Etudes de fonctions

Exercice 1

Faire une étude complète des fonctions suivantes :

a) Domaines de définition, de continuité ;
b) Parité et éléments de symétrie du graphe ;
c) Limites aux bornes du domaine, comportement asymptotique, position du graphe par rapport à l'asymptote oblique ou horizontale, le cas échéant ;
d) Dérivée et tableau de variations ;
e) Dérivée seconde et concavité du graphe ; équations des tangentes aux points d'inflexion
f) Tableau des images et représentation graphique.

(1) $f : x \mapsto \dfrac{4x}{x^2+1}$

(2) $f : x \mapsto \dfrac{4x}{x^2-1}$

(3) $f : x \mapsto \dfrac{8\sqrt{x}}{x+2}$

(4) $f : x \mapsto \dfrac{x^2-4}{x+3}$

(5) $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$

(6) $f : x \mapsto 3\sqrt[3]{x}-x$

(7) $f : x \mapsto \dfrac{x^3+x^2+12x+76}{x^2+12}$

(8) $f : x \mapsto \dfrac{x^3+3x^2+5x+5}{(x+1)^2}$

(9) $f : x \mapsto -x+1-\dfrac{4}{x}$

(10) $f : x \mapsto x\sqrt{x^2-2}$

(11) $f : x \mapsto -x+\sqrt{x^2+8}$

(12) $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$

(13) $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

(14) $f : x \mapsto x^2-2\left|x+1\right|$

(15) $f : x \mapsto x\left(\left|x\right|-1\right)$

(16) $f : x \mapsto \sqrt{\left|x(x-1)\right|}$

(17) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{\left|x-1\right|}}$

(18) $f : x \mapsto \left|x^2-1\right|-\left|x+1\right|$

(19) $f : x \mapsto \dfrac{x^2-2\left|x\right|}{x^2-x-2}$

(20) $f : x \mapsto \dfrac{\left|x+2\right|-3}{\left|x-2\right|-1}$

(21) $f : x \mapsto \dfrac{4x\left|x-2\right|}{x^2-2x-3}$

(22) $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{x}-2}$

Exercice 2

Faire une étude complète des fonctions suivantes, définies à l'aide de fonctions trigonométriques. La concavité du graphe est à déterminer dans les cas marqués par une $(*)$. Déterminer la périodicité de la fonction, le cas échéant. Réduire le domaine d'étude autant que possible en utilisant la périodicité et les éléments de symétrie du graphe.

(1) $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}x + \cos x \ \ (*)$

(2) $f : x \mapsto x - \sin x \ \ (*)$

(3) $f : x \mapsto \cos\big(2x\big) + 2\sin\big(x\big)$

Montrer en particulier que f est périodique de période 2π et que $\mathcal{G}_f$ admet la droite $x = \frac{\pi}{2}$ comme axe de symétrie.

(4) $f : x \mapsto \sin\big(2x\big)\cos x \ \ (*)$

Montrer en particulier que f est impaire, périodique de période 2π et que $\mathcal{G}_f$ admet la droite $x = \frac{\pi}{2}$ comme axe de symétrie. Déterminer les racines de f.

(5) $f : x \mapsto \sqrt{1 - \cos x} \ \ (*)$

(6) $f : x \mapsto 2\tan x - \tan^2 x$

(7) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x + \cos x}{\cos x - 1}$

(8) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{2 + \cos x} \ \ (*)$

(9) $f : x \mapsto \cos x + \frac{1}{2}\cos(2x) + 1$

(10) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{1 - 2\cos^2 x}$

(11) $f : x \mapsto \sqrt{\cos 2x + \cos x}$

(12) $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{2}{1 - \tan x} & \text{si } x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ 0 & \text{si } x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$

Montrer en particulier que f est périodique de période π et que le point $(-\frac{\pi}{4}, 1)$ est un centre de symétrie du graphe de f. Montrer qu'on peut obtenir $\mathcal{G}_f$ à partir du graphe de la fonction tangente par une translation à déterminer.

Exercice 3

Soit la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x\left(x^2+1\right)}{x^2-1}$$

et $\mathcal{G}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan.

a) Quels sont les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de f ? Justifier les réponses !

b) Etudier la parité de f et en déduire un élément de symétrie de $\mathcal{G}_f$.

c) Etudier les limites de f aux bornes du domaine et en déduire les asymptotes éventuelles à $\mathcal{G}_f$.

d) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

e) Etudier la concavité de $\mathcal{G}_f$ et résumer cette étude dans un tableau.

f) Déterminer une équation cartésienne de la tangente t à $\mathcal{G}_f$ au point d'abscisse 0. Etudier la position de $\mathcal{G}_f$ par rapport à t.

g) Tracer $\mathcal{G}_f$ et t dans un repère orthonormé du plan.

Exercice 4

Soit les fonctions f et g définies par :

$$f : x \mapsto \frac{x^3}{3} - \sqrt{x^2+1} \text{ et } g : x \mapsto x\sqrt{x^2+1}-1.$$

<u>1re partie</u> : Etude de g.

a) Quels sont les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de g ? Justifier les réponses !

b) Etudier les limites de g aux bornes du domaine et en déduire les asymptotes éventuelles à $\mathcal{G}_g$.

c) Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

d) En déduire que g admet une seule racine α, dont on déterminera la valeur exacte.

<u>2e partie</u> : Etude de f.

a) Quels sont les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de f ? Justifier les réponses !

b) Quelles sont les limites de f aux bornes du domaine. Etudier l'existence d'asymptotes.

c) Etudier les variations de f en utilisant les résultats de la 1re partie.

d) Représenter graphiquement f dans un repère orthonormé.

Exercice 5

On considère la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 + ax, \text{ si } x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} + b, \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

où a et b sont des paramètres réels.

a) Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

b) Comment faut-il choisir a et b pour que f soit continue et dérivable sur $\mathbb{R}$?

c) En prenant les paramètres a et b déterminés en b), f est-elle deux fois dérivable en 0 ?

Exercice 6

Soit la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 4x + 16}{2x^2 + 8x + 12}$$

et $\mathcal{G}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan.

a) Quels sont les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de f ? Justifier les réponses !

b) Etudier la parité de f et en déduire un élément de symétrie de $\mathcal{G}_f$.

c) Etudier les limites de f aux bornes du domaine et en déduire le comportement asymptotique de la fonction.

d) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

e) Etudier la concavité de $\mathcal{G}_f$ et résumer cette étude dans un tableau.

f) Montrer que la droite $x = -2$ est un axe de symétrie de $\mathcal{G}_f$.

e) Représenter graphiquement f dans un repère orthonormé.

Exercice 7

Soit les fonctions

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{et } h : x \mapsto \operatorname{Arctan} x - \frac{x}{1+x^2}$$

a) Etudier la fonction h : domaines de définition, de continuité et de dérivabilité, limites, asymptotes, sens de variation. Calculer $h(0)$ et en déduire le signe de $h(x)$.

b) Etudier ensuite la fonction f : domaine de définition, continuité, limites et asymptotes, dérivablité en un réel non nul, puis en 0. Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad f'(x) = -\frac{h(x)}{x^2}$$

En déduire le sens de variation de f et son tableau de variation. Représenter graphiquement f dans un repère orthonormé.

Exercice 8

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$.

Faire l'étude de f :

a) Domaines de définition et de continuité.

b) Limites aux bornes du domaine et asymptotes.

c) Etude de la dérivabilité de f : en un réel $\neq 0$ et $\neq 1$, puis en 0.

d) Déterminer les racines de $f'(x)$, puis étudier le signe de $f'(x)$.

e) En déduire le tableau de variation de f.

f) Soit $g : x \mapsto -\sqrt{x} - 1$. Montrer que $\mathcal{G}_f$ et $\mathcal{G}_g$ sont asymptotes au voisinage de $+\infty$, c.-à-d. que

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$$

g) Etudier la position relative des graphes $\mathcal{G}_f$ et $\mathcal{G}_g$.

h) Représenter graphiquement f et g dans un repère orthonormé.

Exercice 9

Soit la fonction

$$f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

Faire l'étude de f :

a) Domaines de définition et de continuité.

b) Etudier la parité de f.

c) Limites aux bornes du domaine et asymptotes.

d) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1,-1\}) \quad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ -\dfrac{2}{1+x^2} & \text{si } x > 1 \text{ ou } x < -1 \end{cases}$$

e) Etudier la dérivabilité de f en 1 et en -1. Interpréter graphiquement les résultats.

f) Des résultats précédents, déduire le tableau de variation de f.

g) Etudier la concavité de $\mathcal{G}_f$ et résumer cette étude dans un tableau.

h) Déterminer l'équation de la tangente t à $\mathcal{G}_f$ en O.

i) Représenter graphiquement $\mathcal{G}_f$ et t.