

## Feuille d'exercices 2

(1) a)  $3x(x+2) = x^2 - 4$

$\Leftrightarrow 3x(x+2) = (x+2)(x-2)$

$\Leftrightarrow 3x(x+2) - (x+2)(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)(3x - x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)(2x+2) = 0$

$\Leftrightarrow x = -2$  ou  $x = -1$

$S = \{-2, -1\}$

b)  $(x^2 + 2)(2x^2 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2 = 0$  ou  $2x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 = -2}_{\text{impossible}}$  ou  $x^2 = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}}$  ou  $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ou  $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$S = \left\{ \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$

c)  $(5x+8)^3 (2x-3)^4 = 0$

$\Leftrightarrow 5x+8=0$  ou  $2x-3=0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{8}{5}$  ou  $x = \frac{3}{2}$

$S = \left\{ -\frac{8}{5}, \frac{3}{2} \right\}$

d)  $2x^2 - 2\sqrt{10}x + 5 = 0$  ( $\Delta = 4 \cdot 10 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 0$ )

$\Leftrightarrow (\sqrt{2}x - \sqrt{5})^2 = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}x = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

$S = \left\{ \frac{\sqrt{10}}{2} \right\}$

e)  $x^3 = 6x + 4$

$\Leftrightarrow \underbrace{x^3 - 6x - 4}_{p(x)} = 0$

$p(x)$

On cherche une racine entière de  $p(x)$

$\text{Div}(-4) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$

$$p(1) = 1 - 6 - 4 \neq 0$$

$$p(-1) = -1 + 6 - 4 \neq 0$$

$$p(2) = 8 - 12 - 4 \neq 0$$

$$p(-2) = -8 + 12 - 4 = 0!$$

Donc  $p(x)$  est divisible par  $x+2$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -6 & -4 \\ -2 & & -2 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}$$

$$p(x) = (x+2)(x^2 - 2x - 2)$$

Ainsi:  $p(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\Delta = 4 + 8 = 12$$

$$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}$$

$$x_2 = 1 + \sqrt{3}$$

$$S = \{-2, 1 \pm \sqrt{3}\}$$

$$f) \quad \frac{2}{x} - \frac{3}{x(x-1)} = \frac{3x+1}{(x-1)^2} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-1)^2}{x(x-1)^2} - \frac{3(x-1)}{x(x-1)^2} = \frac{(3x+1) \cdot x}{x(x-1)^2} \quad (\text{C.E.: } x \neq 0 \text{ et } x-1 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)^2 - 3(x-1) = (3x+1) \cdot x$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 2x + 1) - 3x + 3 = 3x^2 + x$$

$$\Leftrightarrow \underline{2x^2} - \underline{4x} + 2 - \underline{3x} + 3 = \underline{3x^2} + \underline{x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 8x - 5 = 0$$

$$\Delta = 64 + 20 = 84$$

$$x_1 = \frac{-8 - \sqrt{84}}{2} = \frac{-8 - 2\sqrt{21}}{2} = -4 - \sqrt{21} \in D$$

$$x_2 = -4 + \sqrt{21} \in D$$

$$S = \{-4 \pm \sqrt{21}\}$$



$$g) \quad \frac{3}{x-2} + \frac{2-x}{3-x} = \frac{x-5}{x^2-5x+6} \quad (E)$$

$$\text{C.E: } \begin{cases} x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \\ 3-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3 \\ x^2-5x+6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \text{ et } x \neq 3 \end{cases}$$

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$

$$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$$

$(\forall x \in D)$

$$(E) \Leftrightarrow \frac{3}{x-2} + \frac{x-2}{x-3} = \frac{x-5}{(x-2)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-3) + (x-2)^2}{(x-2)(x-3)} = \frac{x-5}{(x-2)(x-3)} \quad \left( \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)} \right)$$

$$\Leftrightarrow 3x-9 + x^2-4x+4 = x-5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \in D \text{ ou } x=2 \notin D$$

$$S = \{0\}$$

$$(2) \quad a) \quad r(x) = \frac{(3x-1)(x+2)}{(3x-1)^2}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1/3\}$$

$$(\forall x \in D) \quad r(x) = \frac{x+2}{3x-1}$$

$$b) \quad r(4) = \frac{4+2}{12-1} = \frac{6}{11}$$

$$r\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-1/2+2}{3 \cdot (-1/2)-1} = \frac{3/2}{-5/2} = -\frac{3}{5}$$

$$r(-2) = \frac{0}{-7} = 0$$

$r(1/3)$  n'existe pas

$$\begin{aligned}
 r(\sqrt{2}+1) &= \frac{\sqrt{2}+1+2}{3(\sqrt{2}+1)-1} \\
 &= \frac{\sqrt{2}+3}{3\sqrt{2}+3-1} \\
 &= \frac{(\sqrt{2}+3)/(3\sqrt{2}-2)}{(3\sqrt{2}+2)(3\sqrt{2}-2)} \\
 &= \frac{\cancel{3 \cdot 2} - 2\sqrt{2} + 9\sqrt{2} - \cancel{6}}{18-4} \\
 &= \frac{7\sqrt{2}}{14} = \frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

(3) a) D'après le th. de Pythagore :

$$AM^2 = x^2 + 2^2$$

$$\text{et } BM^2 = (5-x)^2 + 2^2$$

D'après la réciproque de Pythagore :

$\triangle AMB$  est rectangle en M

$$\Leftrightarrow AM^2 + BM^2 = AB^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4 + (5-x)^2 + 4 = 25$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \cancel{25} - 10x + x^2 + 8 = \cancel{25}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 8 = 0$$

$$\Delta = 36$$

$$x_1 = \frac{10-6}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{10+6}{4} = 4$$

b) Les points sol. sont les points d'intersection du côté  $[CD]$  avec le cercle de diamètre  $[AB]$

