asymptotes verticales (A.V.)

On a une A.V. d'équation : $\boxed{x = a}$ si et seulement si $\lim\limits_{a,\, a^+ \text{ ou } a^-} f = \infty$

2) Asymptotes horizontales (A.H.), obliques (A.O.) et branches paraboliques (b. p.)

On suit le **schéma** suivant :

on calcule $\lim\limits_{\infty} f$ puis :

- si $\lim\limits_{\infty} f = a \in \mathbb{R}$, alors : $\boxed{\text{A.H.} : y = a}$
- si $\lim\limits_{\infty} f = \infty$, on calcule $\lim\limits_{\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis :
  - si $\lim\limits_{\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$: $\boxed{\text{b.p. de direction Ox}}$
  - si $\lim\limits_{\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$: $\boxed{\text{b.p. de direction Oy}}$
  - si $\lim\limits_{\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$, on calcule $\lim\limits_{\infty} \left(f(x) - ax \right)$ puis :
    - si $\lim\limits_{\infty} \left(f(x) - ax \right) = b \in \mathbb{R}$: $\boxed{\text{A.O. } y = ax + b}$
    - si $\lim\limits_{\infty} \left(f(x) - ax \right) = \infty$: $\boxed{\text{b.p. de direction } y = ax}$