

Exercices sur la dérivation

Exercice 1

Calculer la dérivée des fonctions suivantes en utilisant la définition. Déterminer à chaque fois les domaines d'existence et de dérivabilité de f . Etablir une équation cartésienne de la tangente t_a à \mathcal{G}_f au point d'abscisse a indiqué et représenter graphiquement la fonction au voisinage de ce point.

(1) $f(x) = 2x - 7, a = 1$

(6) $f(x) = \sqrt{1 - 3x}, a = 0$

(2) $f(x) = x^3, a = -1$

(7) $f(x) = -\frac{1}{x^4}, a = \frac{1}{2}$

(3) $f(x) = \frac{1}{x^2}, a = 2$

(8) $f(x) = \sin(x), a = \pi$

(4) $f(x) = x\sqrt{x}, a = \frac{1}{4}$

(9) $f(x) = |2x + 4|, a = -4$

(5) $f(x) = \frac{6}{\sqrt{x}}, a = 1$

Exercice 2

(1) Montrer *par récurrence* que la dérivée de la fonction puissance $f : x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$, est donnée par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

(2) Montrer *par récurrence* que la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, est donnée par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

(3) Montrer *par récurrence* que la dérivée de la fonction $f : x \mapsto x^n \sqrt{x}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, est donnée par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+) \quad f'(x) = \left(n + \frac{1}{2}\right)x^{n-1}\sqrt{x}$$

Exercice 3

Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de la fonction f , ainsi que l'expression de $f'(x)$, lorsque $f(x)$ est donné par :

1^{re} série : puissances

$$(1) \quad 5x^3$$

$$(2) \quad \frac{3x^4}{2}$$

$$(3) \quad \frac{1}{3x}$$

$$(4) \quad \frac{6}{5\sqrt{x}}$$

$$(5) \quad \left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^5$$

$$(6) \quad -\frac{2}{x^4}$$

$$(7) \quad \frac{2\sqrt{x}}{7}$$

$$(8) \quad 2x\sqrt{x}$$

$$(9) \quad \frac{5}{x\sqrt[5]{x^3}}$$

$$(10) \quad \frac{3}{x^2\sqrt[3]{x}}$$

$$(11) \quad x^3\sqrt{2x}$$

$$(12) \quad x\sqrt[3]{5x^2}$$

2^{re} série : sommes, différences

$$(1) \quad x^4 - 3x^3 + x + 7 - \frac{1}{4x^6}$$

$$(2) \quad 3x^2 - \frac{1}{x} + 2$$

$$(3) \quad 8x - 5 - \frac{1}{x^2}$$

$$(4) \quad 2x^2(9x^3 - x^2 + x + 1)$$

$$(5) \quad \sqrt{x}\left(3x\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)$$

$$(6) \quad \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x^5} + 1$$

$$(7) \quad \frac{x^3 - 3x\sqrt{x} + x - 4}{x^2}$$

$$(8) \quad \frac{1 + \sqrt{x} - 2x + x^2}{3\sqrt{x}}$$

3^e série : produits

$$(1) \quad (3x - 2)(5x^2 + x - 1)$$

$$(2) \quad 3\sqrt{x} \cdot (2x + 1)$$

$$(3) \quad \frac{(x^3 + 1)(7x^2 - x - 1)}{2}$$

$$(4) \quad \frac{2x - 1}{5} \cdot (x^2 - 2x - 1)$$

$$(5) \quad 3(x^2 + 1)(x + 5)(x - 2)$$

$$(6) \quad (\sqrt[3]{x} + 3)(\sqrt[3]{x^2} - 2)$$

$$(7) \quad (2\sqrt{x} - 3)\left(\frac{3\sqrt{x}}{4} + 1\right)$$

$$(8) \quad \left(x - \frac{2}{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1\right)$$

4^e série : quotients, inverses

$$(1) \quad \frac{x + 1}{3x - 4}$$

$$(2) \quad \frac{1}{6x^2 + x^3}$$

$$(3) \quad \frac{x^2}{x - 2}$$

$$(4) \quad \frac{x^2 - x + 1}{2(x + 3)}$$

$$(5) \quad \frac{3x - 2}{x^2 + 7}$$

$$(6) \quad \frac{3}{4(x^2 + x + 2)}$$

$$(7) \quad \frac{(x + 2)(x - 1)}{x^2 - 2x - 1}$$

$$(8) \quad \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2}$$

5^e série : composées

- | | | |
|--------------------------|--------------------------------------|---|
| (1) $(3x + 4)^2$ | (8) $(3x - \sqrt{2x - 2})^2$ | (13) $\sqrt{x^3 - 4x}$ |
| (2) $(x^2 - 3x - 1)^6$ | (9) $\frac{(x^3 - 1)^5}{2}$ | (14) $\sqrt[3]{\frac{1}{4x - 1} + \frac{1}{2}}$ |
| (3) $\sqrt{-3x - 7}$ | (10) $\sqrt{\frac{-2x - 3}{5 + 4x}}$ | (15) $\frac{-2}{3(8x^2 - 1)^2}$ |
| (4) $\sqrt[3]{2x^2 + 1}$ | (11) $\frac{3}{\sqrt{2 - x - x^2}}$ | (16) $\frac{3}{(\sqrt{2x - 1} - 1)^2}$ |
| (5) $\sqrt{(x - 1)^3}$ | (12) $\sqrt{\frac{x - 1}{x^2 + 1}}$ | (17) $\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1}$ |
| (6) $(\sqrt{x} - 3)^4$ | | |
| (7) $-5(1 - 2x)^3$ | | |

6^e série : fonctions trigonométriques

- | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|--|
| (1) $\sin(2x) - \cos(4x)$ | (7) $\tan^2(3x)$ | (12) $\frac{1}{\cos^2(2x)}$ |
| (2) $\cos(3x) \cdot \sin(2x)$ | (8) $4 \tan^6 5x$ | (13) $\frac{\sin x}{\cos x - 1}$ |
| (3) $\cos x (\cos^2 x + 1)$ | (9) $-\sqrt{\cos(4x)}$ | (14) $\frac{3 \cos x}{1 - \sin x}$ |
| (4) $\cos(2x) - 2 \cos x - 1$ | (10) $\frac{1}{\cos x}$ | (15) $\frac{\sqrt{\cos x}}{\sin x} - \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x}$ |
| (5) $\sin(x^2)$ | (11) $\frac{2}{2 \sin x - 1}$ | |
| (6) $\cos^2 x$ | | |

7^e série : fonctions contenant des valeurs absolues

- | | | |
|--------------------------|-----------------------|---|
| (1) $ x $ | (6) $ 4x^2 - 5x + 1 $ | (11) $\frac{1}{ 2x - 3 }$ |
| (2) $x x $ | (7) $ x^3(x - 2) $ | (12) $\frac{1}{ x + 1 - 1}$ |
| (3) $ x^3 $ | (8) $\sqrt{ x - 1}$ | (13) $\frac{ x + 2 - 1}{ 2x - 1 - 3}$ |
| (4) $ 3x - 6 $ | (9) $\sqrt{ x + 1}$ | |
| (5) $ 2x - 1 - 9 - x $ | (10) $ \sin x $ | |

8^e série : exemples mixtes

- | | |
|------------------------------|------------------------------------|
| (1) $x(2x + 1)^2$ | (7) $\frac{-\sqrt{x}}{(2x - 7)^3}$ |
| (2) $(x + 2)^2 \sqrt{1 - x}$ | |
| (3) $(5x + 1)^2 (2 - x)^3$ | (8) $\frac{(1 - x)^3}{x^2 - 1}$ |
| (4) $(3x + 1)^2 (x - 1)^4$ | |
| (5) $ x + 1 (x - 1)^2$ | (9) $x \sqrt{\frac{x - 3}{x + 1}}$ |
| (6) $ 2 \sin(\pi x) - 1 $ | |

$$(10) \frac{\sqrt{2x+1}}{x-3}$$

$$(11) \frac{(x-1)^2(3x+1)}{(2-6x)^3}$$

$$(12) \frac{|x|}{x^2+1}$$

$$(13) \frac{x^5-x+2}{x^3+7}$$

$$(14) \frac{\sqrt{x-1}}{x^2+1}$$

$$(15) \left(\frac{x^2-2}{2x^2+1} \right)^2$$

$$(16) x^2 \cdot \sqrt[3]{1-3x^2}$$

$$(17) \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$$

Exercice 4

Déterminer une équation cartésienne de la tangente t_a à \mathcal{G}_f au point d'abscisse a dans les cas suivants :

$$(1) f(x) = 4x^3 - 7x^2, a = 3$$

$$(2) f(x) = \frac{-2}{x^2 - x - 1}, a = 1$$

$$(3) f(x) = \sqrt{x^2 + 4}, a = -1$$

$$(4) f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{x}, a = \frac{1}{2}$$

$$(5) f(x) = (\sqrt{x} - 2)^4, a = 9$$

$$(6) f(x) = \frac{1}{(x^2 - 2x + 3)^3}, a = 2$$

$$(7) f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{2x^2 - x - 1}, a = -\frac{1}{2}$$

$$(8) f(x) = \frac{3}{\cos^2 x}, a = \frac{\pi}{3}$$

$$(9) f(x) = 2 \sin x - \cos 2x, a = -\frac{\pi}{6}$$

Exercice 5

Déterminer une équation cartésienne du cercle \mathcal{C} de centre $O(0,0)$ et de rayon 5. Montrer que les points $A(3,4)$, $B(-3,4)$ et $C(3,-4)$ appartiennent à ce cercle. Etablir une équation cartésienne des tangentes t_A , t_B et t_C à ce cercle en ces trois points respectivement en utilisant la dérivée d'une fonction à déterminer.

Exercice 6

a) Soit $f : x \mapsto \sqrt{1+3x}$. Déterminer les points du graphe de f en lesquels la tangente est parallèle à la droite $d : 3x - 4y = 1$.

b) Soit $g : x \mapsto x^3$. Déterminer les points du graphe de f en lesquels la tangente est perpendiculaire à la droite $d : x + 3y = 1$.

Exercice 7

a) Montrer que si f est dérivable et paire alors sa dérivée est une fonction impaire.

b) Montrer que si f est dérivable et impaire alors sa dérivée est une fonction paire.

Exercice 8

Pour quelles valeurs de a les tangentes t_a et s_a aux points d'abscisses a des graphes des fonctions sin et cos respectivement sont-elles perpendiculaires ?

Exercice 9

Déterminer les tangentes aux graphes des fonctions suivantes f passant par le point A donné :

(1) $f(x) = x^2$ $A(1, -3)$

(2) $f(x) = \frac{1}{x}$ $A(0, 2)$

(3) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $A(0, 1)$

(4) $f(x) = x^3 - x$ $A(-2, 2)$

Exercice 10

Déterminer le nombre de tangentes au graphe de la fonction $f : x \mapsto x^2$ passant par un point (a, b) du plan en fonction des paramètres réels a et b .

Exercice 11

Déterminer sans calculatrice une valeur approchée des réels suivants en utilisant la formule de la meilleure approximation affine $f(a+h) \approx f(a) + h \cdot f'(a)$ pour une fonction à déterminer f et deux réels a et h bien choisis :

(1) $\frac{1}{2,03^2}$

(2) $\sqrt{4,03}$

(3) $\frac{1}{0,98}$

(4) $\sin 3$

(5) $\sqrt[3]{1,02}$

(6) $\frac{1,94}{1,06}$

(7) $\sqrt{\frac{3,94}{1,06}}$