CHAPITRE V

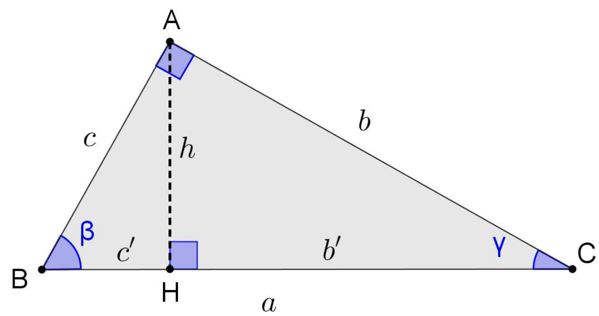
TRIANGLES ET CERCLES

Résumé de cours.

Les exercices qui suivent utilisent les résultats suivants :

Triangles rectangles

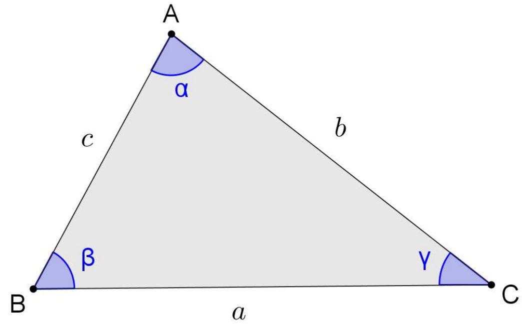
Notations :



- $sin\beta = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{b}{a}$ $\quad cos\beta = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{c}{a}$ $\quad tan\beta = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \dfrac{b}{c}$
- **Théorème 1 (cercle de Thalès)**
  Soit un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[BC]$ et A un point du cercle différent de B et C.
  Alors le triangle $\Delta(ABC)$ est rectangle en A.
- **Théorème 2 (réciproque du cercle de Thalès)**
  Soit un triangle $\Delta(ABC)$ rectangle en A et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit.
  Alors le centre de $\mathcal{C}$ est le milieu de l'hypoténuse $[BC]$.
- **Théorème 3 (Pythagore)**
  Soit un triangle $\Delta(ABC)$ rectangle en A.
  Alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$ $(a^2 = b^2 + c^2)$.
- **Théorème 4 (réciproque de Pythagore)**
  Soit un triangle $\Delta(ABC)$ tel que $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
  Alors le triangle $\Delta(ABC)$ est rectangle en A.
- **Théorème 5 (de la hauteur)**
  Soit un triangle $\Delta(ABC)$ rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A.
  Alors $AH^2 = HB \cdot HC$ $(h^2 = b' \cdot c')$.
- **Théorème 6 (Euclide)**
  Soit un triangle $\Delta(ABC)$ rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A.
  Alors $AB^2 = BH \cdot BC$ et $AC^2 = CH \cdot BC$.

Triangles quelconques

Notations :



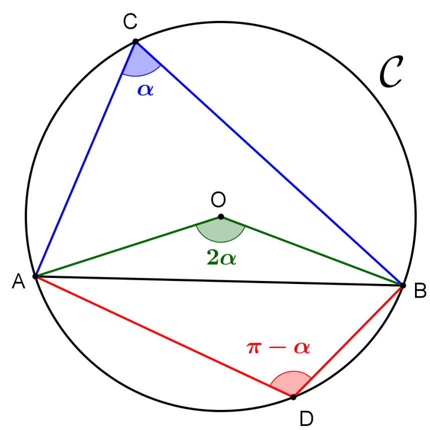
- **Théorème 7 (Thalès)**
  Soit un triangle quelconque $\Delta(ABC)$, $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ tel que $(DE) \parallel (BC)$.
  Alors $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$.
- **Théorème 8 (Pythagore généralisé *ou* Al Kashi *ou* du cosinus)**
  Soit un triangle quelconque $\Delta(ABC)$.
  Alors : $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$
  $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$
  $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$
- **Théorème 9 (des sinus)**
  Soit un triangle quelconque $\Delta(ABC)$ et r le rayon de son <u>cercle circonscrit</u>.
  Alors : $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2 \cdot r$

Cercles et angles

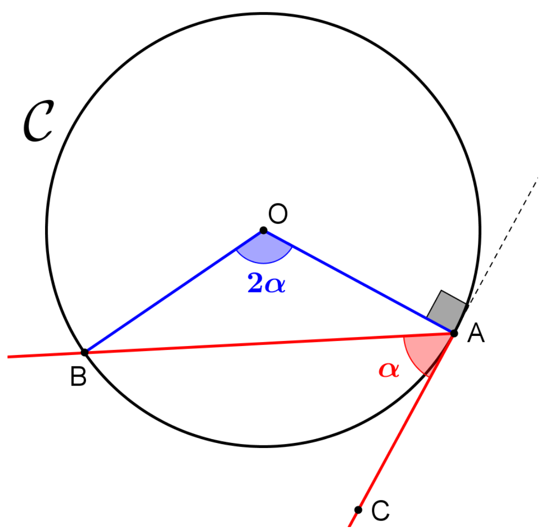
- **Théorème 10 (de l'arc capable *ou* cercle de Thalès généralisé)**
  Soient $\mathcal{C}(O,r)$ un cercle de centre O et de rayon r, A, B, C, D quatre points du cercle tel que $O \notin [AB]$ (c'est-à-dire que la *corde* $[AB]$ n'est pas un *diamètre*), O et C du même côté de $[AB]$ et O et D de part et d'autre de $[AB]$. On note $\widehat{AOB} = 2\alpha$ rd.
  Alors $\widehat{ACB} = \alpha$ rd et $\widehat{BDA} = \pi - \alpha$ rd.

$\widehat{ACB}$ et $\widehat{BDA}$ sont des **angles inscrits** au cercle qui **interceptent** la corde $[AB]$

$\widehat{AOB}$ est un **angle au centre**



- **Théorème 11 (réciproque du théorème de l'arc capable)**
  Soient $\mathcal{C}(O,r)$ un cercle de centre O et de rayon r, A, B deux points du cercle tel que $O \notin [AB]$, C, D deux points du plan tel que O et C du même côté de (AB) avec $\widehat{ACB} = \alpha$ rd et O et D de part et d'autre de (AB) avec $\widehat{BDA} = \pi - \alpha$ rd.
  Alors C et D se trouvent sur le cercle $\mathcal{C}(O,r)$.
- **Théorème 12 (des angles inscrits de même amplitude)**
  Deux angles inscrits à un même cercle et qui ont même amplitude interceptent deux cordes (respectivement deux arcs de cercle) de même longueur.
- **Théorème 13 (des quadrilatères convexes)**
  Soient $\mathcal{C}(O,r)$ un cercle de centre O et de rayon r, A, B, C, D quatre points du cercle tel que $(ABCD)$ soit un quadrilatère convexe.
  Alors la somme de deux angles opposés (intérieurs) du quadrilatère vaut π rd :
  $$\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D} = \pi \text{ rd}$$
- **Théorème 14 (réciproque du théorème 12)**
  Soit $(ABCD)$ un quadrilatère convexe tel que $\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D} = \pi$ rd.
  Alors les quatre points A, B, C, D sont **cocycliques** (c'est-à-dire appartiennent à un même cercle qui est le cercle circonscrit du quadrilatère)
- **Théorème 15 (des angles tangentiels)**
  Soient $\mathcal{C}(O,r)$ un cercle de centre O et de rayon r et $\widehat{BAC}$ un angle <u>aigu</u> tel que $A, B \in \mathcal{C}$, le point C en dehors du cercle et (AC) *tangente* au cercle (on dit que $\widehat{BAC}$ est un **angle tangentiel**).
  Alors $\widehat{BOA} = 2 \cdot \widehat{BAC}$.



EXERCICES

1) Dans un triangle $\Delta(ABC)$ rectangle en A on donne (avec les notations usuelles) deux des neuf éléments a, b, c, b', c', β, γ, h (hauteur issue de A) et $Aire$, calculez les autres :

a) $\beta = 30°$ et $a = 8\,\text{cm}$

b) $a = 13$ m et $b = 12$ m

c) $c = 8$ dm et $c' = 6,4$ dm

d) $Aire = 294\,\text{mm}^2$ et $b = 2,8\,\text{cm}$

e) $h = 2\sqrt{3}\,\text{km}$ et $\gamma = 60°$

f) $h = 6\,\text{m}$ et $a = 15\,\text{m}$

g) $b' = 5\,\text{m}$ et $\gamma = 50°$

h) $Aire = 31,5\,\text{m}^2$ et $\tan\beta = 7$

2) Dans un rectangle $ABCD$ on sait que $AB = 15$ m et $\widehat{CAB} = 20°10'$. Calculez AD et AC

3) Un rectangle a une longueur de 20 m et une largeur de 10 m. Calculez la longueur des diagonales et les angles formés par les deux diagonales.

4) Les diagonales d'un losange mesurent respectivement 15 cm et 20 cm. Calculez l'amplitude des angles et la longueur des côtés du losange.

5) L'ombre d'un arbre mesure 18 m lorsque le soleil est $32°$ au-dessus de l'horizon. Calculez la hauteur de l'arbre**.**

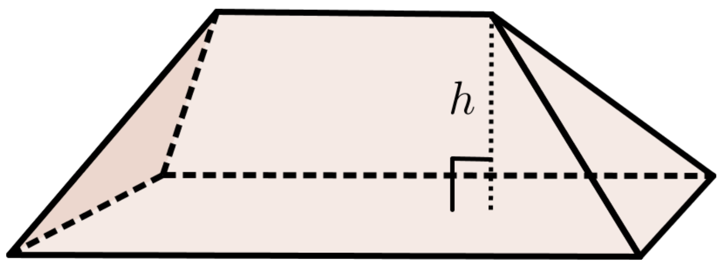
6) Calculez la hauteur d'une tour dont l'ombre s'allonge de 12 m lorsque le soleil passe de $52°$ à $30°$ au-dessus de l'horizon.

7) On a un cercle de centre O et de rayon 5 cm. Une corde $[MP]$ mesure 6 cm. Calculez la distance de O à la corde et l'angle $\widehat{MOP}$.

8) Les côtés parallèles d'un trapèze isocèle mesurent respectivement 8 m et 20 m et la hauteur 7 m. Calculez la longueur des deux autres côtés ainsi que les angles du trapèze.

9) Un touriste, dont les yeux se trouvent à 1,8 m du sol, mesure à l'aide d'un théodolite que le point le plus haut d'un monument se trouve à $52°$ au-dessus de l'horizontale. Il s'éloigne ensuite de 60 m du monument et constate que cet angle a diminué de $21°$. Faites une figure puis calculez la hauteur du monument.

10) Le toit d'une maison est constitué de deux triangles isocèles isométriques et de deux trapèzes également isocèles et isométriques. Les deux bases des trapèzes mesurent respectivement 22 m et 14 m et la base des deux triangles mesure 12 m. La hauteur *h* du toit mesure 3 m. Calculez l'aire totale du toit.



11) Voici un étau dont les deux mâchoires identiques enserrent un tube métallique. On sait que $OB = OC = 30 \text{ cm}$ (figure 1) et que $\widehat{CAB} = 120°$.

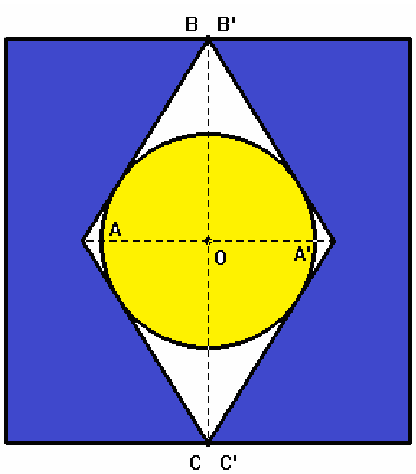


figure 1

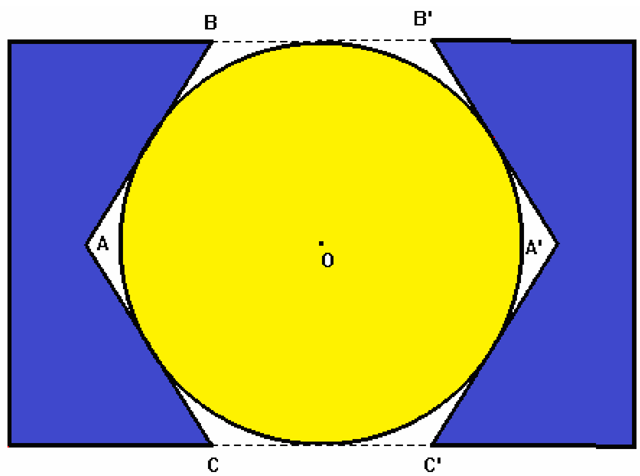


figure 2

a) Calculez le diamètre extérieur minimal d'un tube circulaire qu'on peut serrer avec cet étau, c'est-à-dire le diamètre extérieur du tube qui touche les parois de l'étau lorsque ses deux mâchoires sont en contact (**figure 1**).

b) Quel est l'écartement CC' des mâchoires lorsque l'étau serre un tube de 60 cm de diamètre (**figure 2**) ?

12) Soit un triangle quelconque $\Delta(ABC)$, de côtés *a*, *b*, *c* et d'angles α, β, γ.

a) Montrez que l'aire du triangle est donnée par l'une des trois formules suivantes :

$$Aire = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{ac\sin\beta}{2} = \frac{bc\sin\alpha}{2}$$

b) Connaissant trois des éléments a, b, c, α, β, γ et aire, calculez les quatre autres dans chacun des cas suivants :

i) $a = 12$, $\beta = 30°$ et $\gamma = 45°$

ii) $a = 13{,}5$, $b = 17{,}2$ et $\gamma = 52{,}7°$

iii) $b = 8$ cm, $\alpha = 75°$ et $\beta = 43°$.

iv) $a = 42{,}5$, $b = 35{,}1$ et $c = 29{,}8$

v) $aire = 50$, $b = 17$ et $\alpha = 34°$

vi) $b = 13$ m, $c = 20$ m et $\alpha = 60°$.

vii) $aire = 68$, $a = 9$ et $b = 19$

viii) $aire = 39$ dm^2**,** $a = 12$ dm et $\beta = 30°$

ix) $a = 3{,}1$ cm, $c = 24$ mm et $\gamma = 57°$.

13) Formule d'Héron

Soit $\Delta(ABC)$ un triangle quelconque d'aire S et de demi-périmètre p, c'est-à-dire $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

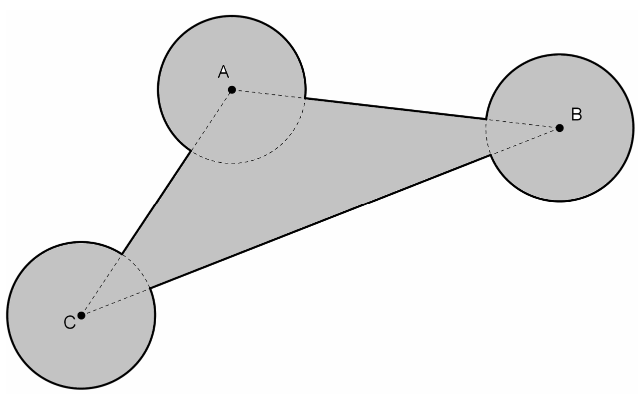
a) Exprimez $\sin\alpha$ en fonction de S, b et c.

b) Exprimez $\cos\alpha$ en fonction de a, b et c.

c) Déduisez-en que $16S^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)$.

d) Déduisez-en la <u>formule d'*Héron*</u> : $\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$.

14) La figure ci-dessous est constituée d'un triangle $\Delta(ABC)$ avec $AB = 10$, $BC = 16$, $AC = 12$ et de trois secteurs angulaires de centres A, B, C et de rayon 1,5.



a) Calculez le périmètre de cette figure.

b) Calculez l'aire de cette figure.

15) **Rayon du cercle inscrit**

Soit $\Delta(ABC)$ un triangle quelconque d'aire S et de demi-périmètre p, c'est-à-dire $p=\dfrac{a+b+c}{2}$. Notons r le rayon de son cercle **inscrit**.

a) Montrez que $S=rp$

b) Déduisez-en que $r=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

16) Soit $ABCD$ un # tel que $AB=8\text{ cm}$, $BC=5\text{ cm}$ et $\widehat{B}=30°$ (figure). Calculez les longueurs des diagonales et les angles de ce #.

17) Soit $ABCD$ un trapèze avec $(AB)\parallel(CD)$, $DC=5\text{ m}$, $BC=10\text{ m}$, $\widehat{B}=60°$, $\widehat{C}=120°$ et $\widehat{D}=150°$ (figure !). Calculez le périmètre (au cm près) et l'aire du trapèze (au cm^2 près).

18) Soit un triangle $\Delta(ABC)$ avec $a=7\text{ cm}$, $b=10\text{ cm}$ et $\alpha=30°$.

a) Construisez ce triangle. Que constatez-vous ?

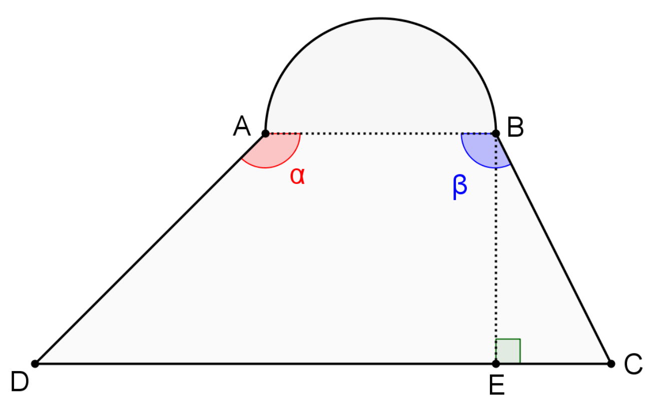
b) Retrouvez le résultat précédent par un calcul.

c) Mêmes questions pour $a=5\text{ cm}$, $b=10\text{ cm}$ et $\alpha=30°$.

d) Mêmes questions pour $a=4\text{ cm}$, $b=10\text{ cm}$ et $\alpha=30°$.

19) Un satellite observe une planète, supposée parfaitement sphérique, sous un angle de $10°$. Après s'être déplacé de 10000 km en ligne droite vers le centre de la planète, il l'observe sous un angle de $11°$ (figure !). Calculez le rayon de cette planète.

20) Sur la figure suivante $(AB)\parallel(CD)$, $AB=BE=30\text{ m}$, $\alpha=145°$ et $\beta=130°$.



Calculez l'aire (au cm^2 près) et le périmètre (au cm près) de cette figure.

21) Soit $ABCD$ un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$ avec $AB=15$, $BC=7$, $CD=10$ et $DA=8$ (figure !). Calculez les angles et l'aire du trapèze.

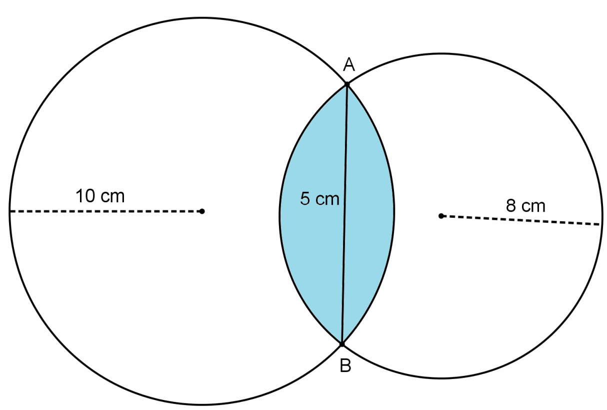
22) Un chasseur C tire sur des canards qui nagent dans un étang circulaire de 40 m de rayon. Il se trouve lui-même à 100 m du centre O de l'étang. Par un point P situé à 300 m du point C sur la demi-droite $[CO)$ passe un chemin droit d qui fait un angle de 40° avec la droite (OC).

a) Figure !

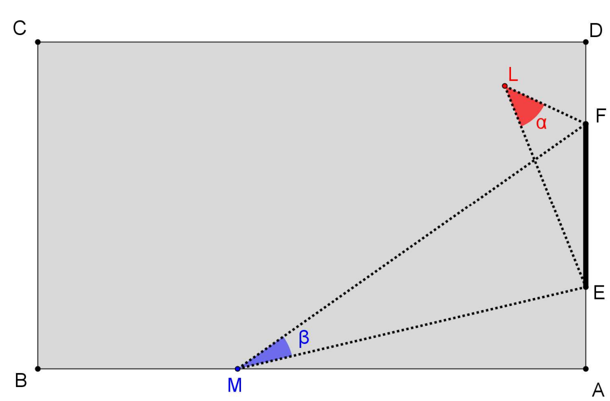
b) On suppose que le chasseur C est un chasseur expérimenté qui, visant uniquement des points de l'étang, est tout à fait sûr de ne pas tirer à côté de celui-ci. Peut-il garder sa position si l'on sait que la distance de sécurité, à laquelle peut passer un promeneur empruntant le chemin d, est de 200 m ?

c) Qu'en est-il si C est un chasseur inexpérimenté qui n'est pas sûr du tout de ne jamais tirer à côté de l'étang ?

23) Calculez l'aire de la surface commune à deux cercles sécants, l'un de rayon 10 cm, l'autre de rayon 8 cm, sachant que la corde commune [AB] mesure 5 cm.



24) Un cinéma de plein air est installé sur un pré rectangulaire $ABCD$ de longueur $AB = 80$ m et de largeur $BC = 29$ m qui est entouré d'une clôture. L'écran $[EF]$ a une largeur de 9 m et se trouve exactement au milieu de $[AD]$.



a) Lucienne est assise à $3{,}5\text{ m}$ du mur où se trouve l'écran et à 4 m de la clôture $[CD]$.

Calculez l'angle $\alpha = \widehat{ELF}$ sous lequel elle voit l'écran.

b) Son ami Max qui n'a pas acheté de billet veut voir le film en se plaçant près de la clôture $[AB]$. En notant $\beta = \widehat{EMF}$, quelles sont les valeurs possibles de β ?

Exprimez β en fonction de $x = MA$ (*indication* : $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$).

c) En vous servant de GeoGebra déterminez x pour que Max ait la meilleure vision possible.

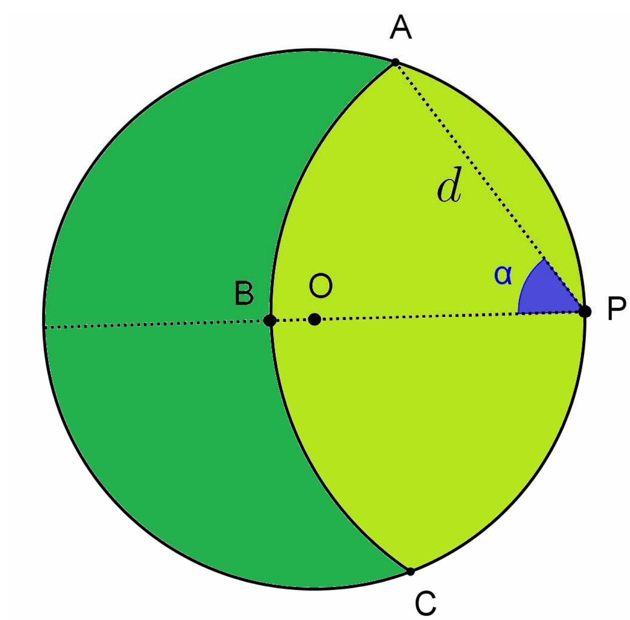
25) Sur la circonférence d'un pré circulaire de rayon 20 m et de centre *O*, le propriétaire a planté un poteau *P* auquel il a attaché sa chèvre avec une longe de longueur *d*. Nous nous proposons de calculer cette longueur *d* sachant qu'elle permet à la chèvre de brouter exactement la moitié du pré.

Sur la figure ci-contre

$OP = OA = OC = 20$ m,

$PA = PB = PC = d$ m

et $\widehat{APO} = \alpha$ rd.



a) Calculez *d* en fonction de α.

b) Calculez l'aire de la surface comprise entre la corde $[AP]$ et le cercle en fonction de α.

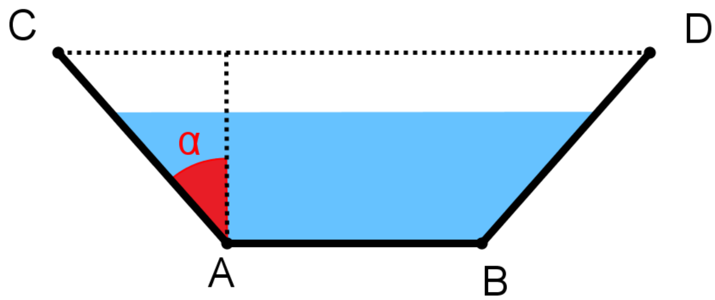
c) Calculez l'aire $f(\alpha)$ de la surface que la chèvre peut atteindre en fonction de α.

d) Déduisez-en une équation de la forme $g(\alpha) = 0$ vérifiée par α.

e) En vous servant de GeoGebra, trouvez une approximation de la solution (positive et aussi petite que possible, à 10^{-4} près) de cette équation.

f) Calculez *d* (au cm près).

26) Un ferblantier veut réaliser une gouttière (de forme parfaitement symétrique) dont voici une coupe transversale :



Sachant que $AB = AC = BD = 15$ cm, comment doit-il choisir l'angle α (au centième de degré près) pour que le volume d'eau que la gouttière *peut* contenir soit maximal ?

27) Soient un rectangle $(ABCD)$ avec $AB = 12$ et $AD = 5$, un disque $\mathcal{D}(A,x)$ avec $x \in \mathbb{R}_+$ et $\mathcal{S} = \mathcal{D} \cap (ABCD)$.

a) Faites une figure et déterminez l'expression de la fonction $f(x)$ qui donne l'aire de la surface $\mathcal{S}$ en fonction du rayon x du cercle.

Indication : il faut distinguer 4 cas pour les valeurs de x selon la forme de $\mathcal{S}$.

b) En vous servant de GeoGebra, trouvez une valeur approchée de x pour que l'aire de la surface $\mathcal{S}$ représente :

- 10 % de l'aire du rectangle.
- 50 % de l'aire du rectangle.
- 98 % de l'aire du rectangle.

28) Soit un triangle $\Delta(ABC)$ tel que $AB = 9$ cm, $BC = 11$ cm et $AC = 7$ cm.

a) Calculez le rayon R du cercle circonscrit de ce triangle au mm près.

b) Soit Ω le centre du cercle inscrit de ce triangle.

i) Construisez le triangle $\Delta(ABC)$ et son cercle inscrit.

ii) Calculez les trois angles du triangle $\Delta(A\Omega B)$.

iii) Calculez ΩA.

iv) Calculez le rayon r du cercle inscrit de ce triangle au mm près.

29) Soient $\mathcal{C}_1$ un cercle de centre O_1 et $\mathcal{C}_2$ un cercle de centre O_2 qui sont sécants en A et en B. En désignant par $C = s_{O_1}(A)$ et $D = s_{O_2}(A)$, montrez que $B \in [CD]$ (schéma !).

30) Soient un triangle quelconque $\Delta(ABC)$, $\mathcal{C}$ le cercle passant par B et C tel que (AC) est tangente à $\mathcal{C}$, $D \in \mathcal{C}$ tel que $(CD) \parallel (AB)$ et $E \in \mathcal{C} \cap (AD)$.

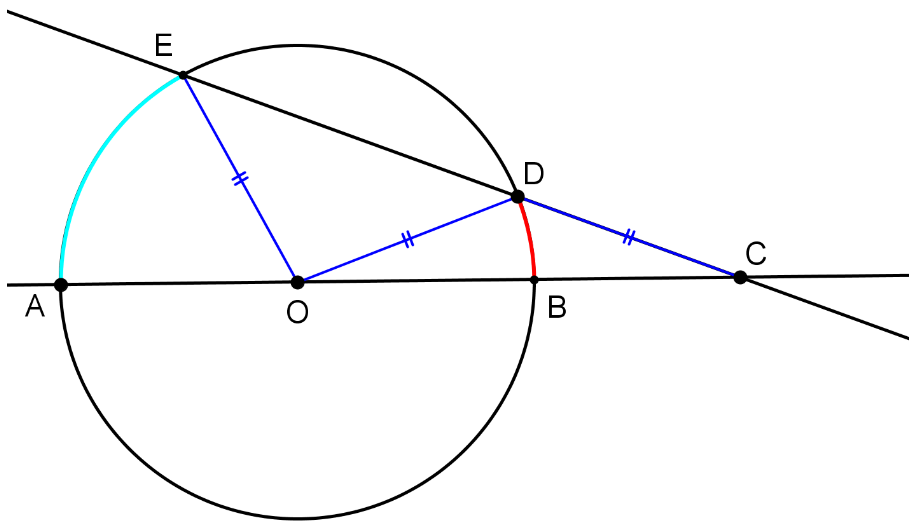
a) Faites un schéma.

b) Le centre O de $\mathcal{C}$ est le point d'intersection de deux droites, lesquelles ?

c) Réalisez une figure exacte (décrivez les étapes de votre construction) en prenant $AB = 9$ cm, $AC = 6$ cm et $BC = 10$ cm.

d) Montrez que $\widehat{BAD} = \widehat{ACE}$. (*Indication : passez par l'angle* $\widehat{CDA}$ *!)*

31) Sur la figure ci-dessous $[AB]$ est un diamètre du cercle de rayon r et $OE = OD = CD = r$:



Comparez les longueurs des deux arcs $\overset{\frown}{BD}$ et $\overset{\frown}{EA}$.

32) Soit $MNPQ$ un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle de centre O avec $MQ = 10$, $QP = 8$, $QN = 16$ et $\widehat{NPM} = 30°$. Faites un schéma puis calculez les angles, les côtés et la deuxième diagonale de ce quadrilatère.

33) Soient $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$ et $\mathcal{C}_2(O_2, r_2)$ deux cercles tangents *extérieurement* en A et t une droite qui est tangente à $\mathcal{C}_1$ en B et à $\mathcal{C}_2$ en C.

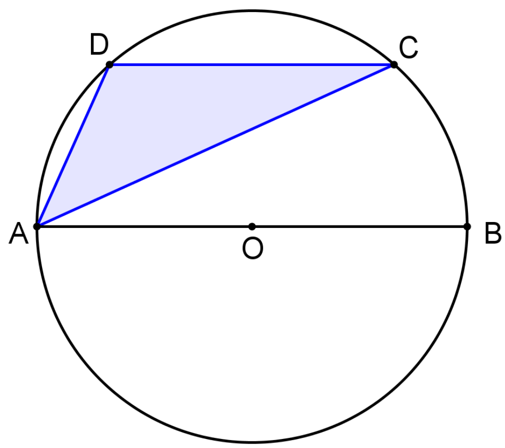
a) Schéma.

b) Montrez que $\Delta(ABC)$ est rectangle en A. (*indications : que peut-on dire des angles* $\widehat{ABC}$ *et* $\widehat{AO_1B}$ *? des angles* $\widehat{BCA}$ *et* $\widehat{CO_2A}$ *?*)

34) Soit $(ABCD)$ un trapèze dont les quatre sommets sont cocycliques. Montrez que ce trapèze est isocèle.

35) Expliquez comment on peut construire un parallélogramme $ABCD$ sachant que $AB = 10$ cm, $AC = 14$ cm et $\widehat{AOB} = 116°$ où $O \in (AC) \cap (BD)$.

36) Sur la figure ci-dessous $(AB) \parallel (CD)$:



Montrez que $\widehat{ADC} - \widehat{DCA} = 90°$

37) Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, $[BC]$ une corde de $\mathcal{C}$ telle que $O \notin [BC]$, A un point de $\mathcal{C}$ différent de B et de C se situant du même côté de (BC) que O et d la bissectrice de $\widehat{BAC}$.

a) Montrez que si A varie sur l'arc de cercle situé entre B et C toutes ces bissectrices passent par un point fixe P à déterminer (figure !).

b) Que se passe-t-il si $[BC]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$?

38) Soient $MNPQ$ un quadrilatère quelconque non croisé, b_1 la bissectrice de $\widehat{NMQ}$, b_2 la bissectrice de $\widehat{PNM}$, b_3 la bissectrice de $\widehat{QPN}$, b_4 la bissectrice de $\widehat{MQP}$, $A \in b_1 \cap b_2$, $B \in b_2 \cap b_3$, $C \in b_3 \cap b_4$, $D \in b_1 \cap b_4$.

a) Faites une figure ou un simple croquis.

b) Montrez que A, B, C et D sont cocycliques.

39) Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, $[AB]$ et $[CD]$ deux cordes perpendiculaires de $\mathcal{C}$, t_A, t_B, t_C et t_D les tangentes à $\mathcal{C}$ respectivement aux points A, B, C et D, $E \in t_A \cap t_C$, $F \in t_C \cap t_B$, $G \in t_B \cap t_D$ et $H \in t_D \cap t_A$.

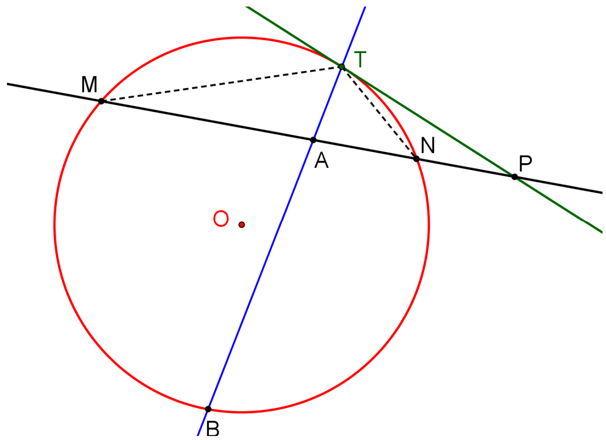
a) A quelles conditions les points E, F, G et H existent-ils ?

b) Montrez que si ces conditions sont remplies les deux cordes ne peuvent pas se couper en A, B, C ou D.

c) Montrez que si ces conditions sont remplies *E*, *F*, *G* et *H* sont cocycliques.

(*indication : distinguer deux cas :* $[AB]\cap[CD]\neq\varnothing$ *et* $[AB]\cap[CD]=\varnothing$)

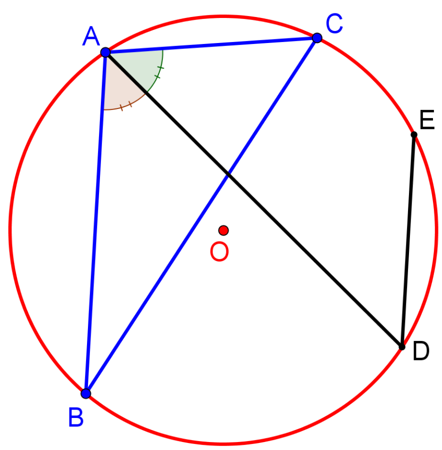
40) Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre *O*, *P* un point quelconque extérieur à $\mathcal{C}$, $T\in\mathcal{C}$ tel que (PT) est tangente à $\mathcal{C}$, une droite issue de *P* qui coupe $\mathcal{C}$ en deux points *M* et *N*, $A\in[MN]$ tel que $PA=PT$ et $B\in(TA)\cap C$:



a) Montrez que $\widehat{BOT}=2\cdot\widehat{PAT}$.

b) Déduisez-en que (TA) est la bissectrice de l'angle $\widehat{MTN}$.

41) Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre *O*, trois points *A*, *B*, *C* sur le cercle, $D\in\mathcal{C}$ tel que (AD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et $E\in\mathcal{C}$ tel que $(AB)\parallel(DE)$. Montrez que $DE=AC$.



Indications :

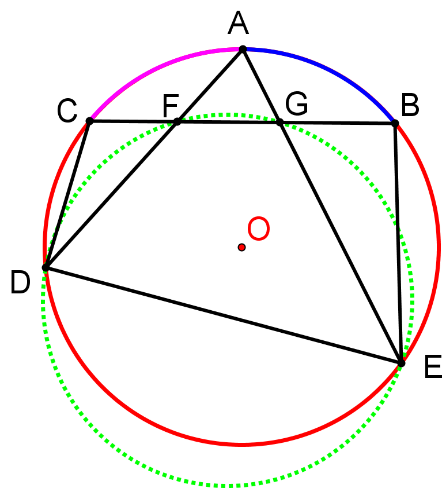
Montrez que $\widehat{CBA}=\widehat{DAE}$ *en distinguant trois cas :* $C=E$, $[AC]$ *et* $[DE]$ *se croisent en un point différent de C et de E et* $[AC]\cap[DE]=\varnothing$ *(figure).*

42) Soit un triangle quelconque $\Delta(ABC)$, $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit, b la bissectrice de $\widehat{BAC}$ et $D \in b \cap \mathcal{C}$ $(D \neq A)$.

a) Faites une figure.

b) Montrez que D appartient à la médiatrice m de $[BC]$.

43) Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, trois points A, B, C de $\mathcal{C}$ tel que A est le milieu de l'arc $\widehat{BC}$, deux points D, E de $\mathcal{C}$ différents des précédents qui se trouvent de l'autre côté de $[BC]$ que A, $F \in [AD] \cap [BC]$ et $G \in [AE] \cap [BC]$.



Montrez que les points D, E, F et G sont cocycliques.

44) Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$, $C \in \mathcal{C}$ tel que $(OC) \perp (OA)$, $D \in \mathcal{C}$ tel que C et D sont de part et d'autre de $[AB]$, $D \neq A$, $D \neq B$, $D \neq s_O(C)$, $E \in [AB] \cap [CD]$, t la tangente au cercle au point D et $F \in t \cap (AB)$.

a) Figure.

b) Montrez que $FD = FE$

45) Soit $ABCD$ un carré de côté 8 cm.

a) Construisez le lieu $\mathbb{L}$ des points du plan à partir desquels on voit ce carré *de l'extérieur* sous un angle de 125°. Justifiez votre construction !

b) Calculez la longueur de $\mathbb{L}$.

c) Quelle est la distance maximale d'un point de $\mathbb{L}$ au carré ?

46) Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon 4 cm. Construisez le lieu $\mathbb{L}$ des points du plan à partir desquels on voit ce cercle *de l'extérieur* sous un angle de 70°. Justifiez votre construction !

47) Un écran de cinéma large de 12 m est représenté par un segment $[AB]$ de longueur 12 cm et de centre C sur une figure. Il est évident que les spectateurs prennent place dans le demi-plan de bord (AB) qui se trouve *devant* l'écran !

a) Anatole veut voir l'écran sous un angle de 120° tout en étant aussi près que possible du centre C de l'écran. Faites une figure exacte sur laquelle vous marquez sa place en justifiant votre construction. A quelle distance de l'écran se trouve sa place ?

b) Philomène veut voir l'écran sous un angle compris entre 90° et 120° mais ne veut pas se trouver à plus de 5 m du centre C de l'écran. Représenter sur la figure le lieu $\mathbb{L}$ des places qui vérifient ces critères.