CHAPITRE II

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

EXERCICES

1) Résolvez les équations suivantes :

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $-x^2 + x + 2 = 0$

c) $15x^2 - 16x - 7 = 0$

d) $7x^2 - 9x + 3 = 0$

e) $64x^2 - 48x + 9 = 0$

f) $5(x-6)^2 = 7x - 8$

g) $x^2 - \frac{1}{2} = \sqrt{2}\, x$

h) $x\left(x - \sqrt{2}\right) = \frac{3}{2}$

i) $x^2 + \left(\sqrt{2} - 1\right)x - \sqrt{2} = 0$

j) $25x^2 - 370x - 231 = 0$

k) $-6x^2 + 11x + 5 = 0$

l) $\frac{x^2}{2} + \frac{43}{60}x - \frac{2}{15} = 0$

m) $-\frac{5}{3}x^2 + \frac{4}{7}x - \frac{5}{6} = 0$

n) $169x^2 - 361 = 0$

o) $17x^2 - 6x = 0$

p) $66 - 21x - 6x^2 = 0$

2) Factorisez, si possible, les polynômes suivants :

a) $P(x) = x^2 + 4x - 5$

b) $P(x) = x^2 - 5x - 6$

c) $P(x)=36x^2-48x$

d) $P(x)=25x^2-231+370x$

e) $P(x)=\sqrt{2}\,x^2-x-\sqrt{2}$

f) $P(x)=x^2+x+1$

g) $P(x)=5x^2-4x+\frac{4}{5}$

h) $P(x)=9x^2-12x+4$

3) Déterminez, <u>sans les calculer</u>, *le nombre et le signe des racines* des équations suivantes :

a) $8x^2-17x+3=0$

b) $x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{5}=0$

c) $107x^2-985x+521=0$

d) $25x^2-90x+81=0$

4) Déterminez c pour que l'équation $3x^2-10x+c=0$ admette :

a) deux racines différentes.

b) deux racines strictement positives.

c) une racine nulle.

d) deux racines inverses.

e) deux racines de signes opposés.

f) aucune racine.

5) Déterminez c pour que l'équation $cx^2+6x-5=0$ admette :

a) deux racines différentes.

b) deux racines strictement positives.

c) une racine nulle.

d) deux racines inverses.

e) deux racines de signes opposés.

f) aucune racine.

6) Déterminez le réel m pour que l'équation d'inconnue x : $x^2+(2m-1)x+(m^2-1)=0$ admette :

a) deux racines distinctes.

b) au moins une racine nulle.

c) deux racines opposées.

d) deux racines de signes opposés.

e) deux racines inverses.

7) Résolvez les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} a+b=3 \\ ab=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y=6 \\ xy=9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} uv=6 \\ u+v=7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} c+d=11 \\ cd=35 \end{cases}$

8) Trouvez une équation

a) dont l'ensemble des solutions est $S=\{-5;3\}$.

b) dont l'ensemble des solutions est $S=\left\{-7;\frac{2}{3}\right\}$.

c) du premier degré dont l'ensemble des solutions est $S=\left\{\frac{2}{5}\right\}$.

d) du deuxième degré dont l'ensemble des solutions est $S=\left\{\frac{2}{5}\right\}$.

e) du troisième degré dont l'ensemble des solutions est $S=\left\{\frac{2}{5}\right\}$.

f) dont l'ensemble des solutions est $S=\left\{2;-9;\frac{4}{3}\right\}$.

g) dont l'ensemble des solutions est $S=\{-1;2;-3;4\}$.

h) du quatrième degré dont l'ensemble des solutions est $S=\{-3;2\}$.

9) Résolvez les inéquations suivantes :

a) $-x^2+4x-4<0$

b) $x^2+\frac{1}{2}x\geq 0$

c) $-9x^2-15\geq 0$

d) $17x^2+11x>15$

e) $x^2\leq 3x-2$

f) $-x^2+x+\dfrac{1}{3}<0$

g) $873x^2-1237x-4146\geq 0$

h) $0,06x^2+0,01x-0,02<0$

i) $\dfrac{5x^2-14x-3}{14-x^2-5x}\leq 0$

j) $\dfrac{(3x-8)(x^2-16)}{5x(2x^2+x-3)}\geq 0$

k) $\dfrac{(5x-7)(2x^2-3x-5)}{(-x^2+6x+7)(x^2+6x+9)}\leq 0$

l) $\dfrac{(-x^2-11)(-x^2-x+12)}{(-x^2-x+2)(x^3-25x)}\geq 0$

m) $\dfrac{(4x-7)(-x^4-2x^3+15x^2)}{(2x^2-x-10)(4-4x+x^2)}\leq 0$

n) $\dfrac{(12-x^2-4x)(12x-9x^2-4)}{(2x-7)^5(4x^3-25x)(-x^2-x-1)}\leq 0$

o) $\dfrac{(3x^2-4x-55)(49-9x^2)}{(-6x^3-15x)(3-2x)^7}\geq 0$

10) Résolvez les équations suivantes en discutant suivant les valeurs du paramètre m :

a) $mx^2-4x+3m+1=0$

b) $(1+m)x^2-3mx+4(1-m)=0$

c) $(m+3)x^2-2mx+4=0$

d) $(m^2-4)x^2+mx+\dfrac{9}{20}=0$

e) $(p-2)x^2+(7-5p)x+6p-2=0$

f) $mx^2+(m-2)x+m=0$

g) $x^2+mx+m^2+m-1=0$

h) $(m+2)x^2+2\sqrt{2}\,x+1-5m=0$

i) $(m+3)x^2-(2m+3)x-6=0$

j) $(m-5)x^2-2mx+1-m=0$

k) $3x^2+(6m+5)x+3m^2-m+2=0$

l) $(p-2)x^2+(7-5p)x+6p-3=0$

11) Résolvez les équations suivantes :

a) $x^4-4x^2-45=0$

b) $x^6-19x^3-216=0$

c) $x^8+8x^4-9=0$

d) $x^{10}+31x^5-32=0$

e) $\dfrac{x+4}{x}-\dfrac{1}{x+4}=\dfrac{4}{x^2+4x}$

f) $\dfrac{2+2x}{9x^2-4}-\dfrac{x-2}{9x^2+12x+4}=\dfrac{x+4}{9x^2-4}$

g) $\dfrac{1}{x-6}+\dfrac{1}{x^2-10x+24}=\dfrac{2}{4x-x^2}$

h) $\dfrac{x-2}{3(x-1)}+\dfrac{x-1}{4(x-2)}=\dfrac{x+2}{x^2-3x+2}$

i) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{35}$

j) $\dfrac{2x}{2x^2+3x-2}+\dfrac{1-x}{x^2-x-6}=\dfrac{4x-3}{2x^2-7x+3}$

k) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{8}{x^2-16}$

l) $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{6}{x^2-9}$

m) $\dfrac{x^2-3}{9x^2-24x+16}\cdot\dfrac{3x^2-4x}{x^2+2\sqrt{3}x+3}=0$

n) $2x+\sqrt{3-5x-2x^2}=1$

o) $\sqrt{2x^2-5x+7}=7+x$

p) $\sqrt{2x+9}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-4}$

q) $\sqrt{2-x}-\sqrt{1-x}=\sqrt{3-x}$

r) $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$

s) $\sqrt{1+\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$

t) $\sqrt{36+x}-2=\sqrt{x}$

u) $\sqrt{5-\sqrt{7-2x}}-\sqrt{1-x}=0$

v) $9x^3-3x^2-8x+4=0$

w) $6x^3-19x^2+11x+6=0$

x) $x^3+6x^2+6x+5=0$

y) $10x^4-11x^3-21x^2+4x+4=0$

z) $x^4-2x^3-17x^2+4x+30=0$

aa) $2x^3-5x+3=0$

bb) $4x^4+11x^2-3=0$

cc) $7x^3-3x^2+10=0$

dd) $2x^4-5x^2+3x=0$

ee) $3x^4-11x^2-4=0$

ff) $-10x^4-11x^3+40x^2+23x-42=0$

Problèmes

12) Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(1;3)$ et de rayon 5 dans un R.O.N..

a) Trouvez les points de $\mathcal{C}$ dont l'abscisse vaut 5.

b) Déterminez les équations des tangentes à $\mathcal{C}$ en ces points.

13) Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(-2;7)$ passant par $A(1;3)$ et la droite $d\equiv 3x-y+4=0$ dans un R.O.N..

a) Donnez l'équation de $\mathcal{C}$.

b) Déterminez l'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite *d*.

14) Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $x^2-6x+y^2+10y+9=0$ et la droite $d\equiv 4x+3y-27=0$ dans un R.O.N..

a) Déterminez l'équation de la droite $d'\perp d$ passant par le centre de $\mathcal{C}$.

b) Déduisez-en les équations des tangentes au cercle qui sont parallèles à *d*.

15) Dans un R.O.N. on donne les points $\Omega_1(3;-2)$ et $\Omega_2(9;1)$. Déterminez l'intersection des cercles $\mathcal{C}_1$ de centre Ω_1 et de rayon $\sqrt{10}$ et $\mathcal{C}_2$ de centre Ω_2 et de rayon5.

16) Dans un R.O.N. on donne :

$\mathcal{C}_1 \equiv x^2 - 8x + y^2 - 10y - 9 = 0$

$\mathcal{C}_2 \equiv x^2 + 10x + y^2 + 14y - 51 = 0$

$d \equiv x - 3y + 21 = 0$

$d' \equiv -2x + 3y - 34 = 0$.

Déterminez $d \cap \mathcal{C}_1$, $d' \cap \mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$.

17) Dans un R.O.N. on donne $\mathcal{C} \equiv 3x^2 - 24x + 3y^2 - 30y + 48 = 0$. Trouvez les deux points A et B de $\mathcal{C}$ dont l'abscisse est égale à l'ordonnée. Analysez si $[AB]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$.

18) Dans un R.O.N. d'origine O on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(3,0)$ et de rayon 2.

Déterminez le lieu $\mathbb{L}$ des milieux des cordes de $\mathcal{C}$ qui passent par O. (figure !)

19) On donne les cercles $\mathcal{C}_1 \equiv x^2 - 4x + y^2 - 6y - 36 = 0$ et $\mathcal{C}_2 \equiv x^2 - 10x + y^2 + 2y + 22 = 0$ dans un R.O.N..

a) Déterminez les centres et les rayons de ces deux cercles.

b) Montrez que les deux cercles sont tangents.

c) Déterminez l'équation de la tangente commune à ces deux cercles.

20) De chaque bord d'une feuille rectangulaire de 30 cm sur 18 cm on découpe une bande de même largeur (figure). Sachant que l'aire du rectangle ainsi obtenu vaut ¾ de l'aire initiale, calculez la largeur de la bande.

21) J'ai acheté des gâteaux pour 60 €. Si j'en avais eu 3 de plus pour le même prix, chacun aurait coûté 1 € de moins. Combien de gâteaux ai-je acheté ?

22) Un champ rectangulaire a pour périmètre 100 m et pour aire 600 m^2. Quelles sont les longueurs de ses côtés ?

23) Un triangle rectangle a pour aire 24 cm^2 et pour périmètre 24 cm. Calculez les longueurs de ses côtés.

24) Trouvez deux nombres dont la différence est égale à 4, et le produit 96.

25) Un parallélogramme dont deux côtés consécutifs forment un angle de 30° a 20 cm de périmètre et12 cm^2 d'aire. Calculez les longueurs de ses côtés.

26) Une personne a décidé d'investir 3600 € dans des actions d'une entreprise. Au moment de les acheter, elle s'aperçoit que celles-ci ont baissé de 100 € l'unité et qu'elle peut ainsi en acheter trois de plus. Quel prix a-t-elle payé pour une action ?

27) Un avion effectue un vol aller-retour entre deux villes A et B distantes de 400 km. Pendant toute la durée du vol, le vent souffle de A vers B à la vitesse de 80 km/h.

a) En supposant que la vitesse (propre) moyenne de l'avion est de 400 km/h pendant tout le trajet, calculez le temps qu'il met à l'aller et le temps qu'il met au retour. Met-il plus ou moins de temps pour l'aller-retour que s'il n'y avait pas de vent ?

b) Quelle doit être la vitesse moyenne (propre) de l'avion pour que le vol s'effectue en deux heures ?

28) Deux voitures partent simultanément pour un trajet de 420 km. La première, ayant une vitesse moyenne supérieure de 10 km/h à celle de la seconde, arrive une heure avant celle-ci. Calculez la vitesse moyenne de chaque voiture.

29) Un motocycliste a parcouru, sans s'arrêter, 54 km en une heure. Sachant que son trajet est constitué de 30 km de montée et de 24 km de descente, et que sa vitesse en descente a été de 10 km/h supérieure à celle en montée, calculez ces deux vitesses.

30) Un automobiliste parcourt 525 km en un temps t à une vitesse moyenne v. S'il avait diminué sa vitesse de 15 km/h, il aurait mis 1 h 45 mn de plus. Calculez sa vitesse v.

31) Déterminez deux nombres entiers consécutifs dont la somme des carrés est égale à 1301.

32) Lors d'un héritage une somme de 30 000 € est partagée entre un certain nombre de personnes. Avec trois personnes en moins, la part de chacun serait augmentée de 2 250 €. Quel est le nombre d'héritiers et la part de chacun ?

33) Une personne place un capital de 15 000 € à 7 % l'an. Après quelques mois elle retire le capital et les intérêts pour placer le tout à 8 % l'an pendant la même durée que précédemment. Sachant qu'en fin d'opération elle dispose de 16 537,33 €, calculez combien de temps ont duré les placements.

34) Voici un vieux problème chinois :

Une ville fortifiée en forme de carré possède une porte au milieu de chacun de ses côtés. Un arbre se trouvant à 20 m de la porte Nord est visible d'un point P que l'on atteint en faisant 14 m à partir de la porte Sud vers le sud, puis 1775 m vers l'ouest. Quelles sont les dimensions de la ville ?

35) Je roulais à vitesse constante sur une autoroute qui longeait une voie ferrée. Les trains express régionaux (TER), qui s'élançaient à intervalles réguliers et à vitesse constante dans les deux sens, roulaient moins vite que moi. J'en dépassais un toutes les 55 minutes, tandis que je croisais toutes les 5 minutes ceux qui venaient en sens inverse. A quel intervalle les TER quittaient-ils leur gare ?