CHAPITRE I

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DANS LE PLAN

EXERCICES

1) Le plan étant muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on donne $A(5;-7,3)$, $B(-9;0)$, $C\left(\frac{1}{2};-3\right)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\2,4\end{pmatrix}$. Calculez les coordonnées de :

a) $\overrightarrow{AB}$

b) $2\cdot\overrightarrow{CA}$

c) $-\overrightarrow{BC}$

d) $\vec{u}+\vec{v}$

e) $\vec{u}-\vec{v}$

f) $3\vec{u}+2\vec{v}$

g) $3\overrightarrow{BA}-7\overrightarrow{CB}$

h) $\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}+4\overrightarrow{BA}$

2) Le plan étant muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on donne $A(11;-2)$, $B(-4,5;1)$, $C(-17;13)$, $D(x;-5)$ et $E(-3;y)$. Déterminez les réels x et y pour que:

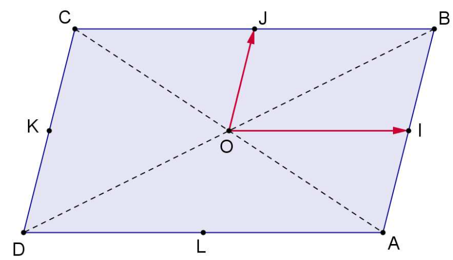
a) $2\overrightarrow{AD}-6\overrightarrow{EB}=\vec{0}$

b) $5\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}-8\overrightarrow{EA}$

c) $\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{DE}$

d) $\overrightarrow{EA}-11\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{BE}+4\overrightarrow{EA}$

3) Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O et I, J, K, L les milieux des quatre côtés :



a) Déterminez les coordonnées des points O, A, B, C, D, I, J, K et L

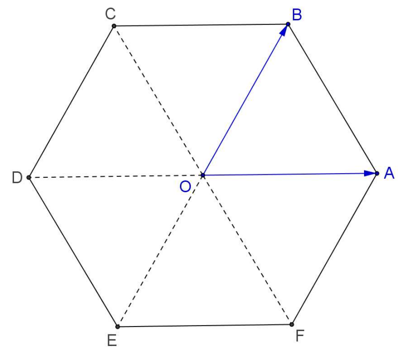
i) dans le repère $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$

ii) dans le repère $(C,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$

iii) dans le repère $(B,\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$

b) Déterminez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{LC}$, $\overrightarrow{BD}$ *et* $\overrightarrow{JA}$ dans le repère $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$.

4) Soit *ABCDEF* est un hexagone régulier de centre *O* :



Déterminez les coordonnées des vecteurs suivants dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$:

$$\overrightarrow{AF},\ \overrightarrow{FE},\ \overrightarrow{ED},\ \overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{BF},\ \overrightarrow{BE},\ \overrightarrow{FD},\ \overrightarrow{DB}.$$

5) Dans un repère $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ on donne les points $A(-1,4)$, $B(3,7)$ et $C(2,-5)$.

Calculez les coordonnées du point K défini par $\overrightarrow{AK} + 2\overrightarrow{BK} - 4\overrightarrow{KC} = \vec{0}$:

a) dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$.

b) dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

6) Soient $\Delta(ABC)$ un triangle quelconque et G son centre de gravité. Calculez les coordonnées de G dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

7) Dans un R.O.N. on donne $A(-3;2)$, $B(1;5)$, $C(4;1)$ et $D(x;0)$.

a) Analysez la nature du triangle $\Delta(ABC)$.

b) Déterminez *x* pour que le triangle $\Delta(ABD)$ soit isocèle en *D*.

8) Le plan étant muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne $A(24;x)$, $B(-31;-16)$, $C(-3;77)$,

$\vec{u}\begin{pmatrix}5\\15\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\18\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-3\\11\end{pmatrix}$

a) Analysez si $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ est un repère du plan.

b) Même question pour $\left(O, \vec{u}, \vec{w}\right)$.

c) Même question pour $\left(A, \vec{u}, \vec{w}\right)$.

d) Même question pour $\left(B, -\vec{u}, 2\vec{w}\right)$.

e) Pour quelle(s) valeur(s) de x les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils colinéaires ?

9) Le plan étant muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne $A\left(2;-1\right)$, $B\left(-3;5\right)$ et $C\left(7;-4\right)$.

a) Trouvez les coordonnées de *A*, *B*, *C* et *O* dans le repère $\left(A,\vec{i},\vec{j}\right)$.

b) Montrez que $\left(B,2\vec{j},-3\vec{i}\right)$ est un repère du plan, puis trouvez les coordonnées de *A*, *B*, *C* et *O* dans ce repère.

c) Montrez que $\left(C,\vec{i}-\vec{j},2\vec{i}+3\vec{j}\right)$ est un repère du plan, puis trouvez les coordonnées de *A*, *B*, *C* et *O* dans ce repère. Plus généralement soit *M* un point de coordonnées $\left(x_M,y_M\right)$ dans $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ et $\left(X_M,Y_M\right)$ dans $\left(C,\vec{i}-\vec{j},2\vec{i}+3\vec{j}\right)$: exprimez X_M et Y_M en fonction de x_M et y_M.

10) Soient $A\left(-1;8\right)$, $B(2;5)$, $C(7;-16)$, $D\left(3;-4\right)$ et $E\left(x;-9\right)$.

a) Analysez si parmi les points *A*, *B*, *C* et *D* il y en a trois qui sont alignés.

b) Déterminez *x* pour que *A*, *D* et *E* soient alignés.

11) Dans un R.O.N. on donne $P\left(-5;-3\right)$, $Q(3;-1)$, $R(2;3)$, $S\left(-6;1\right)$.

a) Montrez par deux méthodes différentes que $PQRS = \#$.

b) Montrez par deux méthodes différentes que $PQRS$ est un rectangle.

c) Analysez si les diagonales sont perpendiculaires. Que peut-on en conclure ?

12) On donne $A\left(1;8\right)$, $B\left(5;-2\right)$ et $C\left(-2,1\right)$ dans un R.O.N. du plan. Montrez par deux méthodes différentes que $\Delta\left(ABC\right)$ est un triangle rectangle.

13) Soients $A\left(1;2\right)$, $B(4;-2)$, $C(-1;-2)$, $D\left(-4;2\right)$ dans un R.O.N.. Montrez que *ABCD* est un losange.

14) Déterminez une équation cartésienne (générale et réduite) de la droite d sachant que :

a) *d* passe par $A\left(-9;11\right)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$.

b) *d* passe par $B\left(\frac{2}{3};-1\right)$ et a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}$.

c) *d* passe par $C\left(2;13\right)$ et a pour vecteur directeur $\vec{w}\begin{pmatrix}-8\\0\end{pmatrix}$.

d) *d* passe par $E\left(3;1\right)$ et par $F\left(-15;4\right)$.

15) Dans un R.O.N. on donne $A(-5;3)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-7\end{pmatrix}$.

a) Déterminez une équation cartésienne de la droite d passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

b) Déterminez un vecteur directeur de d.

16) Soient $A(2;-3)$, $B(-1;4)$ et $C(7;0)$ dans un repère quelconque.

a) Vérifiez que $\Delta(ABC)$ est un triangle.

b) Calculez le centre de gravité G de ce triangle.

c) Déterminez les équations des trois médianes de ce triangle et vérifiez que G appartient à chacune de ces droites.

17) Soient $A(6;-1)$ et $d \equiv 7x-2y-3=0$ dans un R.O.N..

a) Déterminez l'équation de la droite a telle que $A \in a$ et $a \parallel (Ox)$.

b) Déterminez l'équation de la droite b telle que $A \in b$ et $b \parallel d$.

c) Déterminez l'équation de la droite c telle que $A \in c$ et $c \perp (Ox)$.

d) Déterminez l'équation de la droite e telle que $A \in e$ et $e \perp (Oy)$.

e) Déterminez l'équation de la droite f telle que $A \in f$ et $f \perp d$.

18) Soient $d \equiv 7x-9y+11=0$ et $d' \equiv ax+4y-1=0$ dans un R.O.N..

a) Pour quelles valeurs de a a-t-on $d \parallel d'$?

b) Pour quelles valeurs de a a-t-on $d \perp d'$?

19) On donne quatre droites par leurs équations cartésiennes :

$$d_1 \equiv x-y+2=0 \qquad d_2 \equiv 2x+3y+6=0$$
$$d_3 \equiv 2x+7=0 \qquad d_4 \equiv -5y+15=0$$

a) Pour chacune de ces droites déterminez une équation réduite puis représentez-les.

b) Vérifiez si les points $A\left(-\frac{7}{2};\frac{1}{3}\right)$, $B(1;3)$ et $O(0;0)$ appartiennent à ces droites.

20) Parmi les droites suivantes, quelles sont celles qui sont parallèles ? perpendiculaires ? (toutes les équations sont données dans un R.O.N.)

$$d_1 \equiv 4=\frac{y}{2} \qquad d_2 \equiv 6x=5-4y \qquad d_3 \equiv x=7-y$$
$$d_4 \equiv 4x-6y=0 \qquad d_5 \equiv y=9+x \qquad d_6 \equiv \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=11$$
$$d_7 \equiv 4x+3=5 \qquad d_8 \equiv 2x-3y=1 \qquad d_9 \equiv 5x-7y=5(x-y+2)$$

21) Dans un R.O.N. on donne le point $A(-4;7)$ et la droite $d \equiv 3x-5y+8=0$. Déterminez l'équation réduite des droites d_1 et d_2 passant par A tel que $d_1 \parallel d$ et $d_2 \perp d$.

22) Soient $M\left(-3;\frac{1}{2}\right)$, $P(-2;0)$ et $d \equiv 2x+2y+1=0$. Déterminez $(MP)\cap d$. Vérifiez votre résultat sur une figure.

23) Trouvez les points *A*, *B* et *C* sachant que :

$(AB) \equiv 2x-y=0$ $\qquad$ $(AC) \equiv x+y=3$ $\qquad$ $(BC) \equiv 3x-2y=4$

24) Soient $A(9;-1)$, $B(0;8)$ et $C(4;-3)$.

a) Vérifiez que *A*, *B* et *C* ne sont pas alignés.

b) Déterminez une équation cartésienne de la droite *d* telle que $C \in d$ et $d \parallel (AB)$.

c) Déterminez une équation cartésienne de la droite d' telle que $B \in d'$ et $d' \parallel (AC)$.

d) Déterminez $D \in d \cap d'$.

e) Quelle est la nature du quadrilatère *ABDC* ? Déduisez-en une méthode (beaucoup !) plus simple pour obtenir *D*.

25) Soient $A(2;1)$, $B(5;3)$, $C(3;-1)$ dans un R.O.N..

a) Déterminez les équations des trois médiatrices du triangle $\Delta(ABC)$.

b) Montrez que les trois médiatrices se coupent en un point Ω.

c) Montrez que $\Omega A = \Omega B = \Omega C$. Comment appelle-t-on le point Ω ?

d) Déterminez les équations des trois hauteurs du triangle $\Delta(ABC)$.

e) Montrez que les trois hauteurs se coupent en un point *H*. Comment appelle-t-on ce point *H* ?

f) Déterminez le centre de gravité du triangle $\Delta(ABC)$.

g) Montrez qu'il existe une droite qui passe par Ω, *H* et *G*. Cette droite est appelée **droite d'Euler** *(mathématicien suisse du 18^e siècle)*. Précisez les positions de ces trois points.

26) Dans un R.O.N., déterminez une équation de la diagonale et de chacun des côtés non donnés du rectangle dont une diagonale a pour équation cartésienne $3x+7y-10=0$ et dont deux côtés ont respectivement pour équations $5x+2y-7=0$ et $5x+2y=36$.

27) Dans un R.O.N., déterminez une équation cartésienne de chacun des côtés d'un triangle dont on donne le sommet $A(-4;-5)$ et deux hauteurs d'équations $3x+8y+13=0$ et $5x+3y-4=0$.

28) Soient deux droites $d \equiv 8x-6y+7=0$, $d' \equiv 12y-5x+1=0$ et $A(2;3)$ dans un R.O.N.. De quelle droite le point A est-il le plus éloigné ?

29) Soient $A(2;2)$, $B(-3;1)$ et $C(5;-4)$ dans un R.O.N.. Calculez l'aire du triangle $\Delta(ABC)$.

30) Dans un R.O.N. on donne les deux droites $d \equiv \frac{y}{2} = \frac{2}{3}x+1$ et $d' \equiv 3y-4x+14=0$.

a) Montrez que $d \parallel d'$.

b) Calculez Pd' où P est un point quelconque de d. Que constatez-vous ?

31) Soient $A(1;0{,}5)$, $B(-4;3)$ et $C(-2;-1)$ dans un R.O.N. (figure !).

a) Déterminez les équations des droites (AB), (AC) et (BC).

b) Montrez que l'ensemble des points (appelé aussi le **lieu** des points) P qui sont équidistants de (AB) et (AC) est la réunion de deux droites perpendiculaires sécantes en A. On sait que l'une de ces deux droites est la bissectrice b_A de l'angle $\widehat{BAC}$. Laquelle ?

c) Déterminez de même les bissectrices b_B de l'angle $\widehat{CBA}$ et b_C de l'angle $\widehat{ACB}$.

d) Montrez que les trois bissectrices sont concourantes en un point D équidistant des trois côtés du triangle $\Delta(ABC)$.

32) Donnez une équation cartésienne du cercle …

a) de centre $\Omega(4;-3)$ et de rayon 2.

b) de centre $\Omega(0;-1)$ et passant par $R(12;-6)$.

c) de centre $\Omega\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{4}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) de diamètre $[AB]$ avec $A(-5;4)$ et $B(7;-8)$.

33) Déterminez les lieux suivants :

$\mathbb{L} = \left\{P(x;y) \,/\, x^2 - 6x + y^2 - 14y - 63 = 0\right\}$

$\mathbb{M} = \left\{P(x;y) \,/\, x^2 + y^2 - 3x + 6y - \dfrac{55}{4} = 0\right\}$

$\mathbb{P} = \left\{P(x;y) \,/\, 49x^2 + 42x + 49y^2 + 9 = 0\right\}$

$\mathbb{O} = \left\{P(x;y) \,/\, x^2 - 8x + y^2 - 18y + 135 = 0\right\}$

$\mathbb{I} = \left\{P(x;y) \,/\, x^2 + 7x + y^2 - \dfrac{11}{2}y + 51 = 0\right\}$

$\mathbb{J} = \left\{P(x;y) \,/\, 4x^2 - 4x + 4y^2 + 8y - 31 = 0\right\}$

$\mathbb{K} = \left\{P(x;y) \,/\, 36x^2 + 48x + 36y^2 - 180y + 205 = 0\right\}$

$\mathbb{E} = \left\{P(x;y) \,/\, (2x+1)(5-6x) - (3y+1)(4y+7) = 0\right\}$

34) Reprenons les données de l'exercice 31.

a) Etablissez l'équation du cercle de centre D qui est tangent aux trois côtés du triangle $\Delta(ABC)$, appelé **cercle inscrit** du triangle.

b) Calculez l'aire et le périmètre de ce cercle.

35) Donnez une équation cartésienne du cercle passant par les points

a) $A(1;2)$, $B(0;1)$ et $C(1;0)$.

b) $A(-1;3)$, $B(4;-2)$ et $C(-2;-5)$.

36) Soient $A(-2;-3)$, $B(8;1)$, $C(6;6)$ et $D(-4;2)$ dans un R.O.N.. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Déterminez son cercle circonscrit.

37) Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $\mathcal{C} \equiv x^2 + 10x + y^2 - 2y + 22 = 0$ dans un R.O.N..

a) Déterminez le centre et le rayon de $\mathcal{C}$.

b) Trouvez deux points A et B de $\mathcal{C}$ qui n'ont ni la même abscisse, ni la même ordonnée.

c) Déterminez les équations des tangentes t_A et t_B au cercle aux points A et B respectivement.

d) Déterminez le point d'intersection I de t_A et t_B.

e) Quelle est la nature du triangle $\Delta(IAB)$?

38) Soient $A(-4;1)$ et $B(2;7)$ dans un R.O.N.. Déterminez les lieux suivants :

a) $\mathbb{L} = \{M \ / \text{ le triangle } \Delta(ABM) \text{ est rectangle en } M\}$. Comment appelle-t-on ce lieu ?

b) $\mathbb{S} = \{M \ / \ AM = BM\}$. Quel est ce lieu ? Prouvez-le !

39) Soit un triangle $\Delta(ABC)$ quelconque, $A' = mil[BC]$, $B' = mil[AC]$ $C' = mil[AB]$ et G son centre de gravité.

a) Montrez que $AC^2 + AB^2 = 2AA'^2 + \dfrac{BC^2}{2}$ (**théorème des médianes**)

b) Donnez sans démonstration des formules analogues pour les autres médianes.

c) Déduisez-en que $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \dfrac{BC^2 + AC^2 + AB^2}{3}$.

40) Montrez que pour tout $\#(ABCD)$ on a : $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$ par deux methods différentes:

a) En vous plaçant dans un repère approprié.

b) En utilisant le théorème des médianes établi dans l'exercice précédent.

41) Soient A et B deux points fixes tel que $AB = 6$. Déterminez le lieu $\mathbb{L}$ des points M tel que $MA = 2 \cdot MB$.

42) Soient $A(2;5)$ et $B(4;7)$ dans un R.O.N.. Déterminez le lieu $\mathbb{L}$ des points M tel que:

$$MA^2 + MB^2 = \frac{5}{4}AB^2$$

43) Une perche rigide $[AB]$ de 10 m de long est posée contre un mur vertical. En supposant que son extrémité A glisse le long du mur et son extrémité B le long du sol, quel est le lieu $\mathbb{L}$ du milieu M de la perche ? (figure !)

44) Soient a et b deux droites perpendiculaires sécantes en O et M un point quelconque du plan. On note A et B les projections orthogonales de M sur a et b respectivement (figure !). Déterminez le lieu $\mathbb{L}$ des points M tels que $OA + OB = 3$.