Calcul de limites

1. Limites en un réel a. Interprétation graphique

Etudier la limite de la fonction f au point a dans les cas suivants et interpréter les résultats. On distinguera éventuellement la limite à gauche et la limite à droite.

(1) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 9x - 1$ $\qquad a \in \left\{-1, \frac{1}{2}, 2\right\}$.

(2) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 5}$ $\qquad a \in \left\{2, \sqrt{6} - 1, 0\right\}$.

(3) $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ $\qquad a \in \left\{\frac{\pi}{2}, 0, -\frac{8\pi}{3}\right\}$.

(4) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 \text{ si } x \geq 3 \\ 1 - 3x \text{ si } x < 3 \end{cases}$ $\qquad a \in \{2, 3, 4\}$.

(5) $f(x) = \begin{cases} 2x - \sqrt{2x} \text{ si } x > 5 \\ \sqrt{1 - 3x} \text{ si } x < \frac{1}{3} \end{cases}$ $\qquad a \in \left\{0, \frac{1}{3}, 2, 6\right\}$.

(6) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 5}{x + 3}$ $\qquad a \in \{2, -3\}$.

(7) $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{2x - 1}}$ $\qquad a \in \left\{-2, 0, \frac{1}{2}\right\}$.

(8) $f(x) = \dfrac{2x - x^2}{|4x + 3|}$ $\qquad a \in \left\{2, -\frac{3}{4}\right\}$.

(9) $f(x) = \dfrac{1 - 5x}{2x^2 - x - 1}$ $\qquad a \in \left\{1, -\frac{1}{2}\right\}$.

(10) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 - 5x}}{2x^2 - x - 1}$ $\qquad a \in \left\{1, -\frac{1}{2}\right\}$.

(11) $f(x) = \dfrac{1 - 5x}{\sqrt{2x^2 - x - 1}}$ $\qquad a \in \left\{1, -\frac{1}{2}\right\}$.

(12) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 4}{x - 2\sqrt{x - 1}}$ $\qquad a = 2$.

(13) $f(x)=\dfrac{x(x-1)}{\sqrt{x}-x+2}$ $\qquad a=4\,.$

(14) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-2}$ $\qquad a=8\,.$

(15) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^3-8x^2+x+42}$ $\qquad a\in\{-2,3,7\}\,.$

(16) $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}$ $\qquad a\in\{1,-2\}\,.$

(17) $f(x)=\dfrac{(x-2)^3}{x^3-8}$ $\qquad a=2\,.$

(18) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^3+3x^2-10x}$ $\qquad a\in\{-5,0,2\}\,.$

(19) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ $\qquad a\in\{-1,1\}\,.$

(20) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad a=0\,.$

(21) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$ $\qquad a=0\,.$

(22) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}$ $\qquad a=0\,.$

(23) $f(x)=\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{1}{x^3}$ $\qquad a=0\,.$

(24) $f(x)=\dfrac{1}{3\left(x^2-1\right)}-\dfrac{1}{2\left(x^3-1\right)}$ $\qquad a\in\{-1,1\}\,.$

(25) $f(x)=\dfrac{x(x-3)}{x-1-\sqrt{x+1}}$ $\qquad a=3\,.$

(26) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$ $\qquad a=2$.

(27) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x}-2}{\sqrt{x+7}-3}$ $\qquad a=2$.

(28) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ $\qquad a=0$.

(29) $f(x)=\dfrac{\left|x^2+3x+2\right|}{x+1}$ $\qquad a=-1$.

(30) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2-1}}$ $\qquad a=1$.

(31) $f(x)=\dfrac{x+\dfrac{1}{x-2}}{\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-4}}}$ $\qquad a\in\{-2,2\}$.

(32) $f(x)=\dfrac{\left(x^2-1\right)^2\left(x^2+4x-5\right)}{|x|^3-3x^2+3|x|-1}$ $\qquad a\in\{-1,1\}$.

Indication : Le dénominateur est $(|x|-1)^3$.

(33) $f(x)=\dfrac{\sin^2(2x)}{x\sqrt{x}}$ $\qquad a=0$.

(34) $f(x)=\dfrac{\cos(3x)-\cos(2x)}{x^2}$ $\qquad a=0$.

(35) $f(x)=\dfrac{2\sin(2x)-\sqrt{3}}{2\cos(4x)+1}$ $\qquad a=\frac{\pi}{6}$.

(36) $f(x)=\dfrac{\sin x+x}{\sin(3x)-x^2}$ $\qquad a=0$.

Réponses :

(1) $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-18$; $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=\frac{15}{8}$; $\lim\limits_{x\to2}f(x)=-3$.

(2) $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\sqrt{3}$; $\lim\limits_{x\to\sqrt{6}-1}f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ n'existe pas.

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\lim\limits_{x\to-\frac{8\pi}{3}}f(x)=0$.

(4) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -5$; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 7$; $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -8$; $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ n'existe pas ; $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 9$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ n'existe pas ; $\lim\limits_{x\to 6} f(x) = 12 - 2\sqrt{3}$.

(6) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\frac{3}{5}$; $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ n'existe pas .

(7) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ n'existe pas ; $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas ; $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$.

(8) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{4}} f(x) = -\infty$.

(9) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$.

(10) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ n'existe pas ; $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$.

(11) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^+} f(x)$ n'existent pas ; $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$.

Remarque : A chaque fois que les limites à gauche et à droite en a existent mais diffèrent, la limite en a n'existe pas. Nous ne l'écrirons plus dans la suite.

(12) On est en présence d'une f.i. $-\frac{2}{0}$.

1^re^ méthode : On amplifie par le conjugué :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 4}{x - 2\sqrt{x-1}} &= \lim_{x\to 2} \frac{\left(x^2 - x - 4\right)\left(x + 2\sqrt{x-1}\right)}{\left(x - 2\sqrt{x-1}\right)\left(x + 2\sqrt{x-1}\right)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{\left(x^2 - x - 4\right)\left(x + 2\sqrt{x-1}\right)}{x^2 - 4(x-1)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{\left(x^2 - x - 4\right)\left(x + 2\sqrt{x-1}\right)}{x^2 - 4x + 4} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{\left(x^2 - x - 4\right)\left(x + 2\sqrt{x-1}\right)}{(x-2)^2} \\
&= \frac{-2\cdot 4}{0^+} = -\infty
\end{aligned}$$

2^e^ méthode : On étudie directement le signe du dénominateur. La C.E. pour la racine carrée est : $x \geq 1$. Dans ce cas :

$$x-2\sqrt{x-1}\geq 0$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{x}_{+} \geq \underbrace{2\sqrt{x-1}}_{+} \,/\,(\ )^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 \geq 4(x-1)$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x+4\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 0, \text{ ce qui est toujours vrai.}$$

Par conséquent, le tableau du signe de $x-2\sqrt{x-1}$ est :

x	1	2	$+\infty$
$x-2\sqrt{x-1}$	$+$	0	$+$

Donc : $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty$.

(13) Les 2 méthodes présentées ci-dessus fonctionnent. On trouve :

$\lim\limits_{x\to 4-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = -\infty$.

(14) $\lim\limits_{x\to 8^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 8^-} f(x) = -\infty$.

(15) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \frac{1}{45}$; $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 7^-} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = +\infty$.

(16) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{4}{3}$; $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$.

(17) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$.

(18) $\lim\limits_{x\to -5^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -5^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \frac{2}{7}$.

(19) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$;

(20) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

(21) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

(22) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$.

(23) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

(24) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{12}$.

(25) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 4$.

(26) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \frac{3}{4}$.

(27) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$.

(28) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$.

(29) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 1$.

(30) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$.

(31) $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty$.

(32) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 24$.

(33) $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$.

(34) Il s'agit d'une f.i. $\frac{0}{0}$. L'idée est d'utiliser le résultat du cours : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0} \frac{\cos(3x)-\cos(2x)}{x^2} &= \lim_{x\to0} \left[\frac{\cos(3x)-1}{x^2} + \frac{1-\cos(2x)}{x^2}\right] \\
&= \lim_{x\to0} 9\cdot\frac{\cos(3x)-1}{(3x)^2} + \lim_{x\to0} 4\cdot\frac{1-\cos(2x)}{(2x)^2} \\
&\underset{\substack{t=3x,\\ u=2x}}{=} \lim_{t\to0} 9\cdot\frac{\cos t-1}{t^2} + \lim_{u\to0} 4\cdot\frac{1-\cos u}{u^2} \\
&= -\tfrac{9}{2} + \tfrac{4}{2} = -\tfrac{5}{2}
\end{aligned}$$

(35) Il s'agit d'une f.i. $\frac{0}{0}$. L'idée est de se ramener à une limite en 0, via le changement de variable : $t = x - \frac{\pi}{6}$. Lorsque $x \to \frac{\pi}{6}$, $t \to 0$ et vice-versa. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin(2x)-\sqrt{3}}{2\cos(4x)+1} \\
&\underset{x-\frac{\pi}{6}=t}{=} \lim_{t\to0} \frac{2\sin\left[2\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\right]-\sqrt{3}}{2\cos\left[4\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\right]+1} \\
&= \lim_{t\to0} \frac{2\sin\left[2t+\frac{\pi}{3}\right]-\sqrt{3}}{2\cos\left[4t+\frac{2\pi}{3}\right]+1} \\
&= \lim_{t\to0} \frac{2\sin\left[2t+\frac{\pi}{3}\right]-\sqrt{3}}{2\cos\left[4t+\frac{2\pi}{3}\right]+1} \\
&= \lim_{t\to0} \frac{2\left[\sin(2t)\cos\frac{\pi}{3}+\cos(2t)\sin\frac{\pi}{3}\right]-\sqrt{3}}{2\left[\cos(4t)\cos\frac{2\pi}{3}-\sin(4t)\sin\frac{2\pi}{3}\right]+1} \\
&= \lim_{t\to0} \frac{\sin(2t)+\sqrt{3}\left(\cos(2t)-1\right)}{1-\cos(4t)-\sqrt{3}\sin(4t)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t\to0} \frac{\dfrac{\sin(2t)+\sqrt{3}\left(\cos(2t)-1\right)}{2t}}{2\cdot\dfrac{1-\cos(4t)-\sqrt{3}\sin(4t)}{4t}} \\
&= \lim_{t\to0} \frac{\overbrace{\dfrac{\sin(2t)}{2t}}^{\to1} + \overbrace{\dfrac{\sqrt{3}\left(\cos(2t)-1\right)}{2t}}^{\to0}}{2\cdot\left[\underbrace{\dfrac{1-\cos(4t)}{4t}}_{\to0} - \sqrt{3}\cdot\underbrace{\dfrac{\sin(4t)}{4t}}_{\to1}\right]} \\
&= \frac{1+0}{2\left(0-\sqrt{3}\right)} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

(36) $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \frac{2}{3}$.

2. Limites en $\pm\infty$

Dans les cas suivants, étudier si possible les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$ respectivement et interpréter graphiquement les résultats.

(1) $f(x) = 6x^8 + 3x^4 + 2x^2 + 1$.

(2) $f(x) = 8x^3 - 2x^2 + 3x - 4$.

(3) $f(x) = 6x^4 + 7x - 9$.

(4) $f(x) = -3x + 5$.

(5) $f(x) = -4x^2 + 2x + 15$.

(6) $f(x) = \dfrac{3x-7}{5x+2}$.

(7) $f(x) = \dfrac{2x^3 - \sqrt{3}x^2 + 7x - 10}{4x^3 + 2x^2 - 11}$.

(8) $f(x) = \dfrac{-6x^3 + 3x^2 + 5}{15x^2 - 3x - 1}$.

(9) $f(x) = \dfrac{5x^3 - 4}{1 - 2x}$.

(10) $f(x) = \dfrac{2x-5}{x^2 + x + 1}$.

(11) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 3}{x^3 - 2x^2 + x + 7}$.

(12) $f(x) = \dfrac{\dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{4}{x}}$.

(13) $f(x) = 2x - \sqrt{x}$.

(14) $f(x) = x\sqrt{x} - 4x^2$.

(15) $f(x) = 3\sqrt{2x+1}$.

(16) $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4$.

(17) $f(x) = 2 - \sqrt{3-2x}$.

(18) $f(x) = \sqrt{3x+4} - \sqrt{2x-5}$.

(19) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 4} - \sqrt{2x^2 - x - 1}$.

(20) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 4} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$.

(21) $f(x)=\sqrt{2x+4}-\sqrt{2x-1}$.

(22) $f(x)=\sqrt{8x^3-x^2-1}-2\sqrt{2x^3+x^2}$.

(23) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-2x^2}-x$.

(24) $f(x)=\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-x\sqrt{x}}$.

(25) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x^2-3x+1}}{5x+2}$.

(26) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3+x^2+1}-x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}}$.

(27) $f(x)=\dfrac{\left|1-x^2\right|}{|x|-x^2}$.

(28) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ (Indication : utiliser le théorème du sandwich).

(29) $f(x)=\dfrac{x-\sin x}{2x+\cos x}$.

Réponses :

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

(6) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\frac{3}{5}$.

(7) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\frac{1}{2}$.

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

(10) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$.

(11) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$.

(12) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-\frac{3}{2}$.

(13) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$ n'existe pas.

(14) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$ n'existe pas.

(15) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$ n'existe pas.

(16) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

(17) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$ n'existe pas ; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

(18) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ n'existe pas.

En effet, $\mathcal{D}_f = \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ n'existe pas et :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x+4} - \sqrt{2x-5} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\underbrace{\sqrt{3+\tfrac{4}{x}}}_{\to\sqrt{3}} - \underbrace{\sqrt{2-\tfrac{5}{x}}}_{\to\sqrt{2}}\right) \\
&= (+\infty)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) = +\infty
\end{aligned}$$

(19) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f\left(x\right) = -\infty$.

En effet, $\mathcal{D}_f = \left]-\infty, -4\right] \cup \left[1, +\infty\right[$ et

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+3x-4} - \sqrt{2x^2-x-1} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2}\left(\sqrt{1+\tfrac{3}{x}-\tfrac{4}{x^2}} - \sqrt{2-\tfrac{1}{x}-\tfrac{1}{x^2}}\right) \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} |x|\left(\underbrace{\sqrt{1+\tfrac{3}{x}-\tfrac{4}{x^2}}}_{\to 1} - \underbrace{\sqrt{2-\tfrac{1}{x}-\tfrac{1}{x^2}}}_{\to\sqrt{2}}\right) \\
&= +\infty\cdot\left(1-\sqrt{2}\right) = -\infty
\end{aligned}$$

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R})\ \sqrt{x^2} = |x| \ \ !!!}$$

(20) La méthode présentée à l'exemple précédent conduit à une f.i. « $\infty \cdot 0$ » car le coefficient de x^2 vaut 1 sous les deux radicaux. Par conséquent, après avoir remarqué que $\mathcal{D}_f = \left]-\infty, -4\right] \cup \left[1, +\infty\right[$, on amplifie par le conjugué :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+3x-4} - \sqrt{x^2-2x+1} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+3x-4} - \sqrt{x^2-2x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+3x-4} + \sqrt{x^2-2x+1}\right)}{\sqrt{x^2+3x-4} + \sqrt{x^2-2x+1}} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3x-4-x^2+2x-1}{\sqrt{x^2+3x-4} + \sqrt{x^2-2x+1}} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x-5}{\sqrt{x^2}\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x-5}{\left|x\right|\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(5-\frac{5}{x}\right)}{\left|x\right|\cdot 2} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x}{\pm 2x} \\
&= \pm\frac{5}{2}
\end{aligned}$$

(21) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ n'existe pas .

(22) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ n'existe pas .

Remarque : Pour justifier qu'il y a un sens à calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ tandis qu'il n'y a pas de sens à calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, il n'est pas nécessaire de calculer le domaine de la fonction. Il suffit de remarquer que :

$$\lim_{x\to+\infty} 8x^3 - x^2 - 1 = +\infty \ \text{ et } \ \lim_{x\to+\infty} 2x^3 + x^2 = +\infty \ ;$$

tandis que :

$$\lim_{x\to-\infty} 8x^3 - x^2 - 1 = -\infty \ \text{ et } \ \lim_{x\to-\infty} 2x^3 + x^2 = -\infty \,.$$

Cela justifie que les deux radicaux existent au voisinage de $+\infty$, mais pas au voisinage de $-\infty$.

(23) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\frac{2}{3}$.

Indication : Pour lever l'indétermination, on utilise la formule classique

$$(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right) = a^3 - b^3 \,.$$

(24) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ n'existe pas .

(25) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{5}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{5}$.

(26) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ n'existe pas .

(27) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -1$.

(28) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

(29) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.