

EXERCICES CHAPITRE III

DERIVEES

Exercice 1

Pour chacune des fonctions suivantes, calculez $f'(x_0)$ en appliquant la définition et donnez l'équation de la tangente à G_f au point d'abscisse x_0 :

1) $f(x) = 7x - 9$ et $x_0 = 2$

2) $f(x) = 3x^2 - x + 1$ et $x_0 = 1$

3) $f(x) = 5x^3 - 4$ et $x_0 = -1$

4) $f(x) = \frac{3}{x}$ et $x_0 = -2$

5) $f(x) = \sqrt{x+4}$ et $x_0 = 0$

Exercice 2

Pour chacune des fonctions suivantes, calculez $f'(x_0)$ en appliquant les formules et donnez l'équation de la tangente à G_f au point d'abscisse x_0 :

1) $f(x) = 7x^3 - 11x^2 + x - 11$ et $x_0 = 2$

2) $f(x) = \frac{5x+1}{9-4x}$ et $x_0 = -1$

3) $f(x) = (3x^2 - 5x + 1)^3$ et $x_0 = 0$

4) $f(x) = 1 - 8\sqrt{x}$ et $x_0 = 4$

Exercice 3

Calculez les fonctions dérivées (+ domaines de f et f') des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 9x^2 - \frac{3}{7}x - \frac{19}{13}$

2) $f(x) = 2,5x^4 + 3\sqrt{x} - 5x^3 - \frac{4}{3}x^2 - 7,9$

3) $f(x) = 8x^7 - 5x^6 + x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 4,2$

4) $f(x) = \frac{5}{x} - \frac{3}{x^4} + \frac{1}{2x^3}$

5) $f(x) = \frac{7x^2}{8x^6} + \frac{5}{9x^4} - \frac{8}{3x^3}$

6) $f(x) = \frac{5}{12x^3} - 4\sqrt{x} + 5,2x^2$

7) $f(x) = 3x\left(\frac{8}{x^2} - 7x + 11\right)$

8) $f(x) = (2x - 1)(8 - 3x)$

9) $f(x) = (5x - 7)^2$

10) $f(x) = \frac{2}{x - 4}$

11) $f(x) = \frac{7x - 13}{3 - 2x}$

12) $f(x) = \frac{3x^2 - x + 7}{-2x^2 + 11x - 15}$

13) $f(x) = \frac{13 - 7x^2 + 2x}{9x^2 - 25}$

14) $f(x) = (3x^2 - 7x + 1)^8$

15) $f(x) = \left(11x^4 - \frac{3}{2}x^3 + x - 1\right)^{14}$

16) $f(x) = (7 - 9x^2)^2 (11x - 3)^4$

17) $f(x) = (5x^3 - 7x + 1)^5 (2x - 13)^3$

18) $f(x) = \sqrt{-5x^2 + 17x - 6}$

19) $f(x) = \frac{6x}{7 + \sqrt{x}}$

20) $f(x) = \frac{x^2 - 9x + 1}{(4 - 3x)^{10}}$

21) $f(x) = \sqrt{\frac{2 - 3x}{7x + 5}}$

22) $f(x) = \left(\frac{x^2 - 2}{1 - 3x}\right)^4$

23) $f(x) = \frac{\sqrt{5 - 4x}}{2x + 7}$

24) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 49}{9 - 16x^2}}$

25) $f(x) = \sqrt{\frac{5 - x}{9 - 8x}}$

26) $f(x) = \frac{2x^2 + x - 7}{3x^2 + 11x - 4}$

27) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 11x - 4}$

28) $f(x) = \frac{7 - x^3}{x^3 - 4x}$

29) $f(x) = \frac{(5x + 1)^3}{(2x + 7)^5}$

30) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$

$$31) f(x) = \frac{1}{(1-3x)^5(x+4)^3}$$

$$33) f(x) = \frac{(5-3x)^4}{(6x+1)^8}$$

$$32) f(x) = \frac{\sqrt{9x^2 - x - 8}}{x-2}$$

$$34) f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$$

Exercice 4

1) Soit la fonction $f(x) = \sqrt{1-2x}$ et les polynômes

$$g(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 \text{ et}$$

$$h(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{120}x^5.$$

a) Calculez les coefficients de $g(x)$ et de $h(x)$.

b) Tracez les courbes de f , g et h sur le même graphique (avec Geogebra) et comparez-les. Que constatez-vous ?

2) Mêmes questions avec $f(x) = \frac{1}{2x-3}$.

Exercice 5

Étudiez la dérivabilité des fonctions suivantes et donnez l'interprétation graphique aux points du domaine où la fonction n'est pas dérivable :

1) $f(x) = |x^2 - 1| - 2$

2) $f(x) = \left| \frac{x+3}{1-5x} \right|$

3) $f(x) = \sqrt{|x-5|}$

4) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

5) $f(x) = |x^3| - 7x^2 + 6x - 1$

Exercice 6

Calculez les limites suivantes en utilisant la règle de l'Hôpital:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 4x - 5}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^4 - 8x^2 + 7x + 12}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x + 4}{5x^2 - 9x + 1}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{2x^3 - 5x^2 + 4x - 1}$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - x^3 - 18x^2 + 52x - 40}{x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16}$

Exercice 7

Reprenez l'exercice 5 sans utiliser la définition de $f'(x_0)$.

Exercice 8

Faites l'étude complète des fonctions suivantes : domaines, branches infinies, dérivabilité, tableau de variation, courbe.

- | | |
|---|---|
| 1) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ | 8) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ |
| 2) $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 3x - 7$ | 9) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$ |
| 3) $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x - 5$ | 10) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ |
| 4) $f(x) = -\frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{6} + 2x + 1$ | 11) $f(x) = x^2 + x - 6 $ |
| 5) $f(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 3$ | 12) $f(x) = \left \frac{1-x}{x-2} \right $ |
| 6) $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$ | 13) $f(x) = \sqrt{ x-4 }$ |
| 7) $f(x) = \frac{x-1}{3-x}$ | 14) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{ 2x+5 }$ |
| | 15) $f(x) = \frac{ x^2 - x - 6 }{x-1}$ |

Exercice 9

Etudiez la concavité et les points d'inflexion des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 1$

4) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

2) $f(x) = \frac{3x + 5}{7 - 2x}$

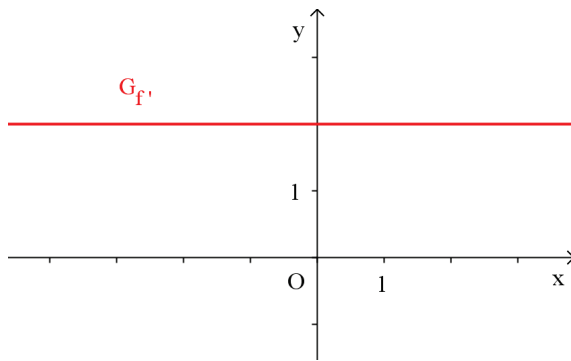
3) $f(x) = x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 2x - 5$

Exercice 10

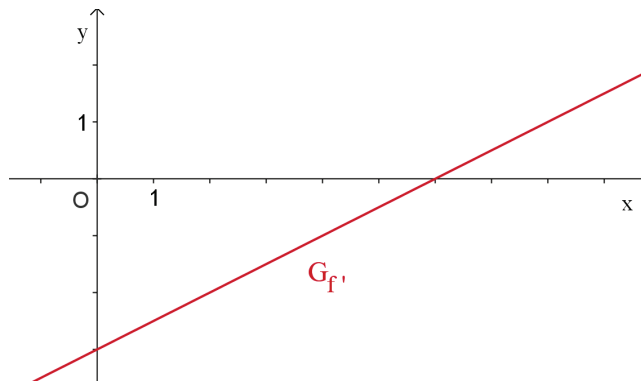
Chacun des diagrammes suivants représente le graphe de la dérivée f' d'une fonction f .

Dressez un tableau de variation et un tableau de convexité aussi complets que possible puis dessinez sur le même diagramme le graphe d'une fonction qui pourrait être celle de f :

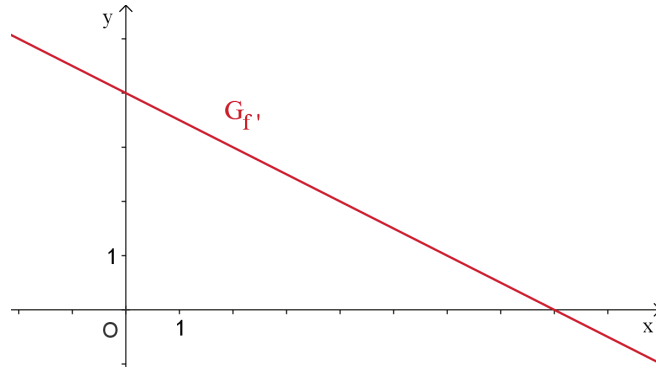
1)



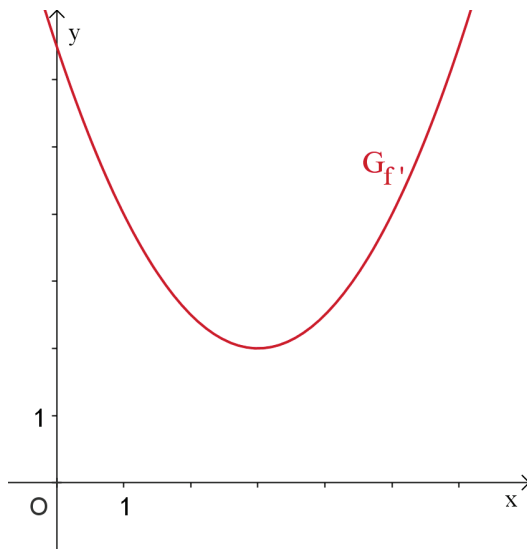
2)



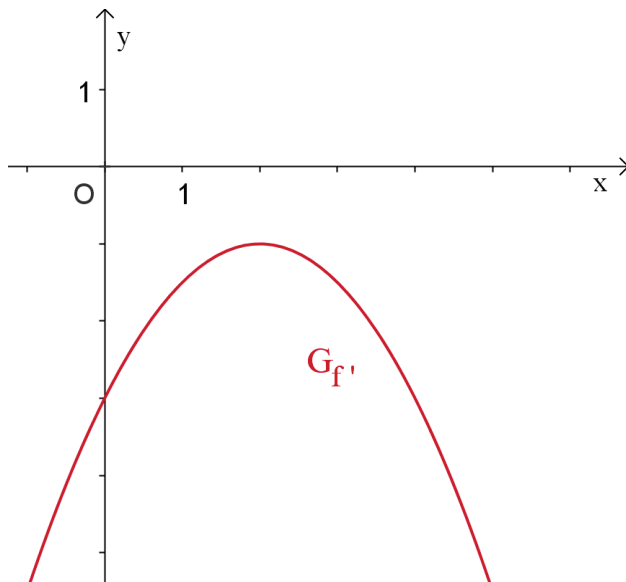
3)



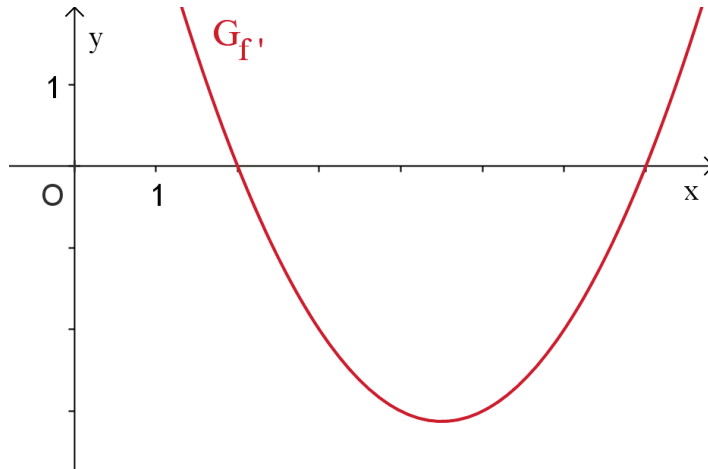
4)



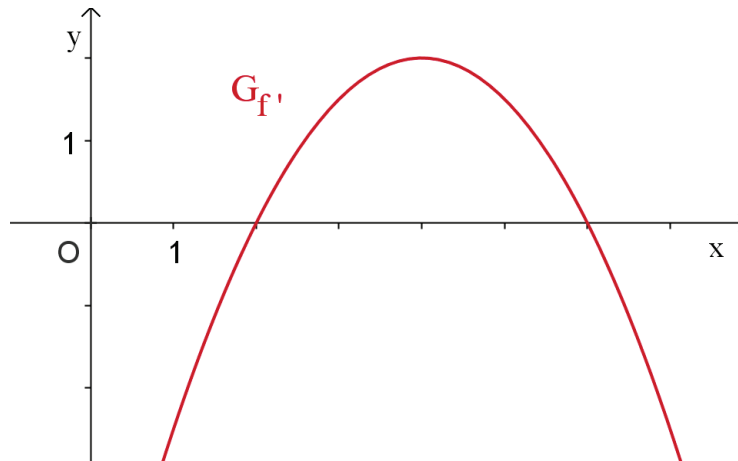
5)



6)



7)



Exercice 11

A partir du sol (hauteur : 0 m) on tire un projectile verticalement en l'air. Celui-ci atteint une hauteur de 50 m, puis retombe, 12 secondes plus tard, sur son point de départ.

- 1) En désignant par $f(x)$ la position (hauteur) du projectile à l'instant x , dessinez un schéma de la courbe de f .
- 2) Même question si $f(x)$ représente le chemin parcouru à l'instant x .
- 3) Analysez ces deux courbes !

Exercice 12

Déterminez les domaines puis calculez la dérivée des fonctions suivantes :

- | | |
|--------------------------------------|---|
| 1) $f(x) = 7\sqrt[3]{x^2}$ | 3) $f(x) = \sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3}$ |
| 2) $f(x) = -\frac{3}{\sqrt[6]{x^7}}$ | 4) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$ |

5) $f(x) = \sqrt[3]{6x+5}$

6) $f(x) = -\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$

7) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[6]{2x+1}}$

8) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1}$

9) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{3x^2 - 2x + 1}}$

10) $f(x) = \frac{5}{\sqrt[7]{x^2 - 5x + 4}}$

11) $f(x) = \frac{3}{\sqrt[5]{(x^2 + x + 2)^6}}$