Feuilles d'exercices 1

(1) a) $x^3 - x = 2x^2 - 2$

$\Leftrightarrow x(x^2-1) = 2(x^2-1)$

$\Leftrightarrow (x^2-1)\cdot x - (x^2-1)\cdot 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2-1)\cdot(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow x-1=0$ ou $x+1=0$ ou $x-2=0$

$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$ ou $x=2$

$S = \{1, -1, 2\}$

b) Soit $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ (3^e degré)

Div 4 $= \{\pm 1 ; \pm 2 ; \pm 4\}$

$p(1) = 1 - 3 + 4 \neq 0$

$p(-1) = -1 - 3 + 4 = 0$

$\Rightarrow -1$ est une racine de $p(x)$

$\Rightarrow p(x)$ est divisible par $x+1$

Schéma de Horner :

	1	−3	0	4
−1		−1	+4	−4
	1	−4	4	0

Donc $p(x) = (x+1)(x^2-4x+4)$

$= (x+1)(x-2)^2$

Donc : $p(x) = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 2$

$S = \{-1, 2\}$

(2) a) $\underbrace{(x^3-2)^4}_{d^\circ = 12} \cdot \underbrace{(3x+7)}_{d^\circ = 1}$ est de degré 13

Donc $p(x)$ est de degré 15

b) $q(x) = 16x^6 + 7x^4 - (4x^3-1)^2$

$= 16x^6 + 7x^4 - (16x^6 - 8x^3 + 1)$

$= \cancel{16x^6} + 7x^4 \cancel{-16x^6} + 8x^3 - 1$

$= 7x^4 + 8x^3 - 1$

$q(x)$ est donc de degré 4 !

(Les termes de degré 6 se détruisent !)

(3) a) $(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c)$

$= a^2 + \underline{ab} + \underline{ac} + \underline{ab} + b^2 + \underline{bc}$

$+ \underline{ac} + \underline{bc} + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

b) On remplace dans la formule ci-dessus b par −b :

$(a-b+c)^2 = a^2 + (-b)^2 + c^2 + 2a(-b) + 2(-b)c$
$+ 2ca$

$= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca$

c) On remplace b par −b et c par −c dans la formule a) :

$(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca$

(4) a) $a^4 - b^4 - a^2 + b^2$

$= (a^4 - b^4) - (a^2 - b^2)$ groupement de termes !

$= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)$

$= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - 1)$

$= (a-b)(a+b)(a^2 + b^2 - 1)$

b) $x^4 - y^4 - 8y^2 - 16$

$= x^4 - (y^4 + 8y^2 + 16)$

$= x^4 - (y^2 + 4)^2$

$= [x^2 - (y^2+4)][x^2 + (y^2+4)]$

$= (x^2 - y^2 - 4)(x^2 + y^2 + 4)$

(5) **Loi du reste :**
Le reste de $p(x)$ par $x - \underset{\downarrow \text{ constante}}{a}$ est $p(a)$.

Donc ici :

$p(x) = (3x-4)^4$ et $p(2) = (3\cdot 2-4)^4 = 16$

Donc le reste de $p(x)$ par $x-2$ est 16.

(6) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{pente}_{(AB)} = -\frac{5}{3}$

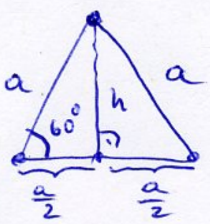
Donc $(AB) \equiv y = -\frac{5}{3}x + k$

Pour trouver l'ordonnée à l'origine k, on remplace les coordonnées d'un point dans l'équation :

$$A(2,3) \in (AB) \Leftrightarrow 3 = -\frac{5}{3}\cdot 2 + k$$
$$\Leftrightarrow 3 = -\frac{10}{3} + k$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{19}{3}$$

Donc : $(AB) \equiv y = -\frac{5}{3}x + \frac{19}{3}$

(7)



Théorème de Pythagore :

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{4} + h^2 = a^2$$
$$\Leftrightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$
$$\Leftrightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4}$$
$$\Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}\,a}{2}$$

<u>ou bien</u> : $\sin 60° = \frac{h}{a}$

$$\Leftrightarrow h = \sin 60° \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a$$

(8)

$$a \cap b \quad \begin{cases} 2x + y - 5 = 0 & (1) \\ 3x + 2y = 1 & (2) \end{cases}$$

D'après (1) : $y = -2x + 5$ (3)

(3) dans (2) : $3x + 2(-2x+5) = 1$

$\Leftrightarrow 3x - 4x + 10 = 1$

$\Leftrightarrow -x + 10 = 1$

$\Leftrightarrow x = 9$ (4)

(4) dans (3) : $y = -2 \cdot 9 + 5 = -13$

Donc $I(9, -13)$ est le point d'intersection des droites a et b.