CHAPITRE VI

SUITES

EXERCICES

1) Donnez une définition générale (explicite ou par récurrence) des suites dont les premiers termes sont :

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$

b) $2, 3, 5, 8, \cdots$

c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots$

d) $0, -1, 4, -9, \cdots$

e) $-7, -6, -4, -1, 3, \cdots$

f) $0, 1, 8, 27, \cdots$

g) $2, 5, 10, 17, \cdots$

h) $-3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \cdots$

2) Soit un triangle $\Delta(CP_1P_2)$ rectangle en P$_1$ tel que $CP_1 = 1$ et $P_1P_2 = 2$. On construit alors une suite de points $P_2, P_3, P_4, \ldots$ tel que $\Delta(CP_2P_3)$ est rectangle en P_2 et $P_2P_3 = 2$, $\Delta(CP_3P_4)$ est rectangle en P_3 et $P_3P_4 = 2$, etc.

a) Construisez une figure exacte avec les cinq premiers triangles.

b) On définit une suite de nombres réels par $u_n = CP_n^{\,2} \quad (n \geq 1)$. Donnez une définition par récurrence et une formule explicite de cette suite.

c) On définit une deuxième suite de nombres réels par $v_n = Aire\Delta\left(CP_nP_{n+1}\right) \quad (n \geq 1)$. Donnez une définition par récurrence et une formule explicite de cette suite.

3) Soit n un entier naturel non nul, on définit les trois suites suivantes :

$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i$ (somme des n premiers nombres entiers naturels)

$T_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2$ (somme des carrés des *n* premiers nombres entiers)

$R_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3$ (somme des cubes des *n* premiers nombres entiers)

Nous allons calculer des formules explicites pour ces trois suites.

a) Ecrivez la formule bien connue $(i+1)^2 = i^2 + 2i + 1$ pour $i = 0, 1, 2, \cdots, n$, puis ajoutez ces *n+1* égalités membres à membres. Déduisez de ceci la formule explicite pour S_n.

b) Faites de même avec la formule $(i+1)^3 = \cdots$. De ceci et de la formule de S_n déduisez la formule explicite pour T_n.

c) Appliquez une méthode analogue pour trouver la formule explicite de R_n.

d) Appliquez ces formules pour calculer la somme des 1000 premiers entiers naturels, puis des carrés et des cubes de ces entiers !

e) Etablissez des formules permettant de calculer la somme des *n* premiers nombres pairs non nuls, ainsi que de leurs carrés et de leurs cubes.

f) Mêmes questions pour les *n* premiers nombres impairs.

g) Calculez les nombres suivants :

$A = 2 + 4 + 6 + \cdots + 5792$.

$B = 32^2 + 34^2 + 36^2 + \cdots + 870^2$.

$C = 72^3 + 74^3 + 76^3 + \cdots + 328^3$.

$D = 265 + 267 + 269 + \cdots + 2861$.

$E = 131^2 + 133^2 + 135^2 + \cdots + 1003^2$.

$F = 57^3 + 59^3 + 61^3 + \cdots + 297^3$.

4) Toutes les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans cet exercice sont des suites arithmétiques de raison *r*.

a) Trouvez la formule explicite et la somme S_n si $u_1 = -13$ et $u_n = u_{n-1} + 3$.

b) Calculez *r* et S_{50} si $u_1 = 5$ *et* $u_{17} = 53$.

c) Calculez *r*, u_1 et S_{20} si $u_9 = 47$ et $u_{41} = -49$.

d) Calculez *r* si $u_1 = \frac{1}{2}$ et $S_{11} = 130$.

e) Calculez *r* et u_1 si $u_7 = -53$ et $S_{20} = -1690$.

f) Calculez *r* et u_1 si $S_5 = 40$ et $S_{17} = 646$.

g) Calculez S_{50} si $u_{12} = 19{,}5$ et $u_{29} = 58{,}6$.

h) Calculez r et u_1 si $S_8 = 262$ et $S_{23} = 149{,}5$.

5) Toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans cet exercice sont des suites géométriques de raison q.

a) Trouvez la formule explicite et la somme S_n si $u_1 = 5$ et $u_n = 2u_{n-1}$.

b) Trouvez la formule explicite et la somme S_n si $u_1 = -8$ et $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1}$.

c) Trouvez q et u_1 si $u_8 = -15\,309 \cdot u_{11} = 413\,343$.

d) Calculez S_{15} si $u_6 = -\frac{3}{625}$ et $u_9 = \frac{3}{78\,125}$.

e) Calculez S_7 si $u_3 = 75$ et $u_6 = -9375$.

f) Calculez q et u_1 si $u_8 = \frac{640}{2\,187}$ et $u_{17} = \frac{327\,680}{43\,046\,721}$.

g) Calculez q et u_1 si $S_{15} = \frac{2\,118\,785\,834}{531\,441}$ et $S_{10} = \frac{1\,979\,054}{2\,187}$ sachant que $q > 0$.

6) Voici les quatre premiers termes de quelques suites. Pour chacune d'elles examinez s'il peut s'agir d'une s.a ou d'une s.g. (il se peut que ce ne soit ni l'une ni l'autre !) :

a) $u_1 = -5{,}7;\quad u_2 = -7{,}1;\quad u_3 = -8{,}5;\quad u_4 = -9{,}9$.

b) $u_1 = 5;\quad u_2 = -\frac{15}{2};\quad u_3 = \frac{45}{4};\quad u_4 = -\frac{130}{8}$.

c) $u_1 = -\frac{3}{2};\quad u_2 = -\frac{5}{6};\quad u_3 = -\frac{1}{6};\quad u_4 = \frac{1}{3}$

d) $u_1 = 1;\quad u_2 = \frac{1}{2};\quad u_3 = \frac{1}{3};\quad u_4 = \frac{1}{4}$.

e) $u_1 = 3;\quad u_2 = -15;\quad u_3 = 75;\quad u_4 = -375$.

f) $u_1 = 73{,}8;\quad u_2 = 177{,}12;\quad u_3 = 425{,}88;\quad u_4 = -1020{,}2112$

7) Calculez les nombres suivants :

$A = 2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 356 + 358$

$B = 7 + 10 + 13 + 16 + \cdots + 226$

$C = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + 10^{-4} + \cdots + 10^{-9}$

8) **Suites arithmético – géométriques.**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = 2\cdot u_n + 3 \quad \text{pour } n \geq 1 \end{cases}$.

a) Ecrivez les 5 premiers termes de cette suite.

b) Formulez une hypothèse pour la formule explicite de u_n puis démontrez-la par récurrence.

c) Etablissez la formule donnant la somme S_n des *n* premiers termes de cette suite.

d) *Généralisation :*

On appelle suite arithmético – géométrique une suite définie par récurrence :

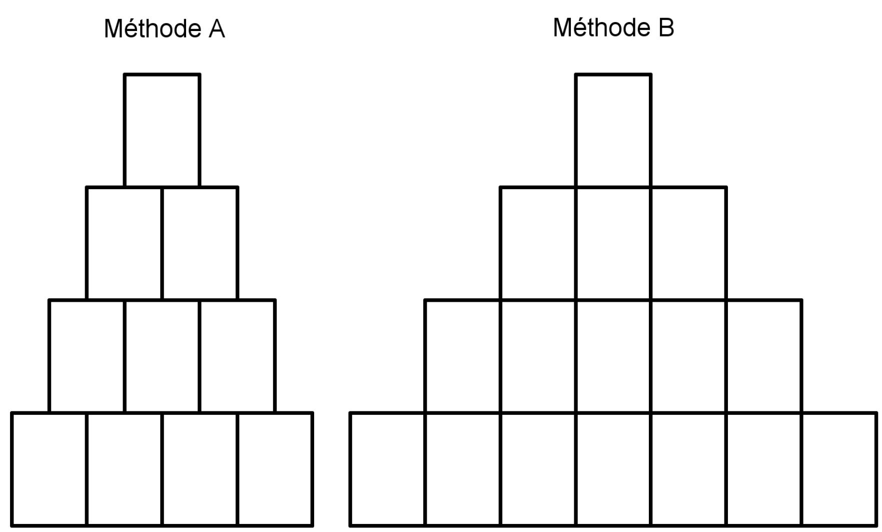
$$u_1 \text{ et } \forall n \geq 1 \quad u_{n+1} = a \cdot u_n + b \text{ où } a, b \in \mathbb{R}.$$

Que peut-on dire d'une telle suite si $a = 1$? si $a = 0$? si $b = 0$?

En supposant que $a \neq 0$, $a \neq 1$ et $b \neq 0$, déterminez des formules donnant u_n et S_n en fonction de *n*.

9) Dans son arbre généalogique chacun a deux ascendants de première génération (le père et la mère), 4 ascendants de deuxième génération (les grands-parents), etc… En comptant 25 ans par génération, calculez le nombre de vos aïeux ayant vécu au temps de Jules César. Discutez ce résultat !

10) Voici deux façons d'empiler des boîtes à conserves :



a) Combien de boîtes y a-t-il sur un tas de 20 rangées avec chacune de ces deux méthodes ?

b) Dans une pile construite selon la méthode A il y a 630 boîtes. Combien comporte-t-elle de rangées ?

c) Gérard a 500 boîtes et il veut construire une pile selon la méthode B qui soit aussi grande que possible (toutes les rangées doivent être complètes !). Combien de boîtes lui restera-t-il ?

11) **Intérêts composés**

Un capital C est placé à un taux annuel de 2 %, ce qui signifie qu'à la fin de la première année la banque paie 2% d'intérêts sur C, à la fin de la deuxième année la banque paie 2% d'intérêts sur le capital placé pendant la deuxième année c'est-à-dire sur C augmenté des intérêts payés à la fin de la première année, etc…(à la fin de chaque année le client ne reçoit pas seulement des intérêts sur son capital de départ C, mais aussi sur les intérêts perçus les années précédentes, d'où le terme : « **intérêts composés** »). On désigne par $C_n \ (n \in \mathbb{N}^*)$ le capital au début de la n^e année du placement ($C_1 = C$) et par $I_n \ (n \in \mathbb{N}^*)$ les intérêts perçus par le client à la fin de la n^e année.

a) Trouvez les formules explicites pour ces deux suites. De quel genre de suites s'agit-il ?

b) Calculez la totalité des intérêts perçus pendant n années de deux façons différentes : une fois à partir de la suite C_n et une fois à partir de la suite I_n.

c) Après combien d'années le capital de départ aura-t-il doublé ?

12) En admettant qu'une voiture perd chaque année 15 % de sa valeur, après combien d'années ne vaut-elle plus que la moitié de sa valeur initiale ? Après combien d'années faut-il vendre une voiture dont le prix d'achat a été de 24 000 € si on ne veut pas la vendre à moins de 10 000 € ?

13) **Différentes sortes de « moyennes »**

Soient a et b deux réels strictement positifs, avec $0 < a \le b$. On appelle

- **moyenne arithmétique** de a et de b le nombre : $\boxed{m = \frac{a+b}{2}}$
- **moyenne géométrique** de a et de b le nombre : $\boxed{g = \sqrt{ab}}$
- **moyenne harmonique** de a et de b le nombre obtenu en prenant l'inverse de la moyenne arithmétique des inverses de a et b : $\boxed{h = \dfrac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}}}$

a) Simplifiez la formule pour obtenir la moyenne harmonique h.

b) Calculez les trois moyennes de 3 et 12, de $\frac{3}{8}$ et $\frac{27}{2}$, de 5 et 5.

c) Montrez que $a \le h \le g \le m \le b$.

d) Montrez que si l'une des 4 inégalités de c) est une égalité, alors les trois autres le sont aussi.

e) Montrez que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une s.a. alors : $\forall n>1 \quad u_n = \dfrac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}$.

f) Montrez que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une s.g. alors : $\forall n>1 \quad u_n = \sqrt{u_{n-1}\cdot u_{n+1}}$.

g) On sait que (voir exercice 11) pour ajouter *a* % à un certain nombre, il faut multiplier celui-ci par le facteur $1+\dfrac{a}{100}$ (p.ex. pour ajouter 2 % on multiplie par $1+\frac{2}{100}=1{,}02$).

Un capital *C* est placé pendant 2 ans, la première année au taux de 2 %, la deuxième année au taux de 4 %. Calculez le « taux moyen. » sur 2 ans. Généralisez en prenant *a* % et *b* %. Que constatez-vous ?

h) Pour aller de A à B un train roule à la vitesse moyenne de 60 km/h et pour le retour il a une vitesse de 100 km/h. Calculez sa vitesse moyenne sur l'aller-retour. Généralisez en prenant deux vitesses *v* et v'. Que constatez-vous ?

14) Trouvez 3 termes consécutifs d'une s.a. dont la somme est 30 et le produit 910.

15) Montrez que si $\dfrac{1}{y-x}, \dfrac{1}{2y}\ et\ \dfrac{1}{y-z}$ sont trois termes consécutifs d'une s.a., alors x, y et z sont trois termes consécutifs d'une s.g..

16) Calculez les nombres *r, s, t* sachant que ce sont trois termes consécutifs d'une s.a., que *s, t, r* sont trois termes consécutifs d'une s.g. et que leur produit vaut 216.

17) Pour chacune des suites suivantes, examinez si elles sont croissantes, décroissantes ou ni l'un ni l'autre :

a) $u_n = n^2 - 7n + 6$

b) $u_n = \dfrac{2}{n+3}$

c) $u_n = (-1)^n n^2$

d) $u_n = -5n^2 + n - 13$

e) $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 3u_n - 7 \end{cases}$

f) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 7 \end{cases}$

18) Etudiez la convergence des suites suivantes (essayez d'abord de « deviner » la limite éventuelle à l'aide d'un tableur, puis justifiez-la en utilisant la définition) :

a) $u_n = \dfrac{2n+1}{n-5}$

b) $u_n = 3n-7$

c) $u_n = 1-2n^2$

d) $u_n = \dfrac{3n^2-1}{n^2-9}$

e) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{5n}$

f) $u_n = \sqrt{5n-3}$

g) $u_n = \dfrac{7-3n}{2n+1}$

19) **Le paradoxe d'Achille et de la tortue**

Au 5^e siècle avant J.-C. le philosophe grec **Zénon d'Elée**, pour défendre la thèse de son maître Parménide de l'existence d'un Être unique, indivisible et immobile, inventa le **raisonnement par l'absurde**. Pour confondre ses adversaires il disait : *si*, comme vous le prétendez, il y avait une pluralité de choses qui seraient en mouvement etc…., *alors* on aurait ceci ou cela…, ce qui est *absurde*, <u>donc</u> la multiplicité et le mouvement dont vous parlez ne sont que des illusions de perspective ! De l'œuvre de Zénon seuls huit arguments nous sont parvenus, cités par son adversaire Aristote (4^e s. av. J.-C.) dans le but de les réfuter. Le plus fameux de arguments, le sixième, qui tente de prouver l'impossibilité de tout mouvement, est connu sous le nom de *paradoxe d'Achille et de la tortue* :

*Si la tortue a de l'avance sur Achille, celui-ci ne pourra jamais la rattraper, quelle que soit sa vitesse ; car, pendant qu'Achille court pour atteindre le point d'où est partie la tortue, celle-ci avance de telle sorte qu'Achille ne pourra jamais annuler cette avanc*e.

Essayez de formuler ce paradoxe à l'aide d'une suite et de trouver une réponse…

20) A partir d'un carré de côté 10 cm on construit une suite infinie de carrés $(q_n)_{n\geq 1}$ en prenant pour sommets de chaque nouveau carré les milieux des quatre côtés du carré précédent.

a) Construisez les quatre premiers carrés de cette suite.

b) Déterminez la suite $(c_n)_{n\geq 1}$ où c_n représente la longueur d'un côté de q_n, puis étudiez sa convergence.

c) Mêmes questions pour la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ des périmètres de ces carrés.

d) Mêmes questions pour la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ des aires de ces carrés.

e) Mêmes questions pour la suite $S_n = \sum_{i=1}^{n} p_i$.

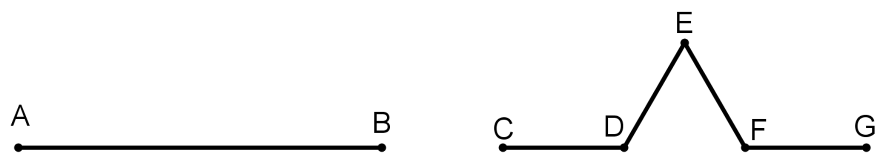
f) Mêmes questions pour la suite $T_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

21) Fractales.

Une « fractale » est une figure géométrique qui a la propriété assez insolite suivante : en prenant une petite partie de cette figure et en l'agrandissant on retrouve la figure de départ et vous pouvez répéter ceci à l'infini…. L'étude systématique de ces « fractales » (et le terme « fractale » lui-même) a été initiée par le mathématicien **Benoît Mandelbrot** (1924 – 2010) dans les années 1970 mais certaines fractales ont été inventées dès les années 1900, comme le fameux « **flocon de neige** » de **Helge von Koch** (1870 – 1924).

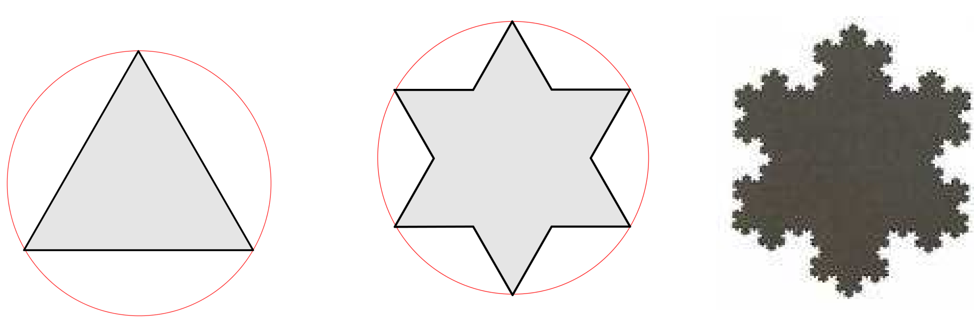
Construction par étapes du flocon de Koch :

- on trace un triangle équilatéral de côté a :
- on transforme chacun des trois côtés du triangle de la manière suivante :



où $AB = a$ et $CD = DE = EF = FG = \frac{a}{3}$ et on obtient :

- chacun des 12 segments de cette nouvelle figure est transformé de la même manière et on continue ainsi *à l'infini* !



On définit alors les quatre suites suivantes :

- k_n est le nombre de segments de la figure à la n^e étape ($k_1 = 3$)
- c_n est la longueur d'un segment de la figure à la n^e étape ($c_1 = a$)
- p_n est le périmètre de la figure à la n^e étape ($p_1 = 3a$)
- a_n est l'aire de la figure à la n^e étape

a) Déterminez les formules explicites des suites $(k_n)_{n\geq 1}$, $(c_n)_{n\geq 1}$ et $(p_n)_{n\geq 1}$, puis étudiez leur convergence.

b) Montrez avec deux méthodes différentes (directement et par récurrence) que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = a_{n-1} + \frac{3\sqrt{3}}{16} a^2 \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

c) Déduisez-en une formule explicite de a_n.

d) Etudiez la convergence de a_n.

e) La courbe de Koch a une propriété inimaginable pour une figure de la géométrie « classique ». Laquelle ?

22) Démontrez par récurrence les propriétés suivantes :

a) Si $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |u_n| \leq 2$.

b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 + n + 2$ est pair.

c) $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^3 - n$ est un multiple de 3.

d) $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad (1+x)^n \geq 1 + nx$

23) Anatole, qui vient de faire un héritage de 500 000 €, a décidé d'abandonner ses études, de ne plus travailler et de vivre désormais de ses rentes. Il place son argent à 4 % et retire au *début* de chaque année 30 000 € pour vivre pendant une année. En désignant par u_n la somme placée pendant la n^e année, calculez la formule explicite de cette suite. Combien d'années pourra-t-il vivre de cette façon ?