Trigonométrie dans un triangle quelconque

Exercice 1

Soit ABC un triangle isocèle de sommet A. On note 2α l'angle au sommet A. Calculer de deux façons différentes l'aire S du triangle ABC et en déduire la formule :

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\,.$$

Exercice 2

Soit ABC un triangle quelconque dans lequel on suppose, pour simplifier, que $\alpha = \hat{A}$ et $\beta = \hat{B}$ sont des angles aigus. Soit $x = CA$, $y = CB$ et soit H le pied de la hauteur issue de C.

(1) Faire une figure soignée.

(2) Calculer l'angle $\hat{C}$ en fonction de α et de β.

(3) Calculer l'aire S du triangle ABC en fonction de x, de y et de l'angle $\hat{C}$.

(4) Calculer la hauteur CH en fonction de x et de α, puis en fonction de y et de β.

(5) Montrer que l'aire du triangle ACH vaut :

$$S_1 = \frac{xy}{2}\cos\alpha\sin\beta$$

(6) Montrer que l'aire du triangle BCH vaut :

$$S_2 = \frac{xy}{2}\sin\alpha\cos\beta$$

(7) En écrivant que $S = S_1 + S_2$, conclure que :

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

(8) Montrer que cette formule reste valable pour des angles quelconques (c.-à-d. non nécessairement aigus).

Exercice 3

Démontrer la formule d'Héron d'Alexandrie, qui donne l'aire d'un triangle en fonction des longueurs a, b et c de ses côtés :

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,,$$

où p est le demi-périmètre du triangle, c.-à-d. $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

Indication : $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2} bc \sin \hat{A}$, calculer $\cos \hat{A}$ à l'aide de la formule d'Al-Kashi, puis utiliser la relation $\sin \hat{A} = \sqrt{1 - \cos^2 \hat{A}}$.