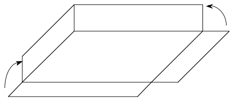
Exercice 7.1

① *Figure d'étude et définition des inconnues*



- hauteur de la boîte: *haut*
- largeur de la boîte = *larg*
- longueur de la boîte = *long*

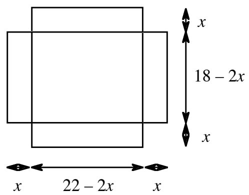
② À optimiser: Volume

$$V = long \cdot larg \cdot haut$$

③ Liens - Équations:

Soit x le côté des 4 carrés enlevés. Ainsi:

- $haut = x$;
- $larg = 18 - 2x$;
- $long = 22 - 2x$



④ *Création de la fonction:*

$$V(x) = (22 - 2x)(18 - 2x) \cdot x \quad = \quad 4x^3 - 80x^2 + 396x$$

⑤ *Domaine des valeurs possibles:* $x \in \left]0\,;\,9\right[$

⑥ *Calcul de la dérivée:*

$$V(x) = 4x^3 - 80x^2 + 396x \quad \Rightarrow \quad V'(x) = 12x^2 - 160x + 396$$

⑦ *Tableau de signe de V'(x)*

$$V'(x) = 0$$

$$12x^2 - 160x + 396 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \Delta}{2a} = \frac{20 \pm \sqrt{103}}{3}$$

		0		3,28		9	10,05
$V'(x)$			+	0	–		0
			↗	max	↘		

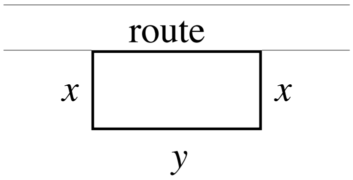
- maximum en $x = 3{,}28$
- Vu la croissance, pas de max au bord du domaine.

⑧ *Réponse finale:*

Volume maximum de $V(3{,}28) = 579{,}36 \text{ cm}^3$

Exercice 7.3

①② *Figure d'étude et définition des inconnues*



Largeur = x

Longueur = y

③④ *Création de la fonction:*

$$\left.\begin{array}{l}\bullet \text{ coût de la clôture: } C(x) = x \cdot 3 + x \cdot 3 + y \cdot 3 + y \cdot 5 \\ \bullet\ x \cdot y = 1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{x}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\bullet\ C(x) = 6 \cdot x + 8 \cdot \frac{1}{x} = \boxed{6x + \frac{8}{x}}$$

⑤ *Domaine des valeurs possibles:* $x \in \left]0\,;+\infty\right[$

⑥ *Calcul de la dérivée:*

$$C(x) = 6x + 8x^{-1} \quad\Rightarrow\quad C'(x) = \ldots = \frac{2(3x^2-4)}{x^2} = \frac{2(\sqrt{3}x+2)(\sqrt{3}x-2)}{x^2}$$

⑦ *Tableau de signe de $C'(x)$*

		$-\frac{2}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{2}{\sqrt{3}}$	
$C'(x)$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$
	$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$

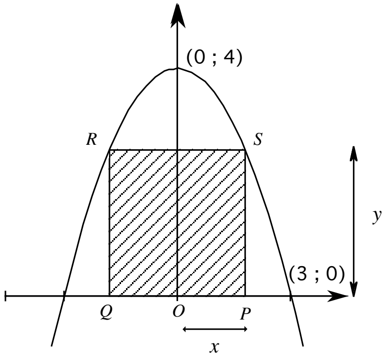
• minimum en $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ alors $y = \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

• Pas de bord de domaine

⑧ *Réponse finale:* Les dimensions sont $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ km et $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ km.

Exercice 7.5

① *Figure d'étude et définition des inconnues*



- x = distance de O à P
- base du rectangle = $2x$
- hauteur du rect. = y

② *À optimiser*

Aire rectangle = $2x \cdot y$

③④ *Création de la fct A(x):*

Recherche de la fonction f de parabole donnée

- Symétrique par rapport à $y \;\Rightarrow\; f(x) = ax^2 + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = ax^2 + b \\ \text{par } (0\,;\,4) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x) = ax^2 + 4 \\ \text{par } (3\,;\,0) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = -\frac{4}{9}x^2 + 4$$

ou

- À l'aide des zéros $\Rightarrow f(x) = a(x+3)(x-3)$

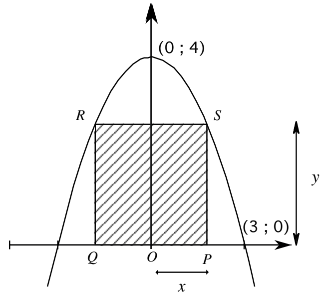
$$\left.\begin{array}{l} f(x) = a(x^2 - 9) \\ \text{par } (0\,;\,4) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = -\frac{4}{9}x^2 + 4$$

ou

- À l'aide de 3 points

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx + c \\ \quad \text{par } (0\,;\,4) \\ \quad \text{par } (-3\,;\,0) \\ \quad \text{par } (3\,;\,0) \end{array}\right\} \Rightarrow y = -\frac{4}{9}x^2 + 4$$

- Aire de $PQRS$



$$A(x) = 2xy = 2x\left(-\frac{4}{9}x^2 + 4\right)$$

$$= -\frac{8}{9}x^3 + 8x$$

⑤ E_D: $\quad x \in [0\,;\,3]$

⑥ *Calcul de la dérivée:*

$$A(x) = -\frac{8}{9}x^3 + 8x \qquad \Rightarrow \qquad A'(x) = -\frac{8}{3}x^2 + 8$$

⑦ *Tableau de signe de A'(x)*

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{8}{3}x^2 + 8 = 0 \quad \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \pm\sqrt{3}$$

		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		3	
$A'(x)$		0	$-$		$+$	0	$-$		
					$\nearrow$	max	$\searrow$		

- Aire maximum en $x = \sqrt{3}$

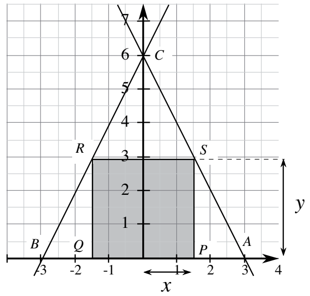
- Pas de max au bord du domaine:

⑧ *Réponse finale:*

Les dimensions du rectangle sont $2\sqrt{3}$ et $\frac{8}{3}$

Exercice 7.6 (début)

① *Figure d'étude et définition des inconnues*



- x = distance de O à P
- base du rectangle = $2x$
- hauteur du rectangle = y

② *À optimiser*

Aire du rectangle $PQRS$ = base · hauteur = $2xy$

③ *Lien - Équation:*

- y en fontion de x **(Equation de la droite CA)**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ordonnée à l'origine} = 6 \\ \text{Pente} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -2\end{array}\right\} \Rightarrow y = 6 - 2x$$

④ *Création de la fonction à optimiser A(x):*

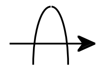
- Aire du rectangle $PQRS = A(x) = 2x(-2x + 6) = -4x^2 + 12x$

⑤ *Domaine des valeurs possibles:* $x \in [0 ; 3]$

Exercice 7.6 (fin)

⑥ Maximum:

$A(x)$ est du $2^{\text{ème}}$ degré:



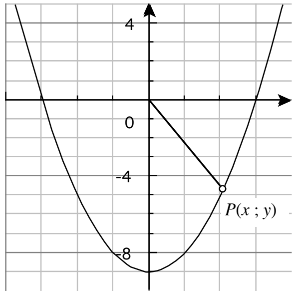
donc max en $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{3}{2}$

⑦ *Réponse finale:*

Les coordonnées sont $P(3/2 ; 0)$ ou evt. $P(-3/2 ; 0)$

Exercice 7.7

① *Figure d'étude et définition des inconnues*



- x = 1ère coordonnée de P

- y = 2ème coordonnée de P

② *A optimiser*

$$\text{distance} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

③ *Équation (lien)*

- $y = x^2 - 9$

④ *Création de la fonction d(x):*

- $d(x) = \sqrt{x^2 + (x^2 - 9)^2} \quad = \quad \sqrt{x^4 - 17x^2 + 81}$

⑤ *Domaine des valeurs possibles:* $x \in \mathbb{R}$

⑥ *Calcul de la dérivée:*

$d(x) = (x^4 - 17x^2 + 81)^{1/2} \qquad \Rightarrow \qquad \ldots$

$$\Rightarrow \qquad d'(x) = \frac{x(2x + \sqrt{34})(2x - \sqrt{34})}{2\sqrt{x^4 - 17x^2 + 81}}$$

⑦ *Tableau de signe de d'(x)*

$$d'(x) = \frac{x(2x + \sqrt{34})(2x - \sqrt{34})}{2\sqrt{x^4 - 17x^2 + 81}}$$

		$-\frac{\sqrt{34}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{34}}{2}$	
d'(x)	−	0	+	0	−	0	+
	↘	min	↗	max	↘	min	↗

- distance minimum en $x = \pm\frac{\sqrt{34}}{2}$

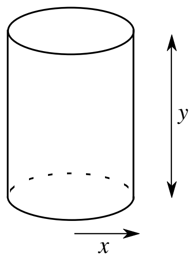
- Pas de bord de domaine

⑧ *Réponse finale:*

La distace est minimum pour $x = \pm\frac{\sqrt{34}}{2}$ et vaut $d = \frac{\sqrt{35}}{2}$

Exercice 7.8

① *Figure d'étude et définition des inconnues*



- x = le rayon r du cylindre
- y = la hauteur h du cylindre

② *A optimiser: l'aire totale:*

$$A(x) = 2\pi x^2 + 2\pi xy$$

③ *Équation (Lien):*

- Lien: $V = \pi x^2 y = 1{,}75$ donc $y = \dfrac{1{,}75}{\pi x^2}$ ou $x = \dots$ (?!?)

④ *Création de la fonction A(x):*

$$A(x) = 2\pi x^2 + 2\pi xy = 2\pi x^2 + \frac{3{,}5}{x} = \frac{2\pi x^3 + 3{,}5}{x}$$

⑤ *Domaine des valeurs possibles:* $x \in \left]0 \,;\, +\infty\right[$

⑥ *Calcul de la dérivée:* $A'(x) = \dfrac{4\pi x^3 - 3{,}5}{x^2}$

$$A'(x) = 0 \iff 4\pi x^3 = 3{,}5 \text{ donc } x = \sqrt[3]{\frac{3{,}5}{2\pi}}$$

⑦ *Tableau de signe de A'(x)*

		0		$\sqrt[3]{\frac{3,5}{2\pi}}$		Valeurs tests
$A'(x)$	$-$	‖	$-$	0	$+$	
			$\searrow$	min	$\nearrow$	

- minimum en $x = \sqrt[3]{\dfrac{3{,}5}{2\pi}} \Rightarrow y = 2x$

- Pas de max au bord du domaine

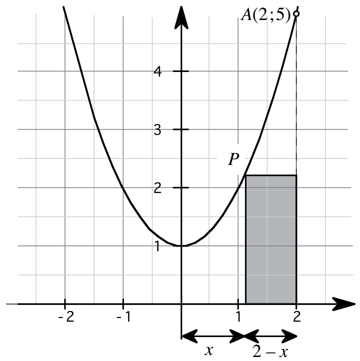
⑧ *Réponse finale:*

Le rayon vaut $x = \sqrt[3]{\dfrac{3{,}5}{2\pi}}$ et la hauteur vaut $y = 2\cdot\sqrt[3]{\dfrac{3{,}5}{2\pi}}$

Exercice 7.10

①② *Figure d'étude et définition des inconnues*

x = 1ère coordonnée de P



Donc P(x ; … *à trouver*)

② *A optimiser: Aire rectangle*

$A(x)$ = base · hauteur

③ *Lien - Equation:*

Recherche de la fonction parabole

• Symétrique par rapport à y $\Rightarrow$ $y = ax^2 + b$

$$\left.\begin{array}{l} y = ax^2 + b \\ \text{par } (0\ ;\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = ax^2 + 1 \\ \text{par } (2\ ;\ 5) \end{array}\right\} \Rightarrow y = x^2 + 1$$

④ *Création de la fonction A(x):*

• Aire du rectangle $= A(x) =$ base · hauteur $= (x^2 + 1)(2 - x)$

$= -x^3 + 2x^2 - x + 2$

⑤ *Domaine des valeurs possibles:* $x \in [0\ ;\ 2]$

⑥ *Calcul de la dérivée:*

$A(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 2 \quad \Rightarrow \quad A'(x) = -3x^2 + 4x - 1$

⑦ *Tableau de signe de A'(x)*

$A'(x) = -3x^2 + 4x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-3x + 1)(x - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$ ou $1/3$

	0		1/3		1		2	
$A'(x)$		–	0	+	0	–		
		↘	min	↗	max	↘		

• maximum en $x = 1$ $\Rightarrow$ $A(1) = -(1)^3 + 2(1)^2 - 1 + 2 = 2u^2$

$\Rightarrow$ 2ème coordonnée de $P = 1^2 + 1 = 2$

• Au bord du domaine: $\begin{cases} A(0) = 2 \\ A(2) = 0 \end{cases}$

⑧ *Réponse finale:*

L'aire est maximum pour $P(1\ ;\ 2)$ et vaut $= 2u^2$

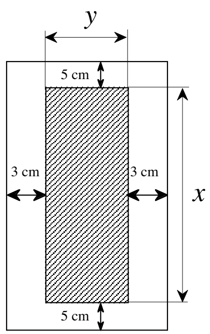
! L'aire est aussi maximum pour $P(0\ ;\ 1)$ et vaut = $2u^2$

Exercice 7.11 1ère démarche (début)

① *Figure d'étude et définition des inconnues*

• x = hauteur de la surface imprimée

• y = largeur de la surface imprimée



② *A optimiser: Aire totale*

$$A_{tot} = (x + 10)(y + 6)$$

③ *Lien - Equation:*

or $\quad x \cdot y = 600 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 600/x}$

④ *Création de la fonction:*

$$A(x) = (x+10)\left(\frac{600}{x}+6\right) = 6x + 660 + \frac{6000}{x}$$

⑤ *Domaine des valeurs possibles:* $\quad x \in \,]0\,;+\infty[$

⑥ *Calcul de la dérivée:*

$$A(x) = 6x + 660 + 6000 \cdot x^{-1} \quad \Rightarrow \quad A'(x) = 6 - 6000x^{-2} = 6 - \frac{6000}{x^2}$$

Exercice 7.11 1ère démarche (fin)

⑦ *Tableau de signe de A'(x)*

$$A'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6 - \frac{6000}{x^2} = 0 \qquad |\ \text{même dénominateur}$$

$$\frac{6x^2 - 6000}{x^2} = 0 \qquad |:6$$

$$\frac{x^2 - 1000}{x^2} = 0 \qquad |\ \text{facto}$$

$$\frac{(x + \sqrt{1000})(x - \sqrt{1000})}{x^2} = 0$$

Donc $A'(x) = 0$ si $x = \pm\sqrt{1000} = \pm 10\sqrt{10}$

		$-10\sqrt{10}$		0		$10\sqrt{10}$	
$A'(x)$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$
					$\searrow$	min	$\nearrow$

• minimum en $x = 10\sqrt{10}$ et pas de bord de domaine

⑧ *Réponse finale:*

Les dimensions sont donc longueur = $10\sqrt{10}$ + 10 cm

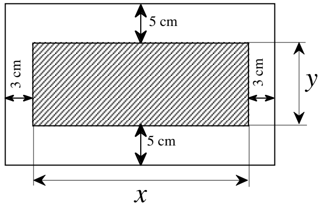
largeur = $\frac{600}{10\sqrt{10}}$ + 6 cm = $6\sqrt{10}$ + 6 cm

Exercice 7.11 2ème démarche (début)

① *Figure d'étude et définition des inconnues*

• x = largeur de la surface imprimée

• y = hauteur de la surface imprimée



② *A optimiser: Aire totale*

$$A_{tot} = (x + 6)(y + 10)$$

③ *Lien - Equation:*

or $x \cdot y = 600 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 600/x}$

④ *Création de la fonction:*

$$A(x) = (x+6)\left(\frac{600}{x}+10\right) = 10x + 660 + \frac{3600}{x}$$

⑤ *Domaine des valeurs possibles:* $x \in \,]0\,;+\infty[$

⑥ *Calcul de la dérivée:*

$$A(x) = 10x + 660 + 3600 \cdot x^{-1} \Rightarrow A'(x) = 10 - 3600x^{-2} = 10 - \frac{3600}{x^2}$$

Exercice 11 2ème démarche (fin)

⑦ *Tableau de signe de A'(x)*

$$A'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 10 - \frac{3600}{x^2} = 0 \qquad | \text{ même dénominateur}$$

$$\frac{10x^2 - 3600}{x^2} = 0 \qquad | : 10$$

$$\frac{x^2 - 360}{x^2} = 0 \qquad | \text{ facto}$$

$$\frac{(x+\sqrt{360})(x-\sqrt{360})}{x^2} = 0$$

Donc $A'(x) = 0$ si $x = \pm\sqrt{360} = \pm 6\sqrt{10}$

		$-6\sqrt{10}$		0		$6\sqrt{10}$	
$A'(x)$	+	0	−	‖	−	0	+
					$\searrow$	min	$\nearrow$

• minimum en $x = 6\sqrt{10}$ et pas de bord de domaine

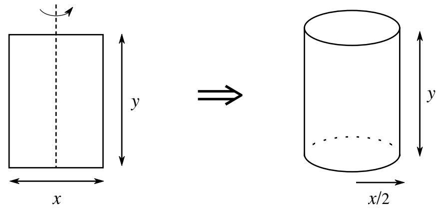
⑧ *Réponse finale:*

Les dimensions sont: longueur = $6\sqrt{10}$ + 6 cm

largueur = $\frac{600}{6\sqrt{10}}$ + 10 cm = $10\sqrt{10}$ + 10 cm

Exercice 7.14 (a)

① *Figure d'étude et définition des inconnues*



- x = la base du rectangle   et y = la hauteur du rectangle

② *À optimiser: le volume du cylindre*

$$V(x) = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

③ *Lien - Équation:*

- $2x + 2y = 60 \Rightarrow y = 30 - x$

Ainsi le cylindre a un rayon de $r = x/2$ et une hauteur $h = 30 - x$

③④ *Création de la fonction V(x):*

$$V(x) = \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{\pi}{4}(30x^2 - x^3)$$

⑤ *Domaine des valeurs possibles:* $x \in]0\,;30[$

⑥ *Calcul de la dérivée:*

$$V(x) = \frac{\pi}{4}(30x^2 - x^3) \quad \Rightarrow \quad V'(x) = \frac{\pi}{4}\, x\,(60 - 3x)$$

⑦ *Tableau de signe de V'(x)*

$$V'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{4}\, x\,(60 - 3x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } x = 20$$

		0		20		30	
$V'(x)$		0	+	0	−		
			↗	max	↘		

- maximum en $x = 20 \quad \Rightarrow \quad y = 10$

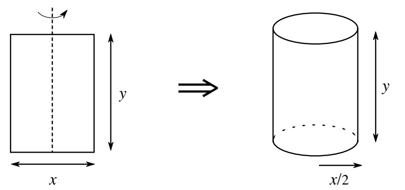
- Vu la croissance, pas de max au bord de E_D

⑧ *Réponse finale:*

Les 2 dimensions optimisant le volume sont:

longueur = 20 cm   et   *largeur* = 10 cm

Exercice 7.14 (b)



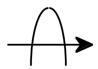
④ *Création de la fonction aire latérale A(x):*

$A(x) = \quad 2\pi \cdot r \cdot h \quad = \quad \pi\,(30x - x^2)$

⑤ *Domaine des valeurs possibles:* $\quad x \in\,]0\,;\,30[$

⑥ Maximum:

$A(x)$ est du 2ème degré:



donc max en $x = \dfrac{-b}{2a} = 15$ et $y = 15$

⑦ *Réponse finale:*

Les 2 dimensions optimisant l'aire latérale sont:

longueur = 15 cm et *largeur* = 15 cm

Il s'agit d'un carré ;-)

Exercice 7.14 (c)

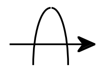
④ *Création de la fonction aire totale A(x):*

$A(x) = \quad 2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi \cdot r^2 \quad = \quad \pi\left(30x - \dfrac{x^2}{2}\right)$

⑤ *Domaine des valeurs possibles:* $\quad x \in\,]0\,;\,30[$

⑥ Maximum:

$A(x)$ est du 2ème degré:



donc max en $x = \dfrac{-b}{2a} = 30$ et $y = 0$ (!!??)

⑦ *Réponse finale:*

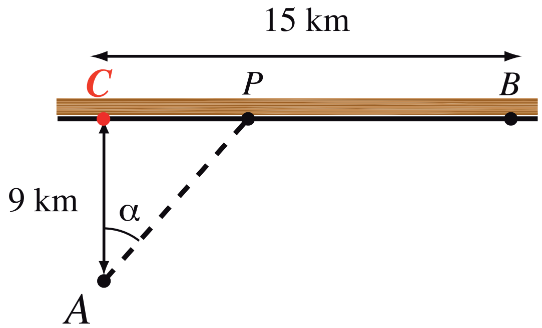
Les 2 dimensions optimisant l'aire totale sont:

longueur = 30 cm et *largeur* = 0 cm

Le rectangle se réduit à un segment de longueur 30

Exercice 7.20

① Figure d'étude et définition des inconnues



- distance AP
- distance $PB = 15 - CP$

② À optimiser : Temps total

$$t_{total} = t_{AP} + t_{PB}$$

③ Liens - Équations :

- $v = \dfrac{d}{t} \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = \dfrac{d}{v}$
- $\cos(\alpha) = \dfrac{9}{AP} \qquad \Longleftrightarrow \qquad AP = \dfrac{9}{\cos(\alpha)} \qquad \Longrightarrow \qquad t_{AP} = \dfrac{AP}{v_{AP}}$

$$\boxed{t_{AP} = \frac{9}{4\cos(\alpha)}}$$

- $\tan(\alpha) = \dfrac{CP}{9} \quad \Longleftrightarrow \quad CP = 9\tan(\alpha) \quad \Longleftrightarrow \quad PB = 15 - 9\tan(\alpha)$

$$\boxed{t_{PB} = \frac{15 - 9\tan(\alpha)}{5}}$$

④ Création de la fonction :

$$t(\alpha) = \frac{9}{4\cos(\alpha)} + \frac{15 - 9\tan(\alpha)}{5}$$

ou sous une forme plus "dérivable"

$$\boxed{t(\alpha) = \frac{9}{4}(\cos(\alpha))^{-1} + 3 - \frac{9}{5}\tan(\alpha)}$$