

Corrigé de l'exercice 2

(1) $f: x \mapsto \frac{1}{2}x + \cos x$

a) $Df = D_c f = \mathbb{R}$

b) f n'est pas périodique : il n'est pas possible de réduire le domaine d'étude.
 f n'est ni paire, ni impaire \rightarrow contre-exemple ...

c) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{\cos x}{x}}_{\rightarrow 0} \right) = \pm\infty \Rightarrow$ pas d'A.t.

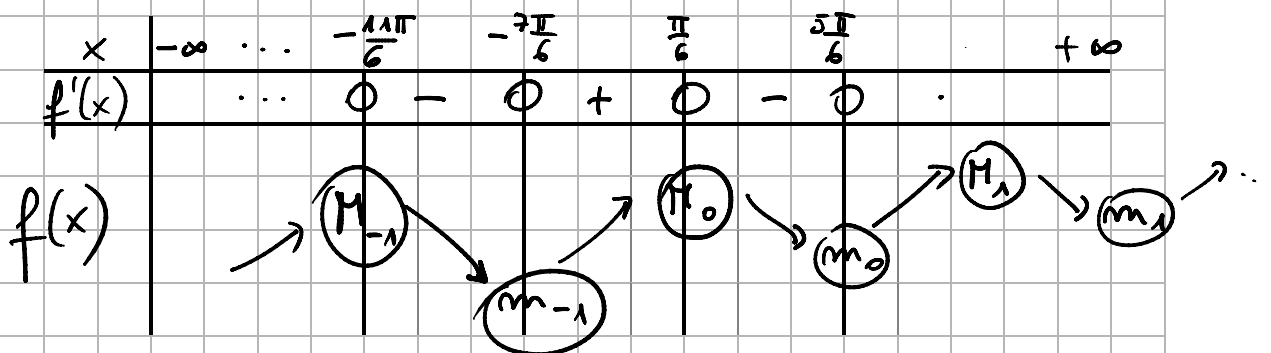
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos x}{x} \right)$ par le théorème du sandwich
 $= \frac{1}{2}$

Mais $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos x$ n'existe pas !

Donc pas d'A.O.

d) $Df' = \mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{1}{2} - \sin x$

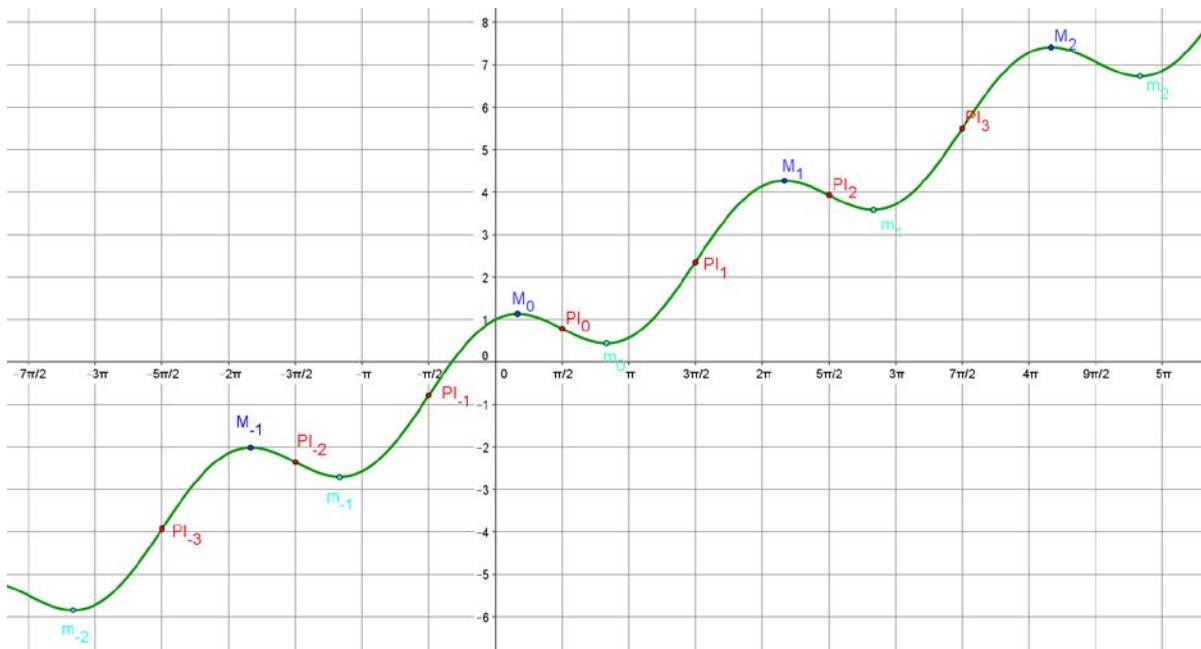
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$
 ou $x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$



max: $M_k \left(\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$
min: $m_k \left(\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \frac{5\pi}{12} + k \cdot \pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

c) $Df'' = \mathbb{R}$ et $f''(x) = -\cos x$
 $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

x	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$...				
$f''(x)$...	0	+	0	-	0	+	0	...
Gf	...	PI_{-2}	\uparrow	PI_{-1}	\downarrow	PI_0	\uparrow	PI_1	...
$PI_k \left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi ; \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \right)$									



(3) Voir http://mathematiques.lmrl.lu/Devoirs/2e/2B_04_Dev08.pdf

et le corrigé : http://mathematiques.lmrl.lu/Devoirs/2e/2B_04_Dev08_corrig0.pdf

(4) $f : x \mapsto \sin(2x) \cos x$

a) $Df = Dcf = \mathbb{R}$

b) $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(-x) = \sin(-2x) \cdot \cos(-x)$
 $= -\sin(2x) \cdot \cos x$
 $= -f(x)$

$\Rightarrow f$ est impaire, G_f symétrique p.-à 0

$$\begin{aligned}
 (\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x+2\pi) &= \sin(2x+4\pi) \cdot \cos(x+2\pi) \\
 &= \sin(2x) \cdot \cos x \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

\Rightarrow f est périodique de période 2π .
 Il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur 2π , par exemple $[-\pi, \pi]$. Or, comme f est impaire, on peut restreindre l'étude à $[0, \pi]$.

\square Rappel : G_f admet la droite $x=a$ comme axe de symétrie $(\rightarrow (\forall x \in D_f) f(2a-x) = f(x))$
 (ou bien : $f(a+x) = f(a-x)$)

$$\begin{aligned}
 \text{Or } f(\pi-x) &= \sin(2\pi-2x) \cdot \cos(\pi-x) \\
 &= \sin(-2x) \cdot (-\cos x) \\
 &= -\sin(2x) \cdot (-\cos x) \\
 &= +\sin(2x) \cdot \cos x = f(x)
 \end{aligned}$$

\Rightarrow G_f admet la droite $x = \frac{\pi}{2}$ comme axe de symétrie.

On peut donc restreindre l'étude à l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$.

c) Pas de limites à calculer car fonction continue et périodique.

d) $Df' = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2 \cos(2x) \cdot \cos x + \sin(2x) \cdot (-\sin x) \\
 &= 2 \cos(2x) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x \\
 &= 2 \cos x (\cos(2x) - \sin^2 x) \\
 &= \cos x (2 \cos 2x - 2 \sin^2 x)
 \end{aligned}$$

$$= \cos x (2 \cos 2x + \cos 2x - 1)$$

$$= \cos x (3 \cos 2x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ ou } \cos 2x = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \text{ ou } 2x = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + k \cdot 2\pi$$

$$\text{ou } 2x = -\arccos\left(\frac{1}{3}\right) + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \text{ ou } x = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + k\pi$$

$$\text{ou } x = -\frac{1}{2} \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + k\pi$$

Racines de f' sur $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0,6155$$

$$\alpha \Rightarrow \cos(2\alpha) = \frac{1}{3}$$

x	0	α	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	0	$\frac{4\sqrt{3}}{9}$	0

$\neq m$ et $\neq M$!!

m car $x = \frac{\pi}{2}$ = axe de symétrie

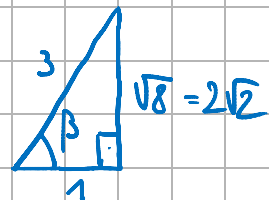
$$f(\alpha) = \sin(2\alpha) \cdot \cos \alpha$$

$$= \sin\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right) \cdot \cos \alpha$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{4}{3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{9}$$



$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

c) $Df'' = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[\cos x (3 \cos 2x - 1) \right]' \\ &= -\sin x (3 \cos 2x - 1) + \cos x (-6 \sin 2x) \\ &= \sin x (-3 \cos 2x + 1) - 12 \sin x \cos^2 x \\ &= \sin x (-3 \cos 2x + 1 - 6(\cos 2x + 1)) \\ &= \sin x (-5 - 9 \cos 2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ ou } \cos 2x = -\frac{5}{9} \\ &\Leftrightarrow x = k\pi \text{ ou } 2x = \arccos\left(-\frac{5}{9}\right) + k \cdot 2\pi \\ &\text{ou } 2x = -\arccos\left(-\frac{5}{9}\right) + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi & \text{ou} \\ x = \frac{1}{2}(\pi - \arccos(\frac{5}{9})) + k \cdot \pi & \text{ou} \\ x = \frac{1}{2}(-\pi + \arccos(\frac{5}{9})) + k \cdot \pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} &x = k\pi \text{ ou } x \approx 1,07991 + k\pi \\ &\text{ou } x \approx -1,07991 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Racines de f'' dans $[0, \pi/2]$:

$$0 \text{ et } \frac{1}{2}(\pi - \arccos(\frac{5}{9})) = \gamma \approx 1,07991$$

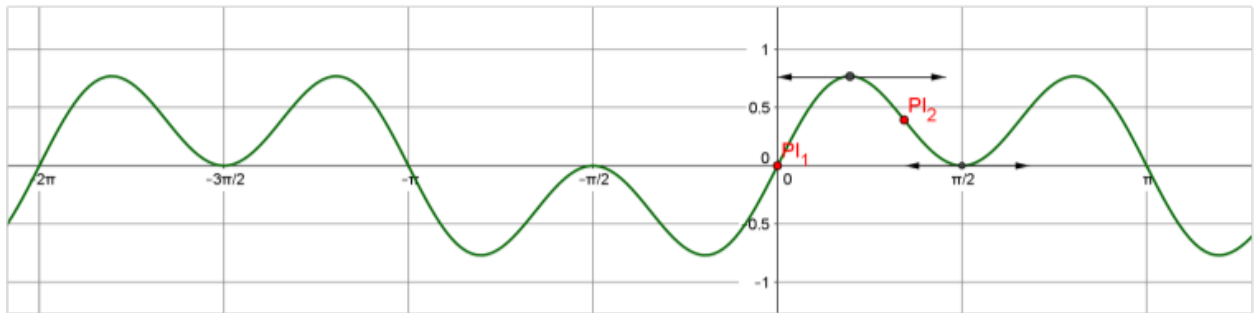
x	0		γ		$\pi/2$
$\sin x$	0	+		+	
$-5-9\cos 2x$		-	0	+	
$f''(x)$	0	-	0	+	
Gf	PI_1	\downarrow	PI_2	\uparrow	
$PI_1(0,0) \quad PI_2(\gamma, f(\gamma)) = (\gamma, \frac{4\sqrt{2}}{27})$					

$$\begin{aligned}
 f(\gamma) &= \sin 2\gamma \cdot \cos \gamma \\
 &= \frac{2\sqrt{14}}{9} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \\
 &= \frac{4\sqrt{7}}{27}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos 2\gamma &= -5/9 \\
 \Leftrightarrow 2\cos^2 \gamma - 1 &= -5/9 \\
 \Leftrightarrow \cos^2 \gamma &= \frac{2}{9} \\
 \Leftrightarrow \cos \gamma &= \frac{\sqrt{2}}{3} \quad (\gamma \in [0; \frac{\pi}{2}])
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin 2\gamma &= \sqrt{1 - \frac{25}{81}} \\
 &= \sqrt{\frac{56}{81}} \\
 &= \frac{\sqrt{56}}{9} = \frac{2\sqrt{14}}{9} \quad (2\gamma \in [0; \pi])
 \end{aligned}$$

f)



$$(7) f: x \mapsto \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - 1}$$

a) C.E. $\cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
 $D_f = D_c f = \mathbb{R} \setminus \{k \cdot 2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

b) f est périodique de période 2π car:
 $(\forall x \in D_f) f(x+2\pi) = \dots = f(x)$
 Il suffit d'étudier f sur $[0, 2\pi]$.

f n'est ni paire ni impaire, car p.ex:

$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{-1} = -\sqrt{3} - 1 \\ f\left(-\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{-\sqrt{3} + 1}{-1} = \sqrt{3} - 1 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{ni égaux} \\ \text{ni opposés} \end{array}$$

Il n'y a pas d'autres axes de symétrie!

c) $\lim_{x \rightarrow k \cdot 2\pi} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad (\cos x \leq 1 !!)$
 \Rightarrow A.V: $x = k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) $Df' = Df$

$$f'(x) = \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x - 1) - (\sin x + \cos x)(-\sin x)}{(\cos x - 1)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x - \cos x - \sin x \cos x + \sin x + \sin^2 x + \sin x \cos x}{(\cos x - 1)^2}$$

$$= \frac{1 - \cos x + \sin x}{(\cos x - 1)^2}$$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 1 - 2\sin^2 x \\ \Leftrightarrow 2\sin^2 x &= 1 - \cos 2x \end{aligned}$$

$$= \frac{2\sin^2 \frac{x}{2} + 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{(\cos x - 1)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} (\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2})}{\frac{4 \sin^4 \frac{x}{2}}{2}}$$

$$= \frac{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{2 \sin^3 \frac{x}{2}}$$

$$f'(x) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = 0 \quad | : \sin \frac{x}{2} \neq 0$$

$$(\Rightarrow) \quad 1 + \cot \frac{x}{2} = 0$$

$$(\Rightarrow) \quad \cot \frac{x}{2} = -1$$

$$(\Rightarrow) \quad \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(\Rightarrow) \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

x	0	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$\frac{1}{10}$	

e) $Df'' = Df'$

$$f''(x) = \left(\frac{1 - \cos x + \sin x}{(\cos x - 1)^2} \right)'$$

$$= \frac{(\sin x + \cos x)(\cos x - 1)^2 - (1 - \cos x + \sin x) \cdot 2(\cos x - 1)(-\sin x)}{(\cos x - 1)^4}$$

$$= \frac{(\sin x + \cos x)(\cos x - 1) + 2 \sin x (1 - \cos x + \sin x)}{(\cos x - 1)^3}$$

On essaie de mettre $\cos x - 1$ en évidence

$$\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1}$$

$$= \frac{(\cos x - 1)(\sin x + \cos x) - 2\sin x(\cos x - 1) + 2\sin^2 x}{(\cos x - 1)^3}$$

$$= \frac{(\cancel{\cos x - 1})(\sin x + \cos x - 2\sin x - 2 - 2\cos x)}{(\cos x - 1)^3}$$

$$= \frac{-\sin x - \cos x - 2}{(\cos x - 1)^2}$$

$$= -\frac{\sin x + \cos x + 2}{(\cos x - 1)^2}$$

On observe que $f''(x) < 0$ car:

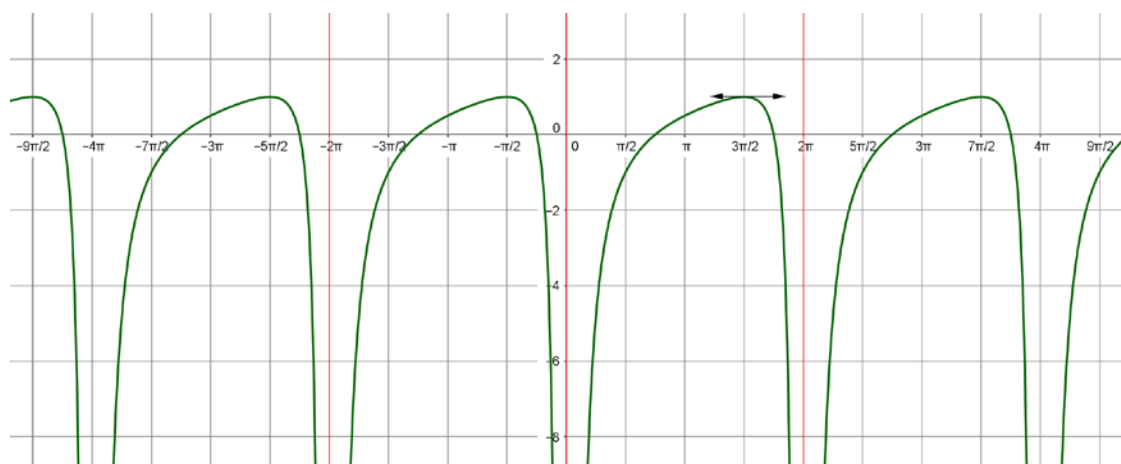
$$\sin x + \cos x + 2 \geq \underbrace{(\sin x + 1)}_{\geq 0} + \underbrace{(\cos x + 1)}_{\geq 0} \geq 0$$

Cette expression s'annule $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + 1 = 0 \\ \cos x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos x = -1 \end{cases}$

ce qui est impossible !

Donc en fait: $(\forall x \in \mathbb{R}) \sin x + \cos x + 2 > 0$

La concavité de g_f est donc toujours tournée vers le bas.



(8) Voir http://mathematiques.lmrl.lu/Devoirs/2e/2B_09_Devoir6.pdf

et le corrigé : http://mathematiques.lmrl.lu/Devoirs/2e/2B_09_Devoir6_corrige.pdf

$$(9) f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos(2x) + 1$$

$$a) Df = D_c f = \mathbb{R}$$

b) • f est paire, car $(\forall x \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \cos(-x) + \frac{1}{2} \cos(-2x) + 1 \\ &= \cos x + \frac{1}{2} \cos(2x) + 1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

• f est périodique de période 2π car :

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x+2\pi) &= \cos(x+2\pi) + \frac{1}{2} \cos(2x+4\pi) + 1 \\ &= \cos x + \frac{1}{2} \cos(2x) + 1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Il suffit donc d'étudier f sur un intervalle de longueur 2π , p.ex $[-\pi, \pi]$. Comme f est paire, on peut réduire le domaine d'étude à $[0, \pi]$

$$c) Df' = \mathbb{R}$$

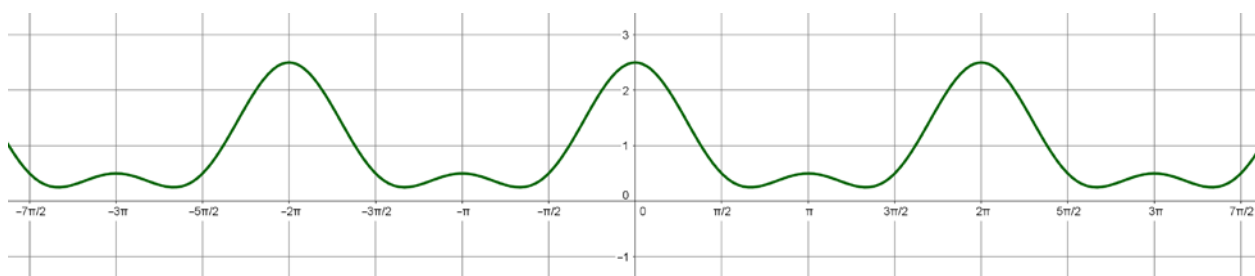
$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x - \frac{1}{2} \sin(2x) \cdot 2 \\ &= -\sin x - \sin(2x) \\ &= -\sin x - 2 \sin x \cos x \\ &= -\sin x (1 + 2 \cos x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x = k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \\ &\quad \text{ou } x = -\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \end{aligned}$$

Solutions dans $[0, \pi]$: $0, \pi, \frac{2\pi}{3}$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$-\sin x$	0	-		-	0
$1+2\cos x$		+	0	-	
$f'(x)$	0	-	0	+	0
$f(x)$	$\frac{5}{2}$ (n) par parité		$\frac{4}{3}$ (m)		$\frac{1}{2}$ (n) par parité et périodicité

d) Graphie:



(10) Voir http://mathematiques.lmrl.lu/Devoirs/2e/2B_07_Devoir4.pdf

et le corrigé : http://mathematiques.lmrl.lu/Devoirs/2e/2B_07_Devoir4_corrige.pdf

Ex 7

a) $h(x) = \arctan x - \frac{x}{1+x^2}$

- $Dh = D_c h = \mathbb{R}$
- h est impaire !
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{A.H.D. : } y = \frac{\pi}{2}$
A.H.G. : $y = -\frac{\pi}{2}$
- $Dh' = \mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1+x^2 - 1+x^2}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0 \end{aligned}$$

h est strictement \uparrow sur \mathbb{R} .

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, mais h' ne change pas de signe en 0. Donc le point $(0,0)$ est un point d'inflexion à tangente horizontale.

- Signe de $h(x)$:
Comme $h(0) = 0$ et h str. \uparrow , on en déduit que $h(x) > 0$ si $x > 0$ et $h(x) < 0$ si $x < 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$		0	
$h(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
signe de $h(x)$			
	$-$	0	$+$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- $Df = \mathbb{R}$
- f est continue en tout réel $\neq 0$. Etudions la continuité en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$$

"0/0"

$$\stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1 = f(0)$$

Donc f est continue en 0 et $D_c f = \mathbb{R}$.

- f est paire !

- $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\arctan x}{x} = \frac{+\frac{\pi}{2}}{+\infty} = 0 \quad (+)$

\Rightarrow A.H : $y = 0$

- f est dérivable en tout réel $x \neq 0$ et :

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad f'(x) &= \frac{\frac{1}{1+x^2} \cdot x - \arctan x}{x^2} \\ &= - \frac{\arctan x - \frac{x}{1+x^2}}{x^2} \\ &= - \frac{h(x)}{x^2} \end{aligned}$$

(Le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe de $h(x)$. Voilà pourquoi il fallait étudier d'abord la fonction h et déterminer en particulier le signe de $h(x)$!)

Il reste à étudier la dérivabilité de f en 0

$$\begin{aligned}
 f'(0) &\stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{Arctan } x}{x} - 1}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan } x - x}{x^2} \\
 &\stackrel{\text{"0/0"}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{2x} \\
 &\stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 - x^2}{2x(1+x^2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2(1+x^2)} = 0
 \end{aligned}$$

Donc f est d\'erivable en 0 (et G_f admet en $(0,1)$ une tangente horizontale.)

$Df' = \mathbb{R}$ et:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{h(x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h(x)$		-	0	+	
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0		1		0

