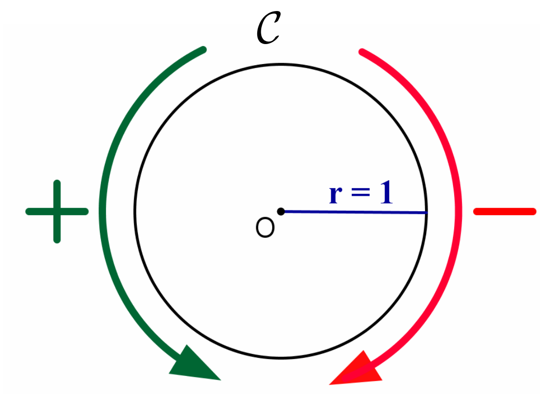
CHAPITRE IV

TRIGONOMETRIE

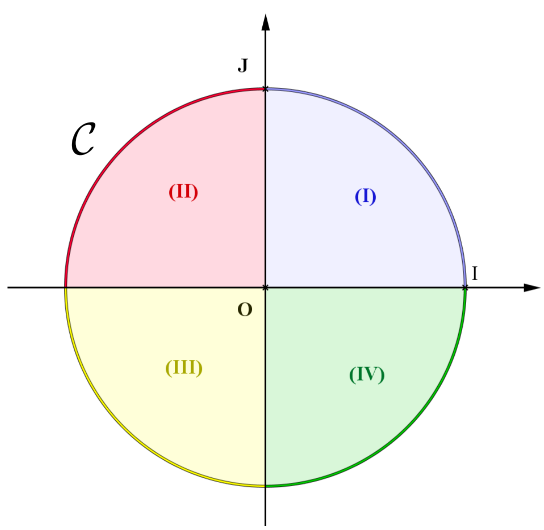
COURS

1) Le cercle trigonométrique

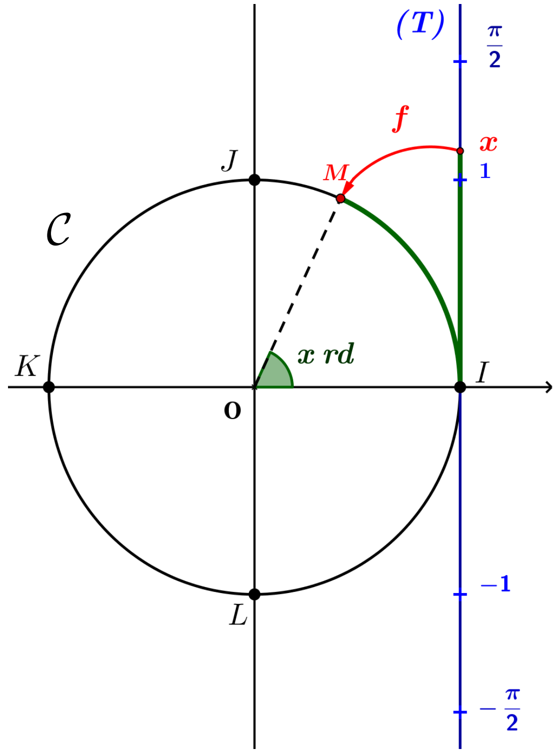
- Un **cercle trigonométrique** est un cercle $\mathcal{C}$ de rayon 1 qui est **orienté**, ce qui veut dire qu'on a choisi un **sens positif (celui des ronds-points)** et un **sens négatif (celui des aiguilles d'une montre)** :



- Soit $\mathcal{C}$ un cercle trigonométrique de centre O et I, J deux points de $\mathcal{C}$ tel que $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ est un R.O.N. du plan. Alors les axes (OI) et (OJ) subdivisent le cercle en quatre **quadrants** notés : (I), (II), (III) et (IV) :



- Soit (T) la tangente à $\mathcal{C}$ en I munie du repère $\left(I, \overrightarrow{OJ}\right)$, $x \in \mathbb{R}$ et $X(x) \in (T)$:



En « enroulant » *(T)* **autour de** $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ à partir du point fixe commun *I* (vers « le haut » dans le sens positif, vers « le bas » dans le sens négatif), on voit qu'à tout réel *x* on peut associer un point unique $M \in \mathcal{C}$. Nous noterons $f(x) = M$ cette correspondance.

En remarquant que le périmètre de $\mathcal{C}$ vaut $p = 2\pi$ puisque son rayon vaut 1, on a :

$$f(\pi) = f(\quad) = f(\quad) = f(\quad) = f(\quad) = \ldots =$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\quad) = f(\quad) = f(\quad) = f(\quad) = \ldots =$$

$$f(\ ) = f(\quad) = f(\quad) = f(\quad) = f(\quad) = \ldots = L$$

$$f(0) = f(\quad) = f(\quad) = f(\quad) = f(\quad) = \ldots =$$

Et de manière générale : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad f(x + k \cdot 2\pi) = f(x)}$

En effet, ajouter $k \cdot 2\pi$ à *x* revient à faire *k tours complets* à partir de $f(x) = M$ dans un sens ou dans l'autre (selon le signe de *k*) pour retomber sur le même point *M* que *x* !

- Ainsi l'ensemble des nombres $x + k \cdot 2\pi$ (où $k \in \mathbb{Z}$) caractérise le point *M* et donc également l'**angle** $\widehat{IOM}$. De plus si $x \in [0, 2\pi]$ alors *x* est égal à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ donc tout nombre de la forme $x+k\cdot 2\pi$ est une mesure de la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ à un multiple entier de 2π près ! Ceci nous amène à poser la définition suivante :

- **Définition**

Les nombres $x+k\cdot 2\pi$ (où $k\in\mathbb{Z}$) sont les mesures en **radians (rd)** de l'angle $\widehat{IOM}$ et aussi de l'arc $\overset{\frown}{IM}$. Ainsi :

$$\boxed{mes\,\widehat{IOM}=mes\,\overset{\frown}{IM}=x+2k\pi \quad rd}$$

Autre notation : $mes\,\widehat{IOM}=x+k\cdot 2\pi\equiv x\,(2\pi)$ (*on lit* : « x modulo 2π »)

- *Exemples :*

$mes\,\widehat{IOJ}=\dfrac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi\equiv\dfrac{\pi}{2}\quad(2\pi)$

$mes\,\widehat{IOK}=\pi+k\cdot 2\pi\equiv\pi\quad(2\pi)$

$mes\,\widehat{IOL}=\dfrac{3\pi}{2}+k\cdot 2\pi\equiv\dfrac{3\pi}{2}\quad(2\pi)$

- Chaque angle a donc
  - une infinité de mesures, mais la différence entre deux mesures est toujours un multiple entier de 2π si on mesure en rd, un multiple entier de 360 si on mesure en degrés.,
  - <u>une seule</u> mesure comprise entre 0 rd et 2π rd : c'est la **plus petite mesure positive**.
  - <u>une seule</u> mesure comprise entre $-\pi$ rd et π rd : c'est la **mesure principale**.

- Correspondance entre degrés et radians : $\boxed{\pi\ \ rd=180°}$.

Les transformations se font par une *règle de trois* :

$$\begin{cases}180°=\pi\quad rd\\ 1°=\dfrac{\pi}{180}\quad rd\\ x°=\dfrac{x\cdot\pi}{180}\quad rd\end{cases}\qquad\text{respectivement :}\qquad\begin{cases}\pi\quad rd=180°\\ 1\quad rd=\dfrac{180°}{\pi}\\ x\quad rd=\dfrac{x\cdot 180°}{\pi}\end{cases}$$

Exemples :

$0°=0\,rd$, $30°=\dfrac{\pi}{6}\,rd$, $45°=\dfrac{\pi}{4}\,rd$, $60°=\dfrac{\pi}{3}\,rd$, $90°=\dfrac{\pi}{2}\,rd$.

Exercices 1 - 3

2) Fonctions trigonométriques

a) Fonctions sinus et cosinus

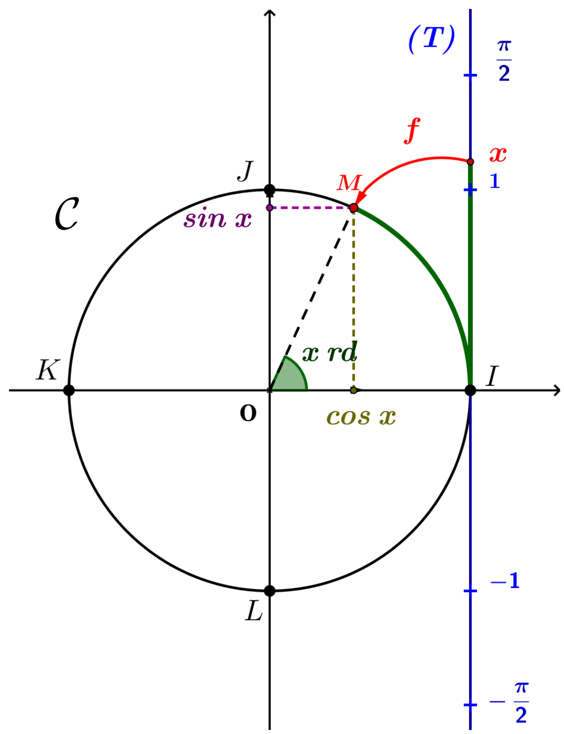
- **Définitions**

  Soit $\mathcal{C}$ un cercle trigonométrique, $x \in \mathbb{R}$ *et* $f(x) = M \in \mathcal{C}$ (voir 1)), alors:

  - l'**abscisse** de M dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ est appelée **cosinus de x** (ou cosinus de *l'angle* $\widehat{IOM}$) et est notée ***cos x***.
  - l'**ordonnée** de M dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ est appelée **sinus de x** (ou sinus de *l'angle* $\widehat{IOM}$) et est notée ***sin x***.

- Ainsi dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ on a ***M(cos x, sin x)***, c'est-à-dire

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \cos x \cdot \overrightarrow{OI} + \sin x \cdot \overrightarrow{OJ}}$$



- Propriétés immédiates
  - Les fonctions *sin x* et *cos x* existent pour tout réel x, donc $\boxed{D_{sin} = D_{cos} = \mathbb{R}}$
  - $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \sin x \leq 1 \quad et \quad -1 \leq \cos x \leq 1}$

    Ceci est évident puisque le rayon de $\mathcal{C}$ vaut 1.

- $\boxed{\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\cdot\pi\ (k\in\mathbb{Z}) \equiv 0\ (\pi)\ et\ \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}+k\cdot\pi\ (k\in\mathbb{Z}) \equiv \frac{\pi}{2}\ (\pi)}$

  En effet d'après la figure ci-dessus :

  $$\sin x = 0 \Leftrightarrow M = I \text{ ou } M = K \Leftrightarrow x \in \{0,\pi,2\pi,3\pi,\dots,-\pi,-2\pi,-3\pi,\dots\}$$
  $$\Leftrightarrow x = k\cdot\pi\ (k\in\mathbb{Z}) \equiv 0\ (\pi)$$

  $$\cos x = 0 \Leftrightarrow M = J \text{ ou } M = L$$
  $$\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+\pi,\frac{\pi}{2}+2\pi,\frac{\pi}{2}+3\pi,\dots,\frac{\pi}{2}-\pi,\frac{\pi}{2}-2\pi,\dots\right\}$$
  $$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}+k\cdot\pi\ (k\in\mathbb{Z}) \equiv \frac{\pi}{2}\ (\pi)$$

- Le signe de cos x et de sin x dépend du quadrant dans lequel se trouve M :

  $$\boxed{\begin{array}{lll} \sin x \geq 0 & \Leftrightarrow M \in (I)\cup(II) & \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \pi\ (2\pi) \\ \sin x \leq 0 & \Leftrightarrow M \in (III)\cup(IV) & \Leftrightarrow \pi \leq x \leq 2\pi\ (2\pi) \\ \cos x \geq 0 & \Leftrightarrow M \in (I)\cup(IV) & \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\ (2\pi) \\ \cos x \leq 0 & \Leftrightarrow M \in (II)\cup(III) & \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}\ (2\pi) \end{array}}$$

- $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\quad \forall k\in\mathbb{Z}\quad \sin(x+2k\pi) = \sin x \text{ et } \cos(x+2k\pi) = \cos x}$

  Ceci découle immédiatement du fait que $f(x+k\cdot 2\pi) = f(x)$ et on exprime cette propriété en disant que les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques** de période 2π.

- **Lien avec la trigonométrie dans le triangle rectangle**

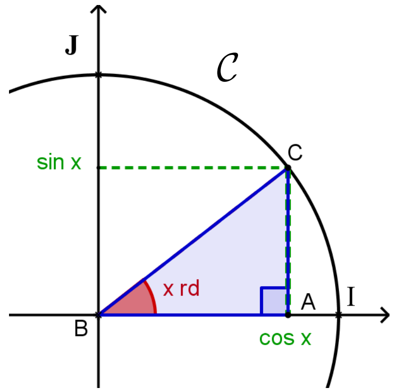
  Soit $\Delta(ABC)$ un **triangle rectangle** en A et x la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$. En classe de 4e vous avez défini $\cos x$ et $\sin x$ par :

  $$\cos x = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BA}{BC} \text{ et } \sin x = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}.$$

  Montrons que ces définitions, valables uniquement pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (en radians), sont compatibles avec celles, plus générales, que nous venons de voir en utilisant le cercle trigonométrique. Pour cela nous allons distinguer deux cas :

  1er cas : $BC = 1$

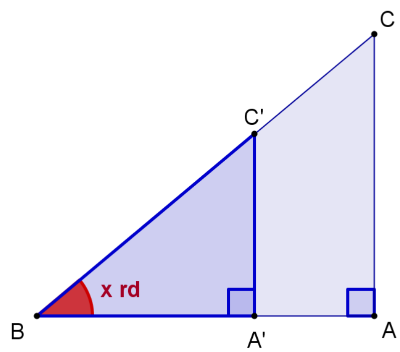
  Alors le cercle $\mathcal{C}$ de centre B passant par C est un cercle trigonométrique et en choisissant convenablement le R.O.N. d'origine B on a : $\cos x = AB$ et $\sin x = AC$:



et comme $BC=1$ on a bien $\cos x = BA = \frac{BA}{BC}$ et $\sin x = AC = \frac{AC}{BC}$.

2e cas : $BC \neq 1$

Prenons par exemple $BC > 1$ (le cas $BC < 1$ étant analogue) et notons C' le point de $[BC]$ tel que $BC' = 1$ et A' le point de $[BA]$ tel que $\Delta(BA'C')$ est rectangle en A'.



Comme $(AC) \parallel (A'C')$ on a d'après le théorème de Thalès : $\frac{BA}{BA'} = \frac{BC}{BC'} = \frac{AC}{A'C'}$.

Or $\frac{BA}{BA'} = \frac{BC}{BC'} \Leftrightarrow \frac{BA}{BC} = \frac{BA'}{BC'}$ et comme $\cos x = \frac{BA'}{BC'}$ d'après le 1er cas appliqué au triangle $\Delta(BA'C')$, on a bien $\cos x = \frac{BA}{BC}$. On montre de même que $\sin x = \frac{AC}{BC}$.

- **Valeurs remaquables**

Vous avez montré en classe de 4e que $\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, que $\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et que $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Or $f(0) = I(1,0)$ donc $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = J(0,1)$ donc $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. D'où le tableau des valeurs remarquables suivant :

x (rd)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

b) Fonctions tangente et cotangente

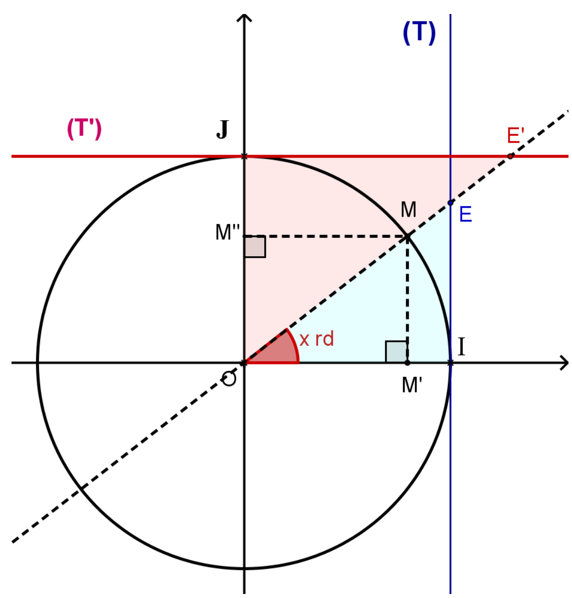
- **Définitions**

  A partir des fonctions trigonométriques principales $\cos x$ et $\sin x$, on définit les fonctions **tangente** (notée ***tan x***) et **cotangente** notée ***cot x***) par :

$$\boxed{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad et \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}}$$

- C.E. pour *tan x*: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, donc $D_{tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- C.E. pour *cot x*: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$, donc $D_{cot} = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z} \}$
- **Interprétation géométrique**

  Soient *(T)* la tangente à $\mathcal{C}$ au point *I* et *(T')* la tangente à $\mathcal{C}$ au point *J*, $E \in (T) \cap (OM)$ et $E' \in (T') \cap (OM)$:



Montrons que : $\boxed{E(1,\tan x) \quad et \quad E'(\cot x,1)}$ dans le cas où $M \in (I)$ (voir figure), les autres cas étant analogues.

Dans $\Delta(OIE)$:

$MM' = \sin x$, $OM' = \cos x$, $OI = 1$ et $(MM') \| (EI)$ donc d'après le théorème de Thalès on a $\frac{OM'}{OI} = \frac{MM'}{EI}$. D'où : $\frac{\cos x}{1} = \frac{\sin x}{EI} \Leftrightarrow \frac{EI}{1} = \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow EI = \tan x$.

Dans $\Delta(OJE')$:

$OM'' = \sin x$, $M''M = \cos x$, $OJ = 1$ et $(MM'') \| (E'J)$ donc d'après le théorème de Thalès on a $\frac{OM''}{OJ} = \frac{M''M}{E'J}$. D'où : $\frac{\sin x}{1} = \frac{\cos x}{E'J} \Leftrightarrow \frac{E'J}{1} = \frac{\cos x}{\sin x} \Leftrightarrow E'J = \cot x$.

Justification <u>géométrique</u> des domaines de tan x et cot x :

Si $x \equiv \frac{\pi}{2}(\pi)$, alors $(OM) \cap (T) = \varnothing$ donc E n'existe pas et si $x \equiv 0(\pi)$, alors $(OM) \cap (T') = \varnothing$ donc E' n'existe pas !

- *<u>Remarques</u>*
  - Pour $\sin x \neq 0$ et $\cos x \neq 0$ on a : $\boxed{\cot x = \frac{1}{\tan x}}$, ce qui explique pourquoi la touche « cot » ne figure pas sur les calculatrices !
  - tableau des valeurs remarquables :

x (rd)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	
$\cot x$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Exercice 4

3) <u>FORMULES</u>

a) Formule fondamentale et ses transformées

- Avec les notations utilisées aux paragraphes précédents, $M(\cos x, \sin x)$ et $M'(\cos x, 0)$, on peut appliquer le théorème de Pythagore au triangle $\Delta(OM'M)$ rectangle en M' :

$OM'^2 + MM'^2 = OM^2 \Leftrightarrow (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1^2 = 1$

- *Simplification des notations :*

  Au lieu d'écrire $(\sin x)^n, (\cos x)^n, (\tan x)^n$, on peut écrire : $\sin^n x, \cos^n x, \tan^n x$.

- Avec ces notations simplifiées la relation fondamentale s'écrit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

- Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ on a :

  - $1 + \tan^2 x = 1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
  - $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \tan^2 x}$
  - $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \dfrac{1}{1 + \tan^2 x} = \dfrac{1 + \tan^2 x - 1}{1 + \tan^2 x} = \dfrac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

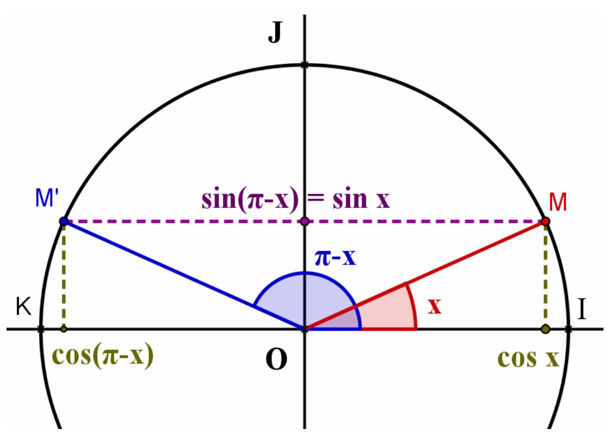
  D' où : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \quad \cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \tan^2 x} \quad \sin^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \quad 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}}$

Exercice 5 - 7

b) $\sin(\pi - x), \cos(\pi - x), \tan(\pi - x)$

- Soient $x \in \mathbb{R}$, $M(\cos x, \sin x)$ et $M'(\cos(\pi - x), \sin(\pi - x))$, alors M et M' sont symétriques par rapport à l'axe *(OJ)* donc ils ont la même ordonnée et des abscisses opposées, en d'autres termes :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(\pi - x) = \sin x \quad \cos(\pi - x) = -\cos x}$$



- Pour tout $x \in D_{\tan}$ on a : $\tan(\pi - x) = \dfrac{\sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)} = \dfrac{\sin x}{-\cos x} = -\tan x$

- Pour tout $x \in D_{cot}$ on a : $cot(\pi - x) = \dfrac{cos(\pi - x)}{sin(\pi - x)} = \dfrac{-cos\,x}{sin\,x} = -cot\,x$

- *Application :* ces formules permettent de **passer du 2^e au 1^{er} quadrant**, p.ex. :

$$sin\frac{2\pi}{3} = sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

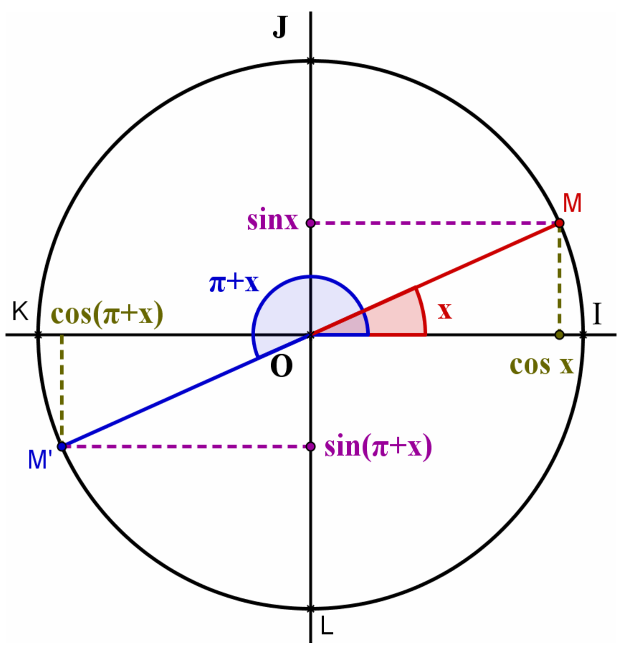
$$cos\frac{3\pi}{4} = cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tan\frac{5\pi}{6} = tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

c) $sin(\pi + x), cos(\pi + x), tan(\pi + x)$

- Soient $x \in \mathbb{R}$, $M(cos\,x, sin\,x)$ et $M'(cos(\pi + x), sin(\pi + x))$, alors M et M' sont symétriques par rapport à l'origine O donc ils ont des ordonnées et des abscisses opposées, en d'autres termes :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad sin(\pi + x) = -sin\,x \quad cos(\pi + x) = -cos\,x}$$



- Pour tout $x \in D_{tan}$ on a : $tan(\pi + x) = \dfrac{sin(\pi + x)}{cos(\pi + x)} = \dfrac{-sin\,x}{-cos\,x} = tan\,x$

- Pour tout $x \in D_{cot}$ on a : $cot(\pi + x) = \dfrac{cos(\pi + x)}{sin(\pi + x)} = \dfrac{-cos\,x}{-sin\,x} = cot\,x$

- Ces deux dernières formules montrent que les fonctions *tan* et *cot* sont périodiques de période π.
- *Application :* ces formules permettent de **passer du 3^e au 1^{er} quadrant**, p.ex. :

$$\sin\frac{4\pi}{3}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

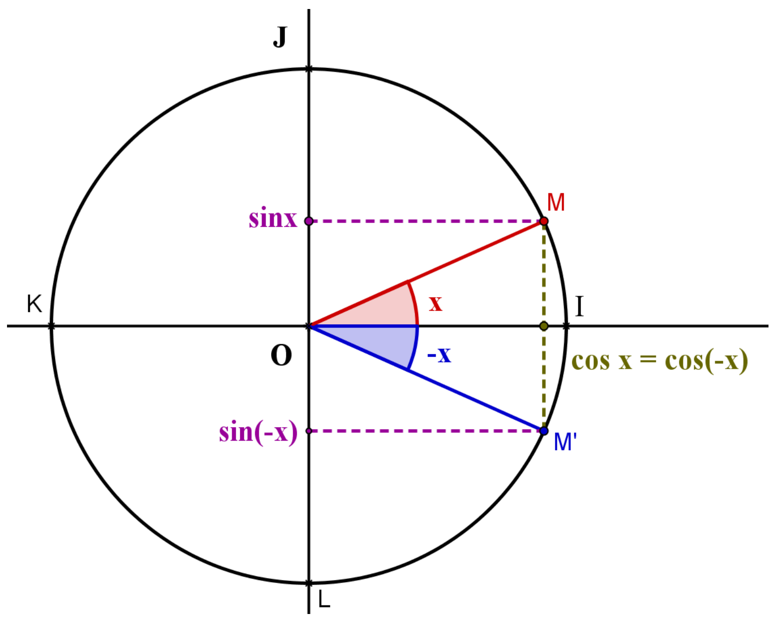
$$\cos\frac{5\pi}{4}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\frac{7\pi}{6}=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

d) $\sin(-x), \cos(-x), \tan(-x)$

- Soient $x\in\mathbb{R}$, $M(\cos x,\sin x)$ et $M'(\cos(-x),\sin(-x))$, alors M et M' sont symétriques par rapport à l'axe *(OI)* donc ils ont la même abscisse et des ordonnées opposées, en d'autres termes :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\quad \sin(-x)=-\sin x\qquad \cos(-x)=\cos x}$$



- Pour tout $x\in D_{tan}$ on a : $\tan(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=\dfrac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$

- Pour tout $x\in D_{cot}$ on a : $\cot(-x)=\dfrac{\cos(-x)}{\sin(-x)}=\dfrac{\cos x}{-\sin x}=-\cot x$

- Ces formules montrent que la fonction ***cos*** est **paire** alors que les fonctions ***sin, tan* et *cot*** sont **impaires**.

- *Application :* ces formules permettent de **passer du 4^e^ au 1^er^ quadrant**, p.ex. :

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \tan-\frac{\pi}{6}=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Exercice 8

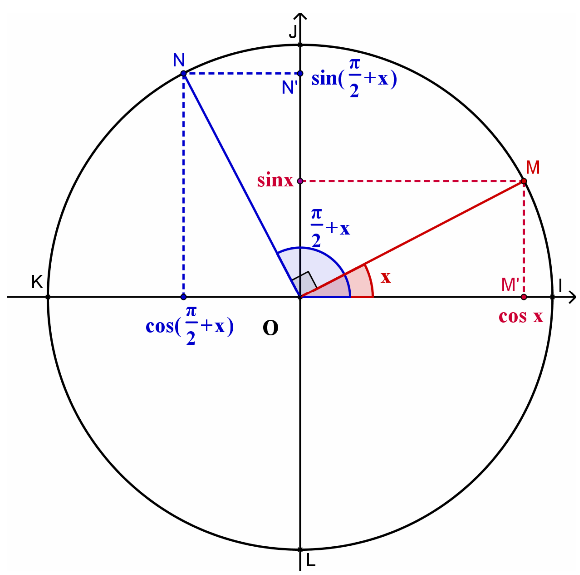
e) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right),\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right),\tan\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right)$

- Soient $x\in\mathbb{R}$, $M\left(\cos x,\sin x\right)$, $M'\left(\cos x,0\right)$, et les images $N\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right),\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)$ et $N'\left(0,\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)$ de M et M' par la rotation de centre O et d'angle $90°$. Comme une rotation conserve les distances, on a :

$$OM'=ON'\Leftrightarrow\left|\cos x\right|=\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right|\text{ et }MM'=NN'\Leftrightarrow\left|\sin x\right|=\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right|.$$

Or on voit que $\cos x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ ont toujours même signe alors que $\sin x$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ ont toujours des signes contraires, d'où :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x}$$



- Pour tout $x\in D_{cot}$ on a : $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\dfrac{\cos x}{-\sin x}=-\cot x$.

- Pour tout $x \in D_{tan}$ on a : $cot\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\frac{cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\frac{-sin\,x}{cos\,x}=-tan\,x$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=sin\left(\frac{\pi}{2}+(-x)\right)=cos(-x)=cos\,x$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=cos\left(\frac{\pi}{2}+(-x)\right)=-sin(-x)=sin\,x$.

- Pour tout $x \in D_{cot}$ on a : $tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=tan\left(\frac{\pi}{2}+(-x)\right)=-cot(-x)=cot\,x$.

- Pour tout $x \in D_{tan}$ on a : $cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=cot\left(\frac{\pi}{2}+(-x)\right)=-tan(-x)=tan\,x$.

- *Application :* ces formules permettent de transformer sinus en cosinus et réciproquement !

Exercice 9

4) Courbes représentatives des fonctions trigonométriques.

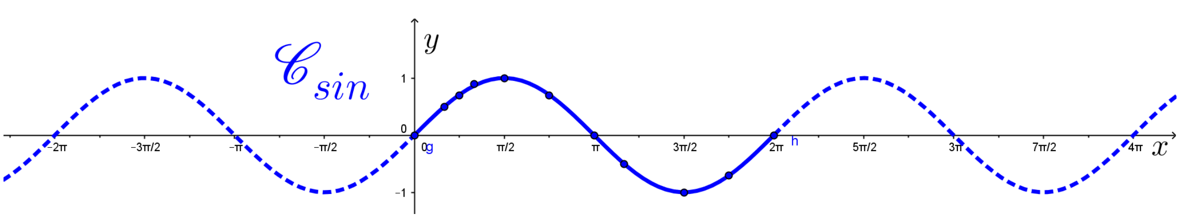
a) Fonction sinus

Soit $f(x)=sin\,x$, alors :

$D_f=\mathbb{R}$; $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f(-x)=sin(-x)=-sin\,x=-f(x)$ donc *f* est impaire et G_{sin} est symétrique par rapport à *O* ; *f* est périodique de période 2π donc la courbe de *sin* sur $[0;2\pi]$ est répétée indéfiniment « vers la gauche » et « vers la droite ».

Calculons quelques points de la courbe de *sin* :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$sin\,x$	0	$0{,}5$	$0{,}7$	$0{,}9$	1	$0{,}7$	0	$-0{,}5$	-1	$-0{,}7$	0

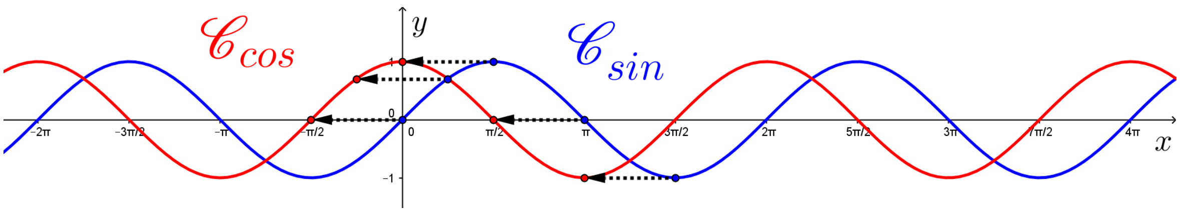


b) Fonction cosinus

Soit $g(x)=cos\,x$, alors :

$D_g=\mathbb{R}$; $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad g(-x)=cos(-x)=cos\,x=g(x)$ donc *g* est paire et G_{cos} est symétrique par rapport à *(Oy)* ; *g* est périodique de période 2π donc la courbe de *cos* sur $[0;2\pi]$ est répétée indéfiniment « vers la gauche » et « vers la droite ».

Autre façon de voir : $g(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ donc on obtient G_{cos} par translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{\pi}{2}\\0\end{pmatrix}$ de G_{sin}.



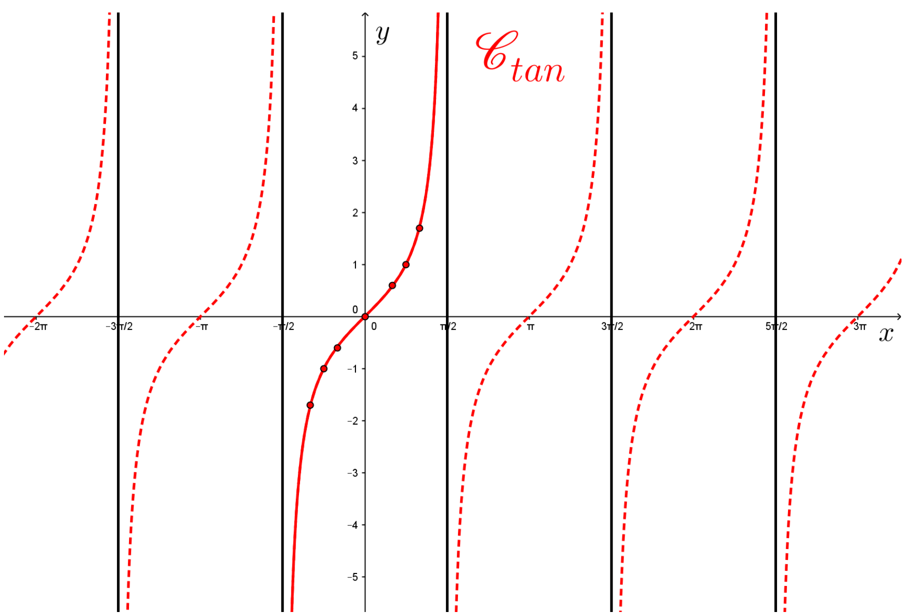
c) Fonction tangente

Soit $h(x)=\tan x$, alors :

$D_{tan}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$ et h est périodique de période π donc il suffit de connaître G_{tan} sur un intervalle de longueur π, par exemple sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

Calculons quelques points de la courbe de *tan* :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$
tan	0	0,6	1	1,7	X	$-0,6$	-1	$-1,7$



Exercice 10 - 11

EXERCICES

1) Convertissez en degrés :

a) $\frac{2\pi}{3}$rd

b) $\frac{7\pi}{6}$rd

c) $\frac{5\pi}{3}$rd

d) $\frac{3\pi}{4}$rd

e) $\frac{13\pi}{12}$rd

f) $\frac{14\pi}{9}$

2) Convertissez en radians :

a) $225°$

b) $315°$

c) $-240°$

d) $210°$

e) $135°$

f) $-300°$

g) $20°$

h) $-40°$

3) Donnez la mesure principale de :

a) $320°$

b) $550°$

c) $4271°$

d) $-80071°$

e) $\frac{97\pi}{2}$

f) $\frac{87\pi}{4}$ rd

g) $-\frac{905\pi}{7}$ rd

4) Résolvez les équations suivantes sur $\left[-\pi,\pi\right]$:

a) $cos\left(\pi+2x\right)=0$

b) $sin\left(3x+\frac{\pi}{5}\right)=0$

c) $tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0$

d) $cos\left(\frac{5x-\pi}{8}\right)=0$

e) $cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)sin\frac{5x}{3}=0$

5) Cet exercice est à faire <u>sans calculatrice</u> !

a) Sachant que $cos\,x=\frac{1}{3}$ *et* $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, calculez $sin\,x$ et $tan\,x$.

b) Sachant que $cos\,x=-0{,}3$ et $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, calculez $sin\,x$ et $tan\,x$.

c) Sachant que $s\,inx=\frac{4}{5}$ et $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, calculez $co\,s\,x$ et $tan\,x$.

d) Sachant que $s\,inx=-0{,}2$ et $x\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$, calculez $co\,s\,x$ et $tan\,x$.

e) Sachant que $tan\,x=-\sqrt{8}$ et $x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$, calculez $co\,s\,x$ et $sin\,x$.

f) Sachant que $tanx=2\sqrt{6}$ et $x\in\left[2\pi,\frac{5\pi}{2}\right]$, calculez $co\,s\,x$ et $sin\,x$.

g) Sachant que $cotx=-4\sqrt{3}$ et $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$, calculez $co\,s\,x$ et $sin\,x$.

6) Vérifiez les identités suivantes :

a) $cos^4\,x-sin^4\,x=cos^2\,x-sin^2\,x$

b) $\left(1+cos\,x\right)\left(1+sin\,x\right)=\frac{1}{2}\left(1+cos\,x+sin\,x\right)^2$

c) $sin\,x\left(1-cot\,anx\right)=cos\,x\left(tan\,x-1\right)$

d) $\left(tan\,x+\frac{1}{cos\,x}\right)^2=\frac{1+sin\,x}{1-sin\,x}$

e) $\sin a(1+\tan a)+\cos a(1+\cot a)=\dfrac{1}{\cos a}+\dfrac{1}{\sin a}$

f) $\tan^2 a+\cot^2 a+2=\dfrac{1}{\sin^2 a\cos^2 a}$

g) $\dfrac{1+\sin a}{\cos a}=\dfrac{\cos a}{1-\sin a}$

h) $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$

7) Simplifiez les expressions suivantes :

a) $\sin^2 x\left(1+\cot an^2 x\right)$

b) $\sin^2 x\left(1+\cot an^2 x\right)-\cos^2 x\left(1+\tan^2 x\right)$

c) $\sin^6 a+\cos^6 a+3\sin^2 a\cdot\cos^2 a-1$

d) $3\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)-2\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)$

e) $\sin^8 a-2\left(1-\sin^2 a\cos^2 a\right)^2+\cos^8 a$

f) $\sin^6 x-2\sin^4 x+\cos^6 x+\sin^2 x-\cos^4 x$

8) Calculez sans calculatrice :

a) $\cos\dfrac{19\pi}{6}$

b) $\tan 120°$

c) $\sin\left(-\dfrac{9\pi}{4}\right)$

d) $\sin\left(-\dfrac{89\pi}{3}\right)$

e) $\cos\left(-\dfrac{53\pi}{6}\right)$

f) $\cot\dfrac{37\pi}{4}$

g) $\sin 330°$

h) $\sin\dfrac{53\pi}{4}$

i) $\tan\dfrac{47\pi}{4}$

j) $\tan\dfrac{8\pi}{3}$

k) $\sin\frac{31\pi}{6}+\cos\frac{78\pi}{2}$

l) $\cos 855°$

m) $\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right)+\cos\frac{17\pi}{3}$

n) $\cos 135°-\sin 210°$

o) $\tan 300°-\cot an 225°$

p) $\frac{\cos(-20°)}{\cos 160°}$

q) $\frac{\sin 100°}{\cos(-10°)}$

r) $\frac{\cos\frac{3\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{10}}$

s) $\frac{\tan\frac{5\pi}{7}}{\cot an\frac{3\pi}{14}}$

9) Simplifiez les expressions suivantes :

a) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(-\alpha)}$

b) $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$

c) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(\pi+\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)\cot(\pi+\alpha)}$

d) $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\pi+\alpha)}{\tan(\alpha-\pi)\cos(-\alpha)}$

e) $\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$

f) $\dfrac{tan\left(\dfrac{5\pi}{4}+\beta\right)}{sin\left(\dfrac{3\pi}{4}-\beta\right)}cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\beta\right)$

g) $\dfrac{sin(90°-a)tan(45°+a)}{cos(360°-a)tan(225°+a)}$

h) $\dfrac{sin(-a)sin(90°+a)cos(-a)}{cos(180°+a)cos(270°-a)}$

i) $\dfrac{sin(180°-a)}{cos(90°-a)}+\dfrac{sin(90°+a)}{sin(270°+a)}$

j) $\dfrac{tan(270°+a)}{tan(180°-a)}-\dfrac{sin(180°-a)}{sin(270°-a)}$

k) $\dfrac{sin(a-\pi)cot\left(\dfrac{3\pi}{2}-a\right)cos(2\pi-a)}{tan(3\pi+a)tan\left(\dfrac{3\pi}{2}+a\right)cos\left(a-\dfrac{\pi}{2}\right)}$

l) $\dfrac{sin(270°-\alpha)cos(\alpha-90°)cot(\alpha-360°)}{tan(540°+\alpha)cot(-\alpha)cos(180°+\alpha)}$

10) Montrez comment on peut obtenir le graphe des fonctions suivantes par transformations successives de graphes de fonctions élémentaires :

a) $f(x)=sin\left(2x+\dfrac{4\pi}{3}\right)$

b) $f(x)=5-sin\left(-\dfrac{x}{2}\right)$

c) $f(x)=3-cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$

d) $f(x)=\left|3-sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|$

11) Analysez la périodicité des fonctions suivantes :

a) $f(x)=sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

b) $f(x)=cos\left(5x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

c) $f(x) = \tan\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

d) $f(x) = \sin 5x + \cos 3x$

e) $f(x) = \dfrac{\cos(2x-1)}{\sin 4x}$

f) $f(x) = \cos\dfrac{x}{4} - \sin\dfrac{x}{6}$

g) $f(x) = 7 - \tan\dfrac{x}{5}$

h) $f(x) = \tan\left(3x + \dfrac{\pi}{5}\right) - \sin\dfrac{3x+4\pi}{6}$