

Etudes de fonctions – corrigé partiel

Exercice 1

1) $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$

a) $Df = D_c f = Df' = \mathbb{R}$

b) f est impaire car
 $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(-x) = \frac{-4x}{(-x)^2+1} = \frac{-4x}{x^2+1} = -f(x)$
 $\Rightarrow G_f$ est symétrique p.r. à 0.

c) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{x^2} = 0 \Rightarrow A.H. y=0$

Position de G_f p.r. à l'A.H. :

$(\forall x \in \mathbb{R}_+) \quad f(x) \geq 0$, donc $G_f / A.H.$

$(\forall x \in \mathbb{R}_-) \quad f(x) \leq 0$, donc $A.H. / G_f$

d) $Df' = \mathbb{R}$
 $f'(x) = \frac{4(x^2+1) - 4x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$

x	$-\infty$	-1	1	∞
$f'(x)$	-	0	0	-
$f(x)$	0	$-\frac{2}{\infty}$	$\frac{2}{\infty}$	0

e) $Df'' = \mathbb{R}$

$$f''(x) = \frac{4(-2x)(x^2+1)^2 - 4(1-x^2)2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{-8x(x^2+1)[(x^2+1) + 2(1-x^2)]}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=\pm\sqrt{3}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
x	-	-	0	+	+
x^2-3	+	0	-	0	+
$f''(x)$	-	+	-	+	+
Gf	\searrow	\nearrow	\searrow	\nearrow	
		PI ₁	PI ₂	PI ₃	

$$PI_3(\sqrt{3}, \sqrt{3}), \quad PI_2(0,0), \quad PI_1(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$$

Equations des tangentes t_0 , $t_{\sqrt{3}}$ et $t_{-\sqrt{3}}$:

$$t_0: y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

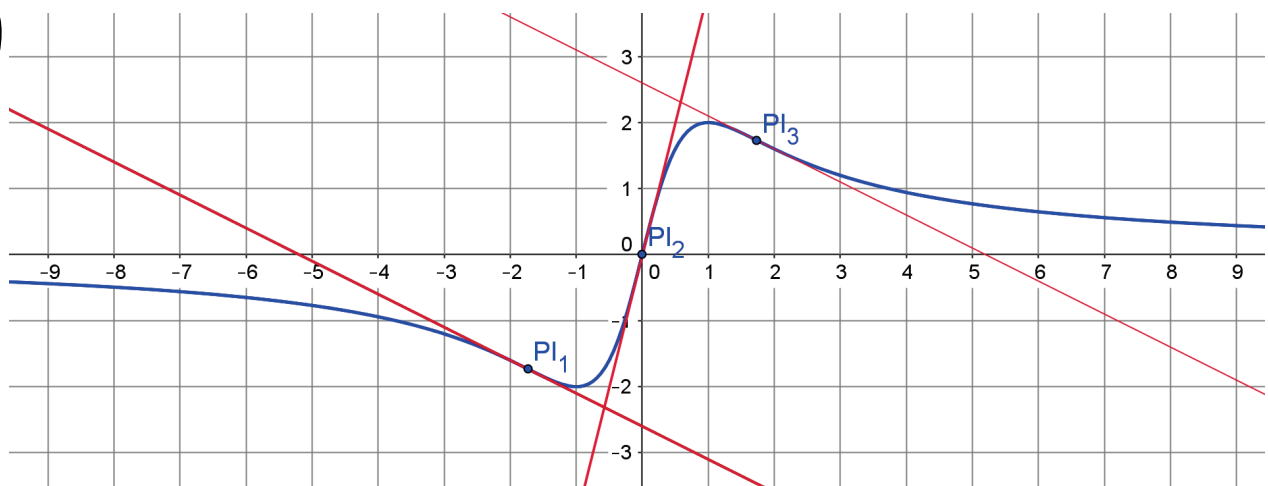
$$\Rightarrow y = 4x$$

$$t_{\sqrt{3}}: y = f'(\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) + f(\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$t_{-\sqrt{3}}: y = -\frac{1}{2}x - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

f)



$$2) f(x) = \frac{4x}{x^2 - 1}$$

$$a) Df = Dcf = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$$

b) f est impaire.

$$c) \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0 \Rightarrow \text{A.H. : } y=0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^{\pm}} f(x) = \frac{4}{0^{\pm}} = \pm \infty \Rightarrow \text{A.V. : } x=1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^{\pm}} f(x) = \frac{-4}{0^{\mp}} = \pm \infty \Rightarrow \text{A.V. : } x=-1$$

Position de G_f p.r. à l'A.H. : dépend du signe de $f(x) \rightarrow$ tableau du signe

$$d) Df' = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4(x^2 - 1) - 4x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{-4(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

x		-1		1	
$f'(x)$	$-$	\parallel	$-$	\parallel	$-$
$f(x)$	$0 \rightarrow -\infty$	\parallel	$+\infty \rightarrow -\infty$	\parallel	$+\infty \rightarrow 0$

e) $\mathcal{D}f'' = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

$$f''(x) = \frac{-4 \cdot 2x(x^2-1)^2 + 4(x^2+1)2(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4}$$

$$= \frac{8x \cancel{(x^2-1)} (-x^2+1 + 2x^2+2)}{(x^2-1)^3}$$

$$= \frac{8x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

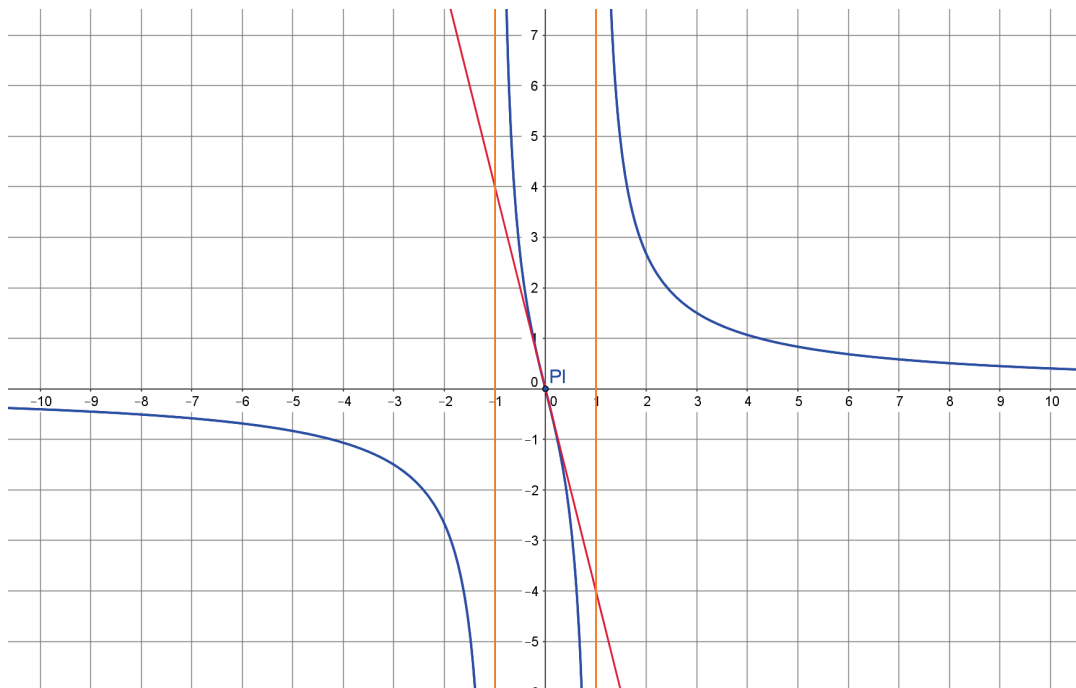
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
x		$-$	$-$	0	$+$	$+$
x^2-1	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$		$+$	0	$-$	$+$
Gf		\downarrow	\uparrow		\downarrow	\uparrow

PI

Point d'inflexion: PI(0,0)

Tangente au PI: $t_0 \equiv y = -4x$

f)



$$3) f(x) = \frac{8\sqrt{x}}{x+2}$$

$$a) Df = \mathbb{R}_+ = D_c f$$

b) f n'est ni paire, ni impaire

$$c) \lim_{x \rightarrow 0^{(+)}} f(x) = 0 = f(0) \quad (f \text{ continue en } 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}})} = 0$$

$$\Rightarrow A.T.: y=0$$

$$d) (\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad f'(x) = \frac{8 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}(x+2) - 8\sqrt{x} \cdot 1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{4x+8 - 8x}{\sqrt{x}(x+2)^2}$$

$$= \frac{4(2-x)}{\sqrt{x}(x+2)^2}$$

$$\cancel{f'(0)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{8}{\sqrt{x}(x+2)} = +\infty$$

$\Rightarrow f$ n'est pas dérivable en 0 et $Df' = \mathbb{R}_+^*$

$\Rightarrow G_f$ admet une demi-tangente verticale en $(0,0)$.

$$e) Df'' = \mathbb{R}_+^*$$

$$f''(x) = \frac{-4\sqrt{x}(x+2)^2 - 4(2-x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+2)^2 + \sqrt{x} \cdot 2(x+2)\right)}{x(x+2)^4}$$

$$= \frac{-4x(x+2)^2 - 2(2-x) \cdot (x+2)^2 - 8x(2-x)(x+2)}{x \cdot \sqrt{x}(x+2)^4}$$

$$= \frac{-4x(x+2) - 2(4-x^2) - 16x + 8x^2}{x\sqrt{x}(x+2)^3}$$

$$= \frac{-4x^2 - 8x - 8 + 2x^2 - 16x + 8x^2}{x\sqrt{x}(x+2)^3}$$

$$= \frac{6x^2 - 24x - 8}{x\sqrt{x}(x+2)^3}$$

$$= \frac{2(3x^2 - 12x - 4)}{x\sqrt{x}(x+2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + \frac{\sqrt{43}}{3} \approx 4,3$$

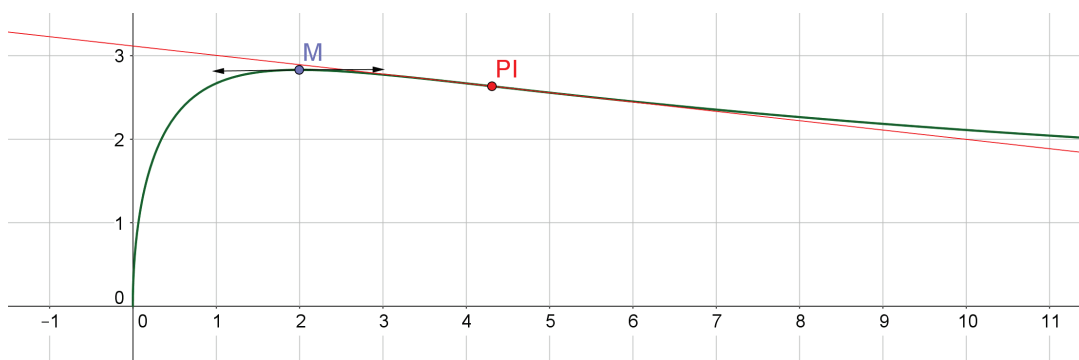
$$\text{ou } x = 2 - \frac{\sqrt{43}}{3} \approx -0,3 \text{ à écarter}$$

x	0	$2 + \frac{\sqrt{43}}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$		-	+
Gf		↓	↑
		PI	

$$PI \left(2 + \frac{\sqrt{43}}{3} ; f \left(2 + \frac{\sqrt{43}}{3} \right) \right)$$

$$\approx 2,63$$

f)



$$4) f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 3}$$

$$a) Df = \mathbb{R} \setminus \{-3\} = D_{cf}$$

b) f n'est ni paire, ni impaire

$$c) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \pm\infty$$

\Rightarrow pas d'A.H

$$\lim_{x \rightarrow -3^\pm} f(x) = \frac{5}{0^\pm} = \pm\infty \Rightarrow A.V.: x = -3$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 9 + 5}{x + 3} = x - 3 + \frac{5}{x + 3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (x - 3)) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{x + 3} = 0$$

$$\Rightarrow A.O.: y = x - 3$$

Position de $Gf/A.O.$: déterminée par le signe de $\varepsilon(x) = \frac{5}{x + 3}$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$\varepsilon(x)$	-		+
Position de Gf p.n. à l'A.O.	A.O./ Gf		$Gf/A.O.$

$$d) Df' = Df = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x + 3) - (x^2 - 4) \cdot 1}{(x + 3)^2} = \frac{x^2 + 6x + 4}{(x + 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \pm \sqrt{5}$$

x	$-\infty$	$-3-\sqrt{5}$	-3	$-3+\sqrt{5}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow (M)	\searrow $-\infty$	\nearrow (m)	$+\infty$

$$f(-3-\sqrt{5}) = -2(3+\sqrt{5}) = \textcircled{M}$$

$$f(-3+\sqrt{5}) = 2(-3+\sqrt{5}) = \textcircled{m}$$

e) $\mathcal{D}f'' = \mathbb{R} - \{-3\}$

$$f''(x) = \frac{(2x+6)(x+3)^2 - (x^2+6x+4)2(x+3)}{(x+3)^4}$$

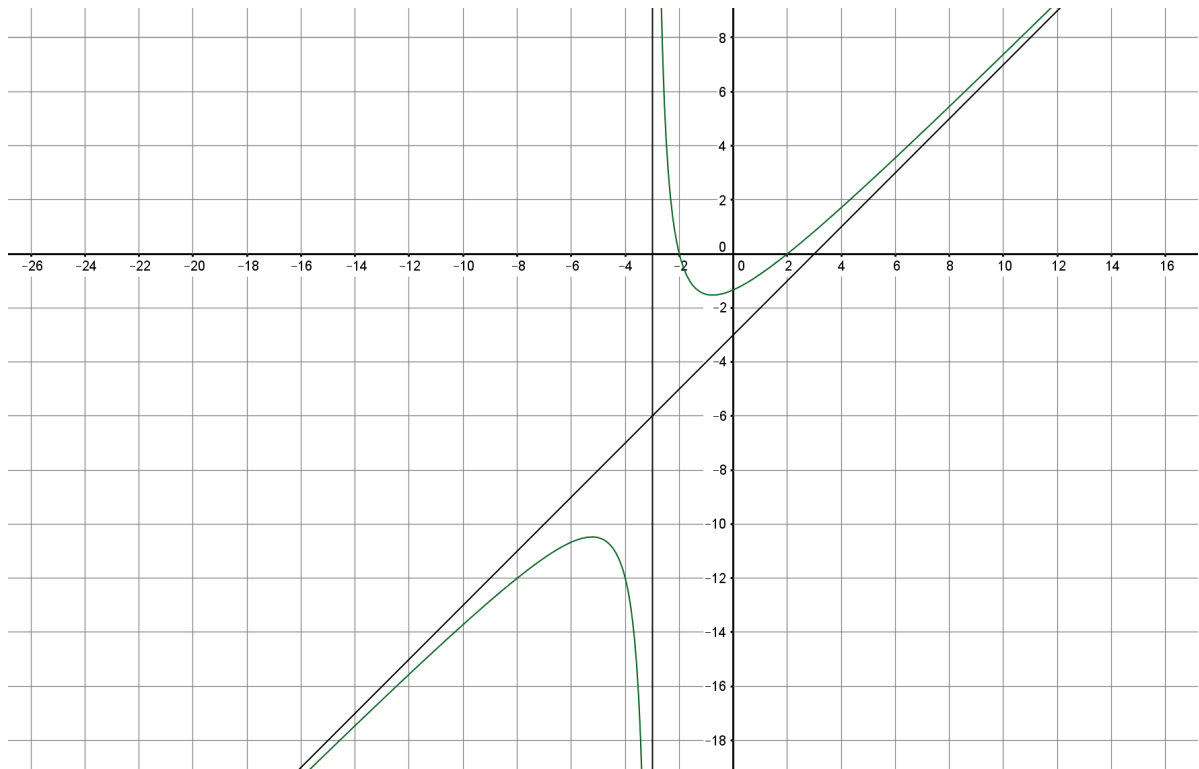
$$= \frac{\cancel{(x+3)} [2 \cdot (x+3)^2 - (x^2+6x+4) \cdot 2]}{(x+3)^{4-1}}$$

$$= \frac{2(\cancel{x^2} + \cancel{6x} + 9 - \cancel{x^2} - \cancel{6x} - 4)}{(x+3)^3}$$

$$= \frac{10}{(x+3)^3} \quad (\text{signe de } x+3)$$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f''(x)$	-		+
Gf	\searrow	\parallel	\nearrow

f)



5) $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2}$

a) $D_f = D_{cf} = \mathbb{R}_+ \setminus \{4\}$

b) f n'est ni paire, ni impaire

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1 - \frac{1}{2}$ (f continue en 0)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)} = 1 \rightarrow \text{A.H.: } y = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^\pm} f(x) = \frac{3}{0^\pm} = +\infty \Rightarrow \text{A.V.: } x = 4$$

Position de G_f p.n. à l' A.H:

$$\delta(x) = f(x) - 1 = \frac{\sqrt{x} + 1 - (\sqrt{x} - 2)}{\sqrt{x} - 2} = \frac{3}{\sqrt{x} - 2}$$

x	0	4	$+\infty$
$\delta(x)$			
		-	+
Position		AH/Gf	Gf/A.H.

$$d) (\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{4\})$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-2) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-2)^2}$$

$$= \frac{-3}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)^2} < 0$$

Dérivabilité en 0 :

$$\cancel{f'(0)} = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) \quad (\text{théorème "limite de la dérivée"})$$

$$= -\infty$$

$\Rightarrow f$ n'est pas dérivable en 0 et $Df' = \mathbb{R}_+^* \setminus \{4\}$

$\Rightarrow G_f$ admet une demi-tangente verticale en $(0, -\frac{1}{2})$

x	0	4	$+\infty$
$f'(x)$	\parallel	\parallel	$-$
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$ (M)	$+\infty$	1

$$e) Df'' = \mathbb{R}_+^* \setminus \{4\}$$

$$f''(x) = +\frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-2)^2 + \sqrt{x} \cdot 2(\sqrt{x}-2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x(\sqrt{x}-2)^4}$$

$$= \frac{3(\sqrt{x}-2 + 2\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)^3}$$

$$= \frac{3(3\sqrt{x}-2)}{4x\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)^3}$$

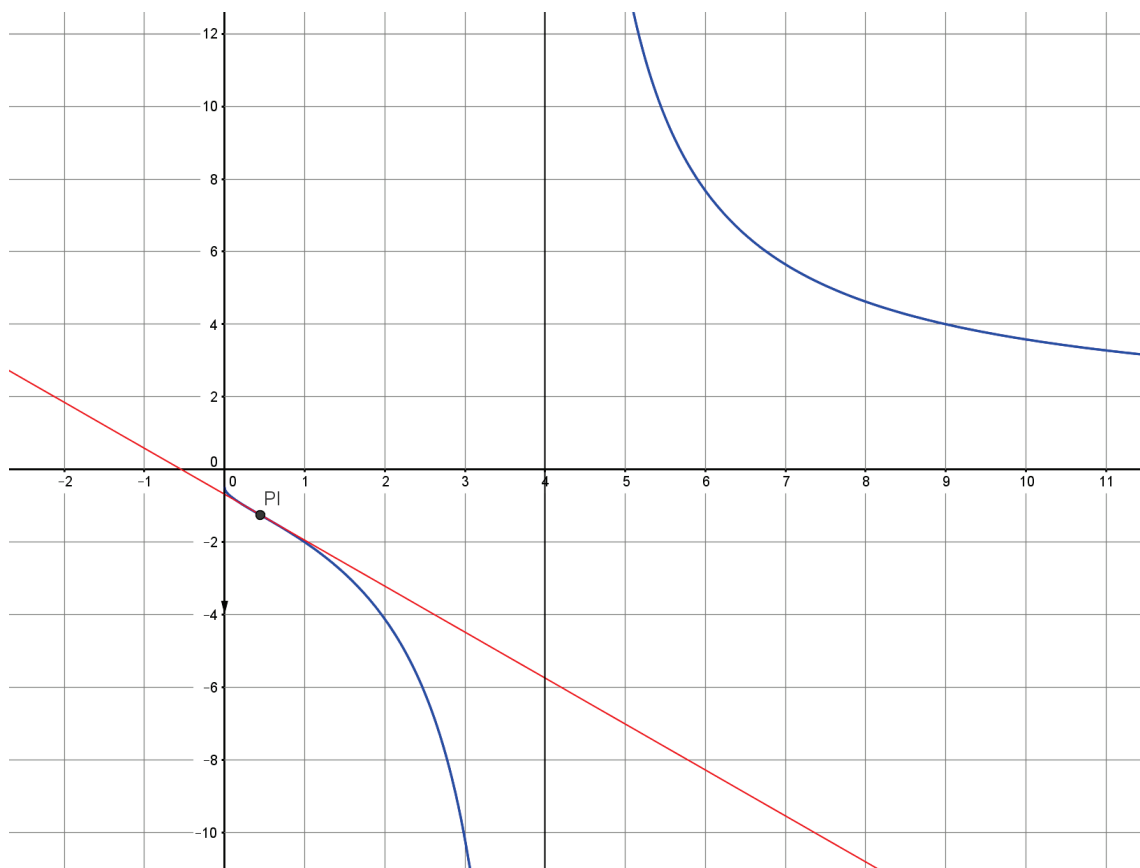
$\underbrace{\quad}_{>0}$

x	0	$\frac{4}{9}$	4	$+\infty$
$(\sqrt{x}-2)^3$	-	-	0	+
$3\sqrt{x}-2$	-	0	+	+
$f'(x)$	+	0	-	+
Gf		(\uparrow) PI	(\downarrow)	(\uparrow)

$$f\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{\frac{2}{3} + 1}{\frac{2}{3} - 2} = -\frac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{3}} = -\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \text{PI}\left(\frac{4}{9}; -\frac{5}{4}\right)$$

$$t_{9/4}: y = -\frac{81}{64}x - \frac{11}{16}$$



$$6) f(x) = 3 \cdot \sqrt[3]{x} - x$$

$$a) Df = Dcf = \mathbb{R}$$

$$b) f \text{ est impaire car } (\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(-x) = 3\sqrt[3]{-x} - (-x) = -3\sqrt[3]{x} + x = -f(x)$$

\Rightarrow Gf symétrique p.r. à 0.

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\underbrace{3x^{-2/3} - 1}_{\rightarrow -1} \right) = -\infty$$

$$\text{et par symétrie : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^{-2/3} - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3\sqrt[3]{x} = +\infty$$

Donc pas d'AH ni A.O, mais une branche parabolique de direction asymptotique $y = -x$.

$$d) Df' = \mathbb{R}^* \quad (\sqrt[3]{x} \text{ n'est pas dérivable en } 0!)$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 1 = \frac{1 - \sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\cancel{f'(0)} = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{1}{0^+} - 1 = +\infty$$

\Rightarrow Gf admet en $(0,0)$ une $1/2$ -tangente vert.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1^3 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\underset{-2}{\text{m}}$	0	$\underset{2}{\text{M}}$	$-\infty$

$\hookrightarrow (0,0)$ est un point d'inflexion
à tangente verticale

e) $\mathcal{D}f'' = \mathbb{R}^*$

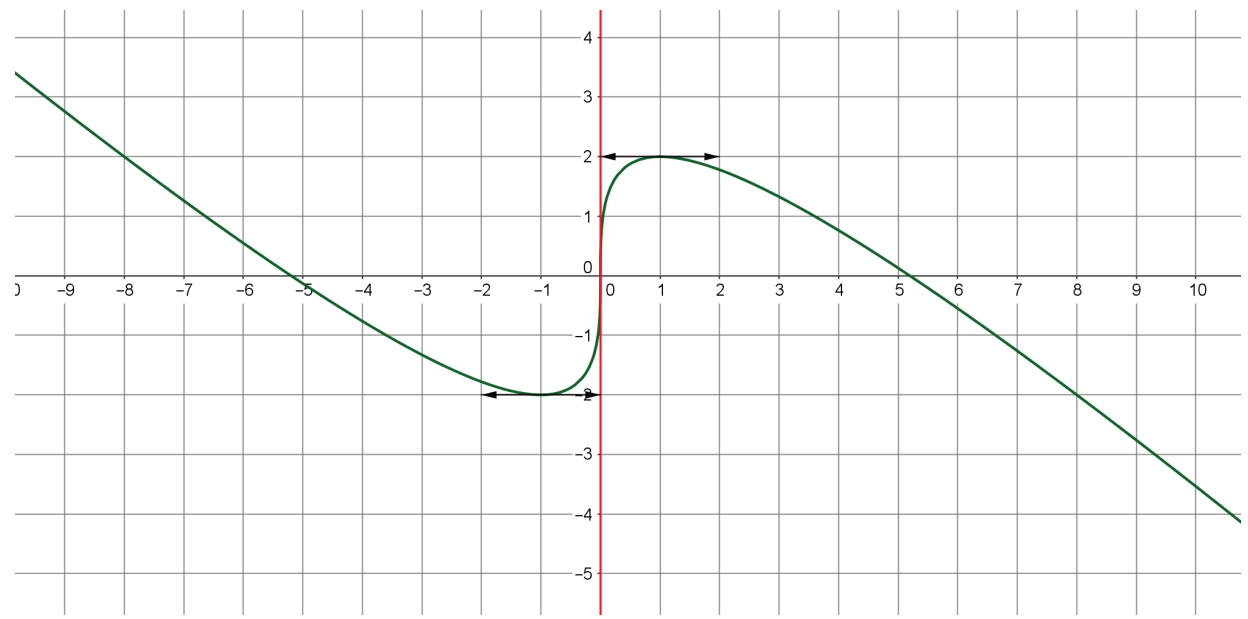
$$f''(x) = (x^{-2/3} - 1)' = -\frac{2}{3}x^{-5/3} = -\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$$

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
gf	\uparrow	PI $(0,0)$	\downarrow

(à tangente verticale!)

Equation de la tangente au PI $(0,0)$: $x=0$

f)



$$(7) f: x \mapsto \frac{x^3 + x^2 + 12x + 76}{x^2 + 12}$$

a) $Df = D_{cf} = \mathbb{R}$

b) f n'est ni paire ni impaire car p.ex:
 $f(1) = \frac{90}{13}$ et $f(-1) = \frac{64}{13}$, résultats ni égaux
 ni opposés.

c) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty \Rightarrow$ pas d'A#.

La division euclidienne donne:

$$f(x) = x + 1 + \left(\frac{64}{x^2 + 12} \right) \varepsilon(x)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varepsilon(x) = 0$ on a A.O: $y = x + 1$

d) $Df' = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \left(x + 1 + \frac{64}{x^2 + 12} \right)' = 1 - \frac{128x}{(x^2 + 12)^2}$$

$$= \frac{(x^2 + 12)^2 - 128x}{(x^2 + 12)^2} = \frac{x^4 + 24x^2 - 128x + 144}{(x^2 + 12)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^4 + 24x^2 - 128x + 144}_{p(x)} = 0$$

$$p(1) = 1 + 24 - 128 + 144 \neq 0$$

$$p(-1) = 1 + 24 + 128 + 144 \neq 0$$

$$p(2) = 16 + 96 - 256 + 144 = 0$$

$\Rightarrow p(x)$ est divisible par $x - 2$

Schéma de Horner: $p(x) = (x - 2) \underbrace{(x^3 + 2x^2 + 28x - 72)}_{q(x)}$

$$q(2) = 8 + 8 + 56 - 72 = 0$$

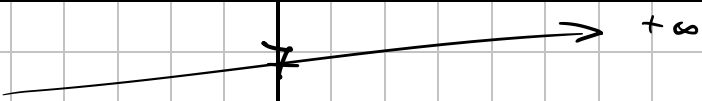
$\Rightarrow q(x)$ est aussi divisible par $(x - 2)$

Schema de Horner $\Rightarrow q(x) = (x-2)(x^2+4x+36)$

Donc $p(x) = (x-2)^2(x^2+4x+36) = 0$
 $\Leftrightarrow x=2$ ou $\underbrace{x^2+4x+36=0}_{\text{impossible!}}$

Finalement : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x=2$

$$\text{et } f''(x) = \frac{(x-2)^2(x^2+4x+36)}{(x^2+12)^2}$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$				$+\infty$

$$f(2) = 2 + 1 + \frac{64}{2^2+12} = 3 + \frac{64}{16} = 7$$

$(2, 7)$ est un point d'inflexion à tangente horizontale.

e) $Df'' = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(1 - \frac{128x}{(x^2+12)^2} \right)' \\ &= \frac{-128(x^2+12)^{-2} + 128x \cdot 2(x^2+12)^{-3} \cdot 2x}{(x^2+12)^3} \\ &= \frac{128(-x^2-12+4x^2)}{(x^2+12)^3} \\ &= \frac{384(x^2-4)}{(x^2+12)^3} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f''(x)$	+	0	-	+	
G_f	\cup	PI_2	\cap	PI_1	\cup

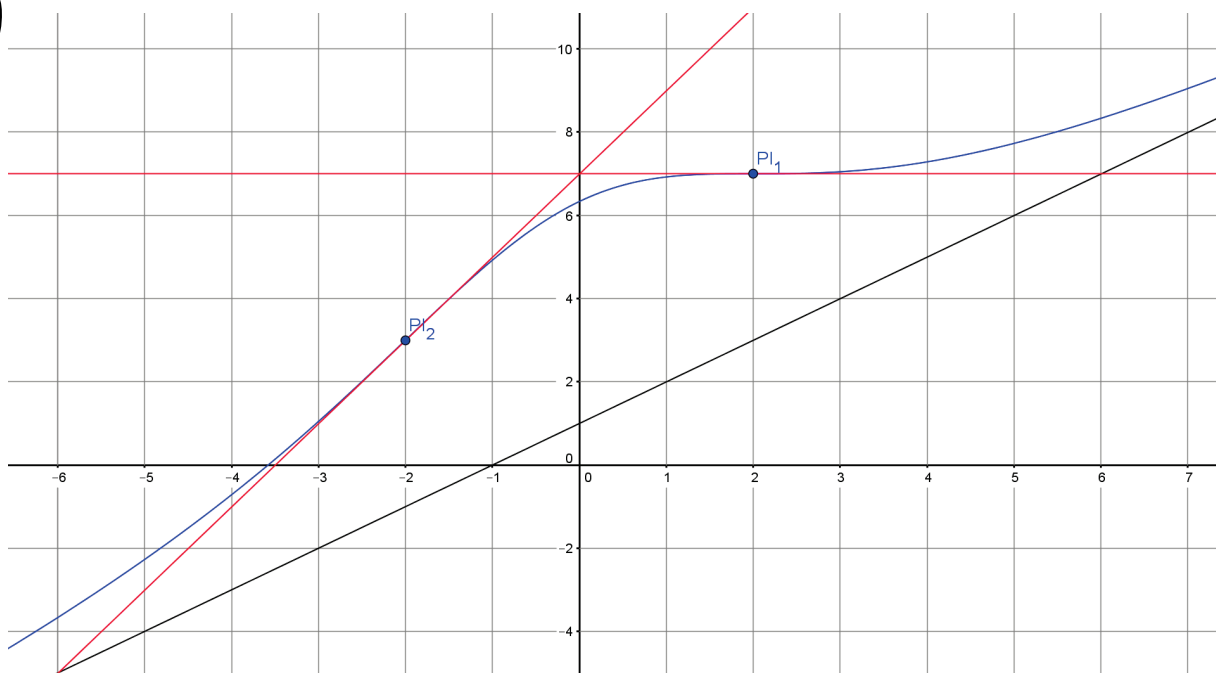
$$PI_1(2, 7)$$

$$t_2 \equiv y = 7$$

$$PI_2(-2, 3)$$

$$t_{-2} \equiv y = 2x + 7$$

f)



$$(8) f: x \mapsto \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 5}{(x+1)^2} = x + 1 + \frac{2x+4}{(x+1)^2}$$

$$a) D_f = D_{cf} = \mathbb{R} - \{-1\}$$

b) f n'est ni paire, ni impaire

$$c) \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2x+4}{(x+1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \text{A.O. : } y = x+1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty \Rightarrow \text{A.V. : } x = -1$$

Position de g_f par rapport à l'A.O.:

x	-2	-1
$2x+4$	-	+
Position g_f pr. A.O.	A.O./ g_f	g_f /A.O.

point
d'intersection
 $\perp (-2, -1)$

$$d) Df' = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$f'(x) = \left(x+1 + \frac{2x+4}{(x+1)^2} \right)'$$

$$= 1 + \frac{2(x+1)^2 - (2x+4) \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$= 1 + \frac{2(x+1) - 4(x+2)}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{(x+1)^3 - 2x - 6}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 2x - 6}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{x^3 + 3x^2 + x - 5}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{(x-1)(x^2+4x+5)}{(x+1)^3} \quad (\text{par Horner})$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x-1$	-		+	+
$(x+1)^3$	-	0	-	+
$f'(x)$	+		0	+
$f(x)$	$-\infty$		$7/2$ (m)	$+\infty$

e) $Df'' = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f''(x) = \left(1 - \frac{2x+6}{(x+1)^3} \right)' \quad \left(\rightarrow \text{voir calcul de } f'(x) \right)$$

$$= - \frac{2(x+1)^3 - (2x+6) \cdot 3(x+1)^2 \cdot 1}{(x+1)^6}$$

$$= - \frac{2x+2 - 6x-18}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{4x+16}{(x+1)^4} = \frac{4(x+4)}{(x+1)^4}$$

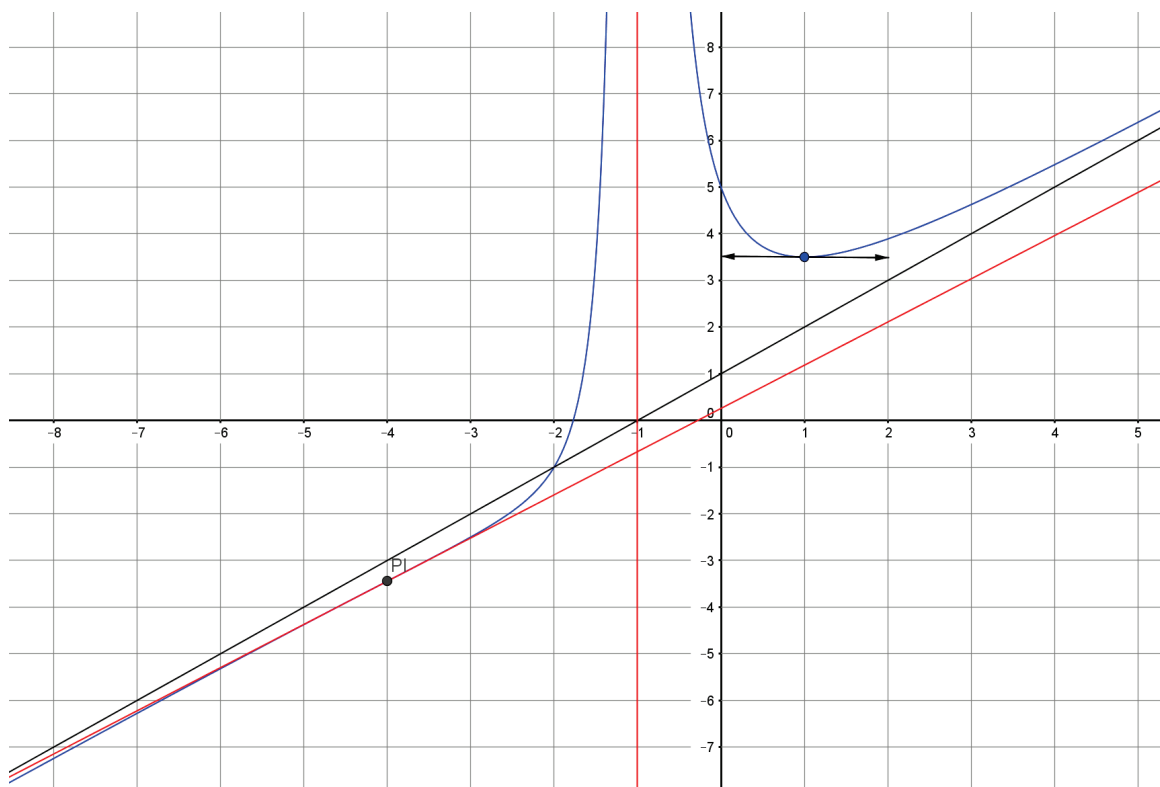
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -4$$

x	$-\infty$	-4	-1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+	+
Gf	(↓)	(PI)	(↑)	(↑)

PI $\left(-4, -\frac{31}{9}\right)$

$$x_{-4} = y = \frac{25}{27}(x+4) - \frac{31}{9}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{25}{27}x + \frac{7}{27}$$



(10) $f : x \mapsto x\sqrt{x^2 - 2}$

a) $D_f = D_{cf} =]-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty[$

b) f est impaire

c) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ pas d'A.H.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 - 2} = +\infty \Rightarrow$ pas d'A.O.

d) $\forall x \in D_f \setminus \{\pm\sqrt{2}\}$

$$f'(x) = \sqrt{x^2 - 2} + x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 2}}$$

$$= \frac{x^2 - 2 + x^2}{\sqrt{x^2 - 2}}$$

$$= \frac{2(x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 - 2}} = \frac{2(x-1)(x+1)}{\sqrt{x^2 - 2}}$$

$$\cancel{f'(\pm\sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow \pm\sqrt{2}} f'(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en $\pm\sqrt{2}$
 et g_f admet en $(\pm\sqrt{2}, 0)$ une demi-tangente
 verticale

$$Df' =]-\infty; -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}; +\infty[$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1, \text{ impossible}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+			+
$f(x)$	$-\infty$	0	0	$+\infty$

$$e) Df'' = Df' =]-\infty; -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}; +\infty[$$

$$f''(x) = \frac{4x\sqrt{x^2-2} - 2(x^2-1) \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2-2}}}{x^2-2}$$

$$= \frac{4x(x^2-2) - 2x(x^2-1)}{(x^2-2)\sqrt{x^2-2}}$$

$$= \frac{2x(2x^2-4-x^2+1)}{(x^2-2)\sqrt{x^2-2}}$$

$$= \frac{2x(x^2-3)}{(x^2-2)\sqrt{x^2-2}}$$

$$f''(x) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x = \pm\sqrt{3} \quad (\in Df'')$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
x							
x^2-3	+	0	-	-	-	0	+
x^2-2	+	+	0	-	0	+	+
$f''(x)$	-	0	+	X	-	0	+
Gf	(↙)	(↗)	X	(↘)	(↗)	(↘)	
		PI ₁	(-√2, 0)	(√2, 0)	PI ₂		

$$PI_1(-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$$

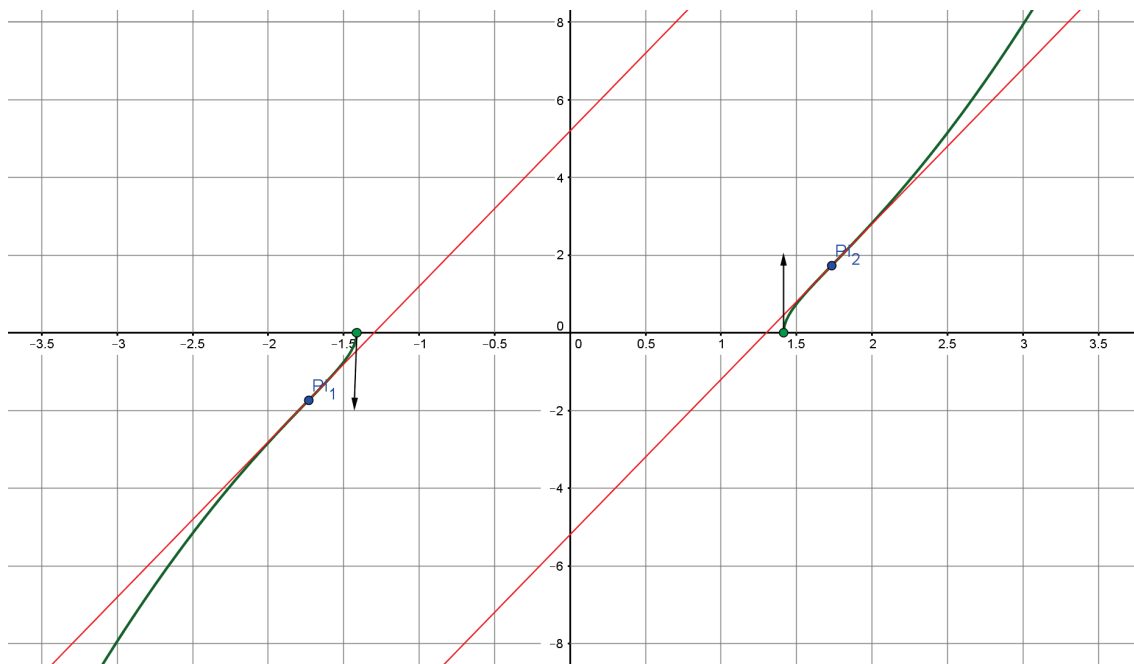
$$PI_2(\sqrt{3}, \sqrt{3})$$

$$t_{\sqrt{3}} \equiv y = f'(\sqrt{3})(x - \sqrt{3}) + f(\sqrt{3})$$

$$\Leftrightarrow y = 4(x - \sqrt{3}) + \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow y = 4x - 3\sqrt{3}$$

$$t_{-\sqrt{3}} \equiv y = 4x + 3\sqrt{3} \quad (\text{par symétrie})$$



(12) $f: x \mapsto \sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$

a) $Df = Dcf = \mathbb{R}_+$

b) f n'est ni paire ni impaire car Df n'est pas symétrique p.r. à 0.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x^2(1+\frac{1}{x^2})}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$
 \rightarrow A.H. $y=0$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ (f continue en 0)

Comme $(\forall x \in \mathbb{R}_+) f(x) \geq 0$, Gf est toujours situé au-dessus de l'A.H. : $y=0$

d) $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$

$$f'(x) = \frac{\frac{x^2+1 - x(2x)}{(x^2+1)^2}}{2 \sqrt{\frac{x}{x^2+1}}}$$

$$= \frac{(1-x)(1+x)}{2(x^2+1)^2} \sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$$

$$= \frac{(1-x)(1+x)}{2(x^2+1)\sqrt{x(x^2+1)}}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x=1$ (-1 est à écarter)

~~$f'(0)$~~ $= \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0^+} = +\infty$

\Rightarrow $\frac{1}{2}$ -tangente verticale en $(0,0)$
 et $Df' = \mathbb{R}_+^*$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	1	0	-
$f(x)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
	(m)	(M)	

d) $Df'' = Df' = \mathbb{R}_+^*$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1-x^2}{(x^2+1)^{3/2} \sqrt{x}} \right)'$$

$$= \frac{1}{2} \frac{-2x(x^2+1)^{3/2} \sqrt{x} - (1-x^2) \cdot \left[3(x^2+1)^{1/2} x \sqrt{x} + (x^2+1)^{3/2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \right]}{(x^2+1)^3 \cdot x}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{-4x^2(x^2+1)^{3/2} - (1-x^2) \cdot 6(x^2+1)^{1/2} \cdot x^2 - (1-x^2)(x^2+1)^{3/2}}{x(x^2+1)^3 \cdot 2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{-4x^2(x^2+1) - 6x^2(1-x^2) - (1-x^2)(x^2+1)}{2x\sqrt{x}(x^2+1)^{5/2}}$$

$$= \frac{-4x^4 - 4x^2 - 6x^2 + 6x^4 - 1 + x^4}{4x\sqrt{x}(x^2+1)^{5/2}}$$

$$= \frac{3x^4 - 10x^2 - 1}{4x^{3/2}(x^2+1)^{5/2}}$$

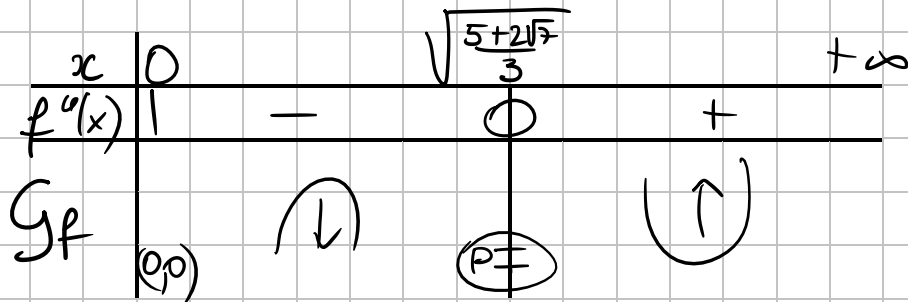
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^4 - 10x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{10 \pm 4\sqrt{7}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{5 + 2\sqrt{7}}{3}$$

(*éq. bicarrée*)
 $\rightarrow y = x^2$
 $\Delta = 100 + 12$
 $= 112 = 16 \cdot 7$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{7}}{3}} \quad (\text{sol. } < 0 \text{ à écarter})$$

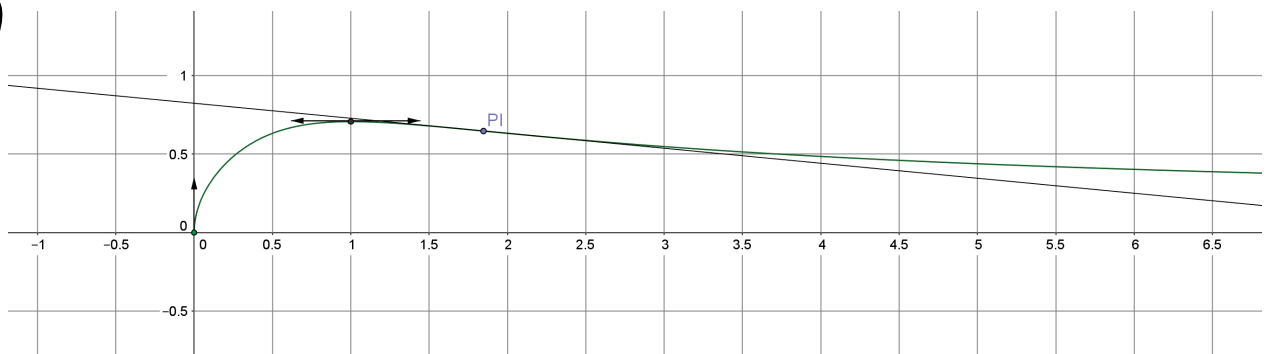


On détermine une valeur approchée des coordonnées du point d'inflexion à l'aide de la calculatrice

$$PI \approx (1,85; 0,65)$$

Tangente au PI : trop compliqué ... ☹

f)



14) $f(x) = x^2 - 2|x+1|$

a) $Df = D_c f = \mathbb{R}$

b) Pas d'éléments de symétrie.

c) Pas d'asymptotes

d) e) Solution "rapide" → **tableau !**

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	x^2+2x+2	1	x^2-2x-2
$f'(x)$	$2x+2$	0	$2x-2$
$f''(x)$	2	X	2

f n'est pas dérivable en -1 car $f'_g(-1)=0$ et $f'_d(-1)=-4$, donc $f'_g(-1) \neq f'_d(-1)$

$$Df' = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad \text{et} \quad Df'' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Attention : Comme $f'(-1)$ n'existe pas, $f''(-1)$ n'existe pas non plus !

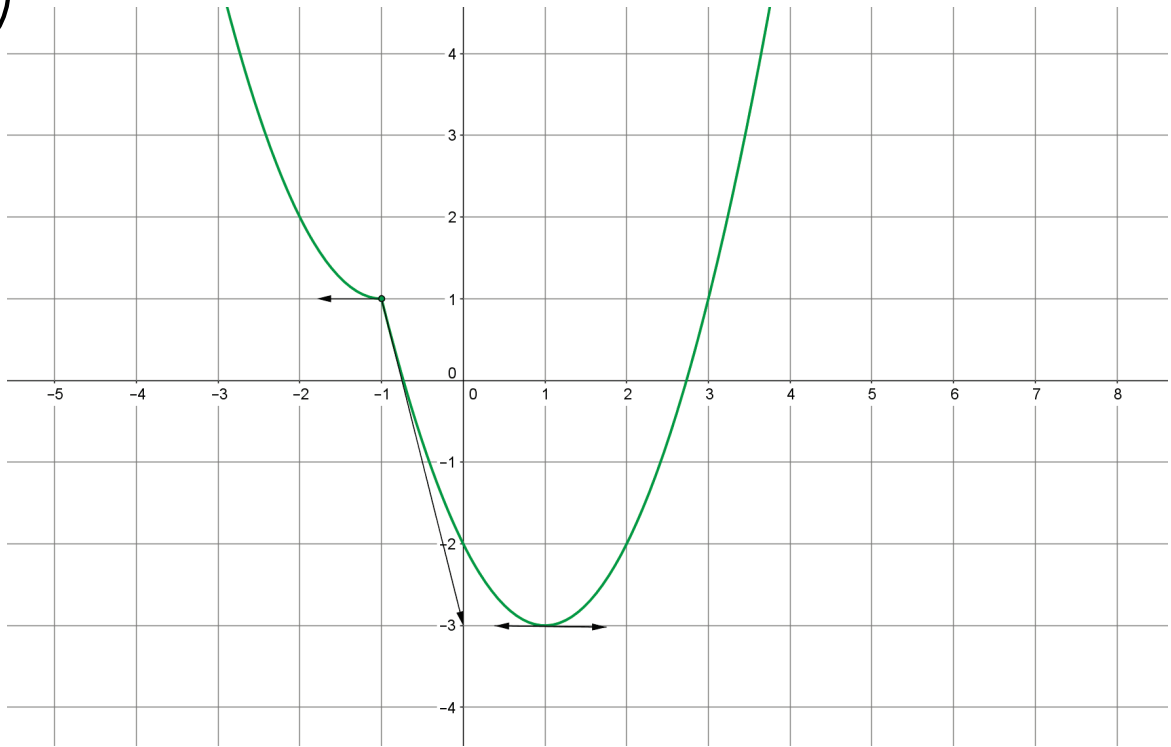
Gf n'a pas de point d'inflexion car $f''(x)$ ne s'annule jamais.

Tableau résumé :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$ $	$-$	$+$
$f''(x)$	$+$	$ $	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty \rightarrow$	1	$\rightarrow \textcircled{-3}$	$\rightarrow +\infty$
Gf	\cup	\cup	\cup	

Remarque : $(-1, 1)$ est un point anguleux

f)



16) $f(x) = \sqrt{|x(x-1)|}$

a) $Df = D_c f = \mathbb{R}$

b) $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(1-x) = \sqrt{|(1-x) \cdot (1-x-1)|}$
 $= \sqrt{|(1-x) \cdot (-x)|}$
 $= \sqrt{|x(x-1)|} = f(x)$

\Rightarrow La droite d'éq. $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie. (Ce n'est pas surprenant puisque c'est aussi un axe de symétrie de la parabole d'éq. $y = x(x-1)$)

c) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$ pas d'A.H.
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{x} \xrightarrow{\rightarrow 1}$
 $= \pm 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x} - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x} - x)(\sqrt{x^2 - x} + x)}{\sqrt{x^2 - x} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} - x - \cancel{x^2}}{x(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1)} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{A.O.D. : } y = x^{-1/2}$$

Par symétrie : A.O.G : $y = -x + \frac{1}{2}$
 (Les 2 A.O. sont symétriques p.r. à l'axe de symétrie : $x = \frac{1}{2}$)

d)
e)

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f(x)$	$\sqrt{x^2-x}$	0	$\sqrt{x-x^2}$	0	$\sqrt{x^2-x}$
$f'(x)$	$\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$f''(x)$	$\frac{-1}{4(x^2-x)^{3/2}}$		$\frac{-1}{4(x-x^2)^{3/2}}$		$\frac{-1}{4(x^2-x)^{3/2}}$

⊗
 Voir
 calculs
 page
 suivante!

$$\cancel{f'_d(0)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\cancel{f'_g(0)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

f n'est pas dérivable en 0 et $(0,0)$
 est un point de rebroussement

De même $(1,0)$ est un point de rebroussement.
 $Df' = \mathbb{R} - \{0,1\}$.

$$(\forall x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[)$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{x^2-x} - (2x-1) \cdot \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}}{x^2-x}$$

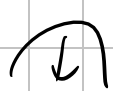

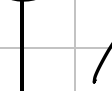
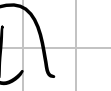
$$= \frac{\cancel{4x^2} - \cancel{4x} - \cancel{4x^2} + \cancel{4x} - 1}{4(x^2-x)^{3/2}}$$

$$= \frac{-1}{4(x^2-x)^{3/2}} < 0$$

De même: $(\forall x \in]0, 1[) f''(x) = \frac{-1}{4(x-x^2)^{3/2}} < 0$

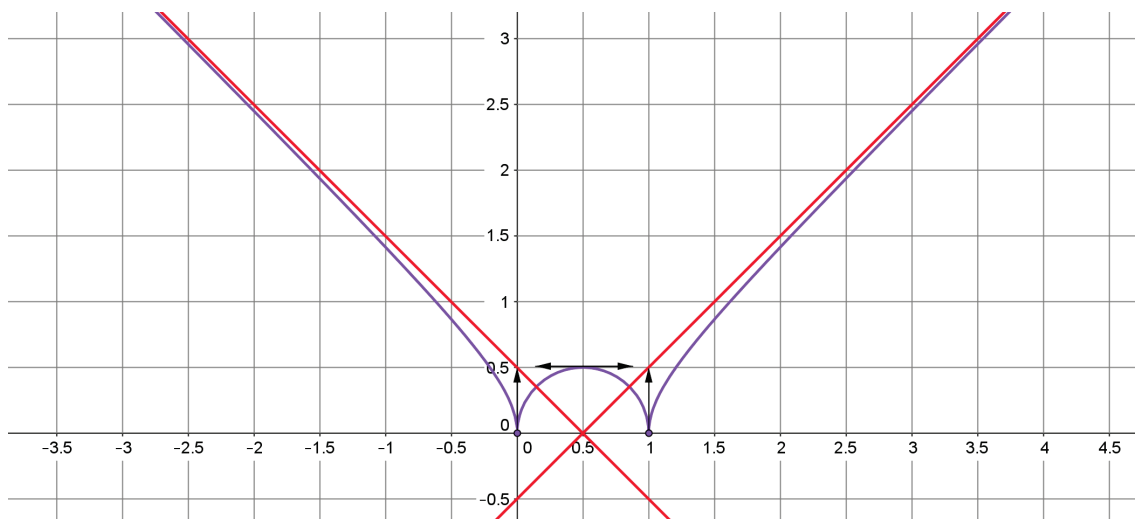
Donc:

$\forall x \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \quad f''(x) = \frac{-1}{4|x^2-x|^{3/2}} < 0$
 et $Df'' = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	$-\infty$	+	$+\infty$	+
$f''(x)$	-	-	-	-	-
$f(x)$	$-\infty$	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$-\infty$	$+\infty$
Gf					

Il n'y a pas de point d'inflexion.

f)



$$(21) f: x \mapsto \frac{4x|x-2|}{x^2-2x-3}$$

a) C.E : $x^2-2x-3 \neq 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-3) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq -1 \text{ et } x \neq 3$$

$$\text{dom} f = \text{dom}_c f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$$

b) f n'est ni paire, ni impaire car $\text{dom} f$ n'est pas symétrique p.r. à 0.

c) $(\forall x \in \text{dom} f)$

$$\text{Si } x \geq 2 \text{ alors } f(x) = \frac{4x(x-2)}{x^2-2x-3}$$

$$\text{Si } x \leq 2 \text{ alors } f(x) = -\frac{4x(x-2)}{x^2-2x-3}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \pm \frac{4x^2}{x^2} = \pm 4$$

$$\rightarrow \text{A.H.D : } y = 4 \text{ et A.H.G : } y = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{-12}{0^+} = +\infty \Rightarrow \text{A.V : } x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{12}{0^+} = +\infty \Rightarrow \text{A.V : } x = -3$$

d) $(\forall x \in \text{dom} f)$

$$\text{Si } x > 2 \text{ alors } f'(x) = \frac{(8x-8)(x^2-2x-3) - (4x^2-8x)(2x-2)}{(x^2-2x-3)^2}$$

$$= \frac{(x-1)(8x^2-16x-24-8x^2+16x)}{(x^2-2x-3)^2}$$

$$= \frac{-24(x-1)}{(x^2-2x-3)^2}$$

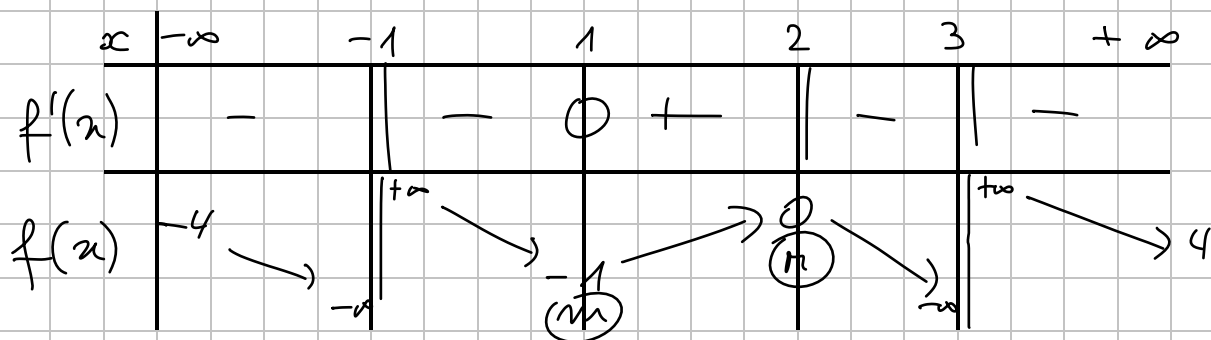
$$\text{Si } x < 2 \text{ alors } f'(x) = \frac{24(x-1)}{(x^2-2x-3)^2}$$

D'après le théorème "limite de la dérivée" :

$$f'_d(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = -\frac{2^4}{9} = -\frac{8}{3}$$

$$f'_g(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \frac{2^4}{9} = \frac{8}{3}$$

Donc f n'est pas dérivable en 2 et le point $(2, 0)$ est un point anguleux du graphique de f . $\text{dom } f' = \mathbb{R} - \{-1, 2, 3\}$



e) ($\forall x \in \text{dom } f$)

Si $x > 2$ alors

$$f''(x) = \frac{-24(x^2 - 2x - 3)^{\frac{1}{2}} + 24(x-1) \cdot 2(x^2 - 2x - 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x-2)}{(x^2 - 2x - 3)^3}$$

$$= \frac{-24(x^2 - 2x - 3) + 96(x-1)^2}{(x^2 - 2x - 3)^3}$$

$$= \frac{24(-x^2 + 2x + 3 + 4x^2 - 8x + 4)}{(x^2 - 2x - 3)^3}$$

$$= \frac{24(3x^2 - 6x + 7)}{(x^2 - 2x - 3)^3}$$

Si $x < 2$ alors $f''(x) = -\frac{24(3x^2 - 6x + 7)}{(x^2 - 2x - 3)^3}$

$\text{dom } f'' = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2, 3\}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 7 = 0$

impossible car $\Delta = 36 - 84 < 0$

Si $x > 2$ alors $f''(x)$ a le signe de $x^2 - 2x - 3$

Si $x < 2$ alors $f''(x)$ a le signe de $-x^2 + 2x + 3$

x	$-\infty$	-1	2	3	$+\infty$		
$f''(x)$	-		+		-		+
Gf	\downarrow		\uparrow		\downarrow		\uparrow

Le point $(2, 0)$ n'est pas un point d'inflexion car f n'est pas dérivable en 2

