Corrigé des exercices avec paramètres

(du site EDUCMAD / ACCESMAD.ORG)

Exercice 5

$$f_m(x) = \frac{x(x-m)}{x^2+x-2} = \frac{x(x-m)}{(x-1)(x+2)}, \text{ avec } m \in \mathbb{R}$$

On a ***dans tous les cas*** : $\operatorname{dom} f_m = \mathbb{R} \setminus \{1, -2\} = \operatorname{dom}_c f_m$

Nous traitons d'abord les cas particuliers : $m = 1$ et $m = -2$.

(1) $\boxed{m = 1}$:

Alors : $f_1(x) = \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{x+2-2}{x+2} = 1 - \dfrac{2}{x+2}$, avec $x \neq -2$ et $x \neq 1$. Le graphe de f_1 est donc une hyperbole de centre de symétrie $(-2, 1)$ avec un trou en $\left(1, \frac{1}{3}\right)$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f_1(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$ ‖ $\frac{1}{3}$ (trou)	$\nearrow$	1

Cette fonction n'admet ***aucun extremum*** !

(2) $\boxed{m = -2}$

Alors : $f_{-2}(x) = \dfrac{x}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1}$, avec $x \neq -2$ et $x \neq 1$. Le graphe de f_{-2} est donc une hyperbole de centre de symétrie $(1, 1)$ avec un trou en $\left(-2, \frac{2}{3}\right)$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$ ‖ $\frac{2}{3}$ (trou)	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

Cette fonction n'admet ***aucun extremum*** !

(3) $\boxed{m \neq 1 \text{ et } m \neq -2}$

Limites et asymptotes :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_m(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow A.H.: y = 1$$

$$\lim_{x\to-2^{\pm}} f_m(x) = \lim_{x\to-2^{\pm}} \frac{x(x-m)}{x^2+x-2} = "\frac{-2\cdot(-2-m)}{0^{\mp}}" = "\frac{2\cdot(m+2)}{0^{\mp}}" = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } m < -2 \\ \mp\infty & \text{si } m > -2 \end{cases}$$

Donc : $AV : x = -2$

$$\lim_{x\to1^{\pm}} f_m(x) = \lim_{x\to1^{\pm}} \frac{x(x-m)}{x^2+x-2} = "\frac{1\cdot(1-m)}{0^{\pm}}" = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } m < 1 \\ \mp\infty & \text{si } m > 1 \end{cases}$$

Donc : $AV : x = 1$

Dérivée :

$\text{dom } f'_m = \text{dom } f_m$

$$f_m'(x) = \frac{(2x-m)(x^2+x-2)-(x^2-mx)(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}$$

$$= \ldots = \frac{(m+1)x^2-4x+2m}{(x^2+x-2)^2} = \frac{p(x)}{(x^2+x-2)^2}$$

a) Cas particulier : $\boxed{m = -1}$

Dans ce cas le polynôme au numérateur est du 1er degré !

$$f_{-1}'(x) = \frac{-4x-2}{(x^2+x-2)^2} \quad \text{et} \quad f_{-1}'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\tfrac{1}{2}$$

TV :

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'_{-1}(x)$		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	
$f_{-1}(x)$	1	$\nearrow$ $+\infty$	$\|\|$	$-\infty$ $\nearrow$	$\frac{1}{9}$ M	$\searrow$ $-\infty$	$\|\|$	$+\infty$ $\searrow$	1

Cette fonction admet donc ***un et un seul extremum (= maximum)*** !

b) $\boxed{m \neq -1}$

Alors le trinôme au numérateur de $f_m'(x)$ est du 2e degré et son discriminant est :

$$\Delta = 16 - 8m(m+1) = -8(m^2+m-2) = -8(m-1)(m+2) = 8(1-m)(m+2)$$

TS du discriminant :

m	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	

Les cas $m=1$ et $m=-2$ ont déjà été traités auparavant.

b1) $\boxed{m>1 \text{ ou } m<-2}$

Dans ce cas $f_m{}'(x)$ n'admet aucune racine et le signe du trinôme $p(x)$ dépend du signe de $m+1$. D'où les TV suivants :

b1.1) $\boxed{m>1}$, donc $m+1>0$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	$\|$	$+$	$\|$	$+$	
$f_m(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty \,\|\, -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \,\|\, -\infty$	$\nearrow$	1

b1.2) $\boxed{m<-2}$, donc $m+1<0$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	
$f_m(x)$	1	$\searrow$	$-\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	$-\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	1

f_m n'admet donc ***aucun extremum*** dans les deux cas !

b2) $\boxed{-2<m<1 \text{ et } m\neq -1}$.

Dans ce cas le trinôme $p(x)$ admet deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{4-2\sqrt{2(1-m)(m+2)}}{2(m+1)}=\frac{2-\sqrt{2(1-m)(m+2)}}{m+1}$$

$$x_2=\frac{4+2\sqrt{2(1-m)(m+2)}}{2(m+1)}=\frac{2+\sqrt{2(1-m)(m+2)}}{m+1}$$

Etudions la position relative de ces 2 racines, ainsi que leur ***position par rapport aux abscisses −2 et 1***, abscisses en lesquelles le graphe admet des asymptotes verticales.

Observons d'abord que les racines de f_m sont 0 et m. En effet :

$$f_m(x) = \frac{x(x-m)}{x^2+x-2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = m\,.$$

Etant donné que $-2 < m < 1$, on peut donc affirmer que les 2 racines 0 et m sont situées dans l'intervalle $]-2,1[$, intervalle sur lequel f_m est continue et dérivable. Le ***théorème de Rolle*** permet donc de conclure que $f_m\,'$ admet ***au moins une racine entre 0 et m***. Donc soit $-2 < x_1 < 1$ soit $-2 < x_2 < 1$.

Cas $\boxed{-2 < m < -1}$:

Dans ce cas : $m+1<0$ et donc clairement $x_2 < 0$. Montrons qu'en fait $x_2 < -2$. On en déduira, d'après ce qui précède, que nécessairement $0 < x_1 < m$.

$$\begin{aligned}
& x_2 < -2 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{2+\sqrt{2(1-m)(m+2)}}{m+1} < -2 \;/\cdot\; \underbrace{(m+1)}_{<0} \\
\Leftrightarrow\ & 2+\sqrt{2(1-m)(m+2)} > -2m-2 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{2(1-m)(m+2)} > -2m-4 \\
\Leftrightarrow\ & \underbrace{\sqrt{2(1-m)(m+2)}}_{>0} > \underbrace{-2\underbrace{(m+2)}_{>0}}_{<0} \quad \textit{VRAI}\ !
\end{aligned}$$

TV :

x	$-\infty$		x_2		-2		x_1		1		$+\infty$
$f_m'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f_m(x)$	1	↘	m	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	M	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

f_m admet donc ***2 extrema (un maximum et minimum)*** dans ce cas.

Cas $\boxed{-1 < m < 1}$:

Dans ce cas : $m+1>0$ et donc il est clair que $x_2 > 0$. Montrons qu'en fait $x_2 > 1$. On en déduira encore une fois, d'après ce qui précède, que nécessairement $0 < x_1 < m$.

$$
\begin{aligned}
& x_2 > 1 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{2+\sqrt{2(1-m)(m+2)}}{m+1} > 1 \,/\cdot\, \underbrace{(m+1)}_{>0} \\
\Leftrightarrow\ & 2+\sqrt{2(1-m)(m+2)} > m+1 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{2(1-m)(m+2)} > \underbrace{m-1}_{<0} \qquad \text{VRAI !}
\end{aligned}
$$

TV :

x	$-\infty$		-2		x_1		1		x_2		$+\infty$
$f_m'(x)$		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f_m(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty \,\|\, -\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	$-\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	1

f_m admet donc ***2 extrema (un maximum et minimum)*** dans ce cas.

En résumé :

- f_m n'admet aucun extremum si $m \geq 1$ ou $m \leq -2$
- f_m admet exactement un extremum (maximum) si $m = -1$
- f_m admet un maximum et minimum si $-2 < m < 1$ et $m \neq -1$

Exercice 7

$$f_m(x) = \frac{x^2 + (m-2)x - m - 1}{x-2}, \text{ avec } m \in \mathbb{R}$$

(1) a) $\text{dom}\, f_m = \text{dom}_c\, f_m = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

b) En effectuant la division euclidienne du numérateur par le dénominateur, on obtient une expression agréable de $f_m(x)$:

$$f_m(x) = x + m + \frac{m-1}{x-2}$$

Elle nous amène tout de suite au cas particulier :

(1.1) $\boxed{m = 1}$

Dans ce cas :

$\left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}\right) \qquad f_1(x) = x + 1$

En d'autres termes : le graphe de f_1 est la droite d'équation $y = x + 1$ avec un trou en $(2,3)$.

Dans toute la suite, nous allons supposer que $\boxed{m \neq 1}$.

Dans ce cas :

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_m(x) = \pm\infty$ et

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f_m(x) - (x+m) \right] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{m-1}{x-2} = 0 \qquad \Rightarrow A.O. : y = x + m$

D'autre part :

$$\lim_{x \to 2^\pm} f_m(x) = 2 + m + \text{"}\frac{m-1}{0^\pm}\text{"} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } m > 1 \\ \mp\infty & \text{si } m < 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow A.V. : x = 2$$

c) $\text{dom}\, f_m{}' = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$f_m{}'(x) = 1 - \frac{m-1}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2 - (m-1)}{(x-2)^2}$$

(1.2) $\boxed{m > 1}$

$f_m{}'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = \underbrace{m-1}_{>0} \Leftrightarrow x - 2 = \pm\sqrt{m-1} \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{m-1}$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{m-1}$		2		$2+\sqrt{m-1}$		$+\infty$
$f_m{}'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f_m(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

Max : $f_m\left(2-\sqrt{m-1}\right)=2-\sqrt{m-1}+\dfrac{m-1}{\cancel{2}-\sqrt{m-1}\cancel{-2}}=2-2\sqrt{m-1}$

Min : $f_m\left(2+\sqrt{m-1}\right)=2+\sqrt{m-1}+\dfrac{m-1}{\cancel{2}+\sqrt{m-1}\cancel{-2}}=2+2\sqrt{m-1}$

(1.3) $\boxed{m<1}$

Dans ce cas le numérateur de $f_m\,'(x)$ est toujours >0, d'où le TV :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f_m(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty\ \Vert\ -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

(2) Un point fixe I de la famille de courbes $\left(\mathcal{C}_m\right)_{m\in\mathbb{R}}$ est par définition un point I ***commun*** à toutes les courbes $\mathcal{C}_m$.

On a, pour $x_I\neq 2$:

$$\begin{aligned}
&(x_I,y_I)\in\mathcal{C}_m\\
&\Leftrightarrow \frac{x_I^{\,2}+(m-2)x_I-m-1}{x_I-2}=y_I\\
&\Leftrightarrow x_I^{\,2}+(m-2)x_I-m-1=y_I(x_I-2)\\
&\Leftrightarrow m\left(x_I-1\right)+x_I^{\,2}-2x_I-1-y_I(x_I-2)=0
\end{aligned}$$

Le point (x_I,y_I) est donc un point fixe ssi cette équation est vérifiée ***pour tout*** $m\in\mathbb{R}$, donc si et seulement si :

$$\begin{cases}x_I-1=0\\ x_I^{\,2}-2x_I-1=y_I(x_I-2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_I=1\\ y_I=2\end{cases}$$

(On vérifie aisément que :

$$\left(\forall m\in\mathbb{R}\right)\qquad f_m(1)=2$$

(3) T_m = tangente à $\mathcal{C}_m$ au point I :

$T_m : y=f_m\,'(1)(x-1)+f_m(1)$

$\Leftrightarrow y=(2-m)(x-1)+2$

$\Leftrightarrow y=(2-m)x+m$

(4) $\Delta_m : y=x+m$, voir (1).

(5) Représentation graphique des courbes $\mathcal{C}_m$, pour m entier dans $[-5,5]$, avec les asymptotes respectives, mais sans la tangente T_m :