Feuille d'exercices 3

(1) a) C.E : $\begin{cases} 1-2x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq 2x \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} \\ x+7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -7 \end{cases}$

$D = [-7, \frac{1}{2}]$

$(\forall x \in D) \quad \sqrt{1-2x} = x+7 \quad |()^2$

$\Leftrightarrow 1-2x = (x+7)^2$

$\Leftrightarrow 1-2x = x^2+14x+49$

$\Leftrightarrow x^2+16x+48=0$

$\Delta = 64, \quad \underset{\notin D}{x_1 = -12}, \quad \underset{\in D}{x_2 = 4}$

$\boxed{S = \{-4\}}$

b) $(x^2+2)^4 = 81$

$\Leftrightarrow x^2+2 = \sqrt[4]{81} = 3$ ou $x^2+2 = -\sqrt[4]{81} = -3$

$\Leftrightarrow x^2 = 1$ ou $\underbrace{x^2 = -5}_{\text{impossible}}$

$\Leftrightarrow x = \pm 1$

$\boxed{S = \{\pm 1\}}$

c) $x^3 - x^2 - 5x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x-1) - 5(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-5) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x^2 = 5$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = \pm\sqrt{5}$

$\boxed{S = \pm\sqrt{5}}$

d) C.E : $x \neq 0$, $D = \mathbb{R}^*$

$(\forall x \in D) \quad x - \frac{1}{x} = 4 \quad |\cdot x$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 4x$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 0$

$\Delta = 16 + 4 = 20$

$x_1 = \frac{4-\sqrt{20}}{2} = \frac{4-2\sqrt{5}}{2} = 2-\sqrt{5} \in D$

$x_2 = 2+\sqrt{5} \in D$

$\boxed{S = \{2 \pm \sqrt{5}\}}$

e) $16x^8 + 16 = 257x^4$

$\Leftrightarrow 16x^8 - 257x^4 + 16 = 0$

Posons : $y = x^4$

Alors l'éq. devient :

$(16y^2 + 16 = 257y)$

$\Leftrightarrow 16y^2 - 257y + 16 = 0$

$\Delta = 65'025$

$y_1 = \frac{257 - 255}{32} = \frac{1}{16}$

$y_2 = \frac{257 + 255}{32} = 16$

Revenons à x :

$x^4 = \frac{1}{16}$ ou $x^4 = 16$

$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{16}}$ ou $x = \pm \sqrt[4]{16}$

$\Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2}$ ou $x = \pm 2$

$\boxed{S = \{\pm \frac{1}{2}, \pm 2\}}$

f) $\underbrace{6x^3 + 13x^2 + x - 2}_{p(x)} = 0$

$p(1) \neq 0$, $p(-1) \neq 0$, $p(2) \neq 0$

mais $p(-2) = 0$

Donc $p(x)$ est divisible par $x+2$:

	6	13	1	−2
−2		−12	−2	2
	6	1	−1	0

$\Rightarrow p(x) = (x+2) \cdot (6x^2 + x - 1)$

Ainsi : $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ou $6x^2 + x - 1 = 0$

$\Delta = 25$

$x_1 = -\frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{1}{3}$

Donc $\boxed{S = \{-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}}$

(2) a) $\frac{3}{\sqrt{2}-1} - \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+2}$

$= \frac{3(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} - \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-2)}{(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-2)}$

$= \frac{3\sqrt{2}+3}{1} - \frac{\cancel{2} - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} \cancel{- 2}}{2-4}$

$= 3\sqrt{2}+3 + \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{= \frac{5\sqrt{2}}{2} + 3}$

b) $\sqrt{125} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-4}$

$= 5\sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{3\sqrt{5}(2\sqrt{5}+4)}{(2\sqrt{5}-4)(2\sqrt{5}+4)}$

$= 5\sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{30+12\sqrt{5}}{4}$

$= \frac{100\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 60\sqrt{5}}{20} + \frac{30}{4}$

$= \frac{156\sqrt{5}}{20} + \frac{15}{2}$

$\left(= \frac{78\sqrt{5}}{10} + \frac{15}{2}\right)$

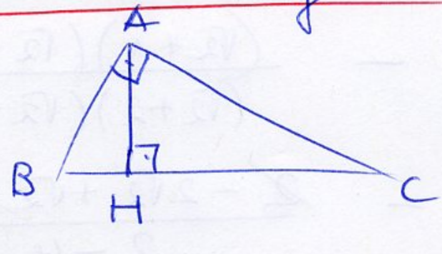
$\boxed{= \frac{39\sqrt{5}}{5} + \frac{15}{2}}$

(3) L'éq. $x^2 + mx + 4 = 0$ admet exactement 1 solution ssi $\Delta = m^2 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow (m-4)(m+4) = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{m = 4}$ ou $\boxed{m = -4}$

(4) Rappel : relations métriques dans un Δ rectangle !!



ΔABC rectangle en A
H = pied de la hauteur issue de A

- $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (Pythagore !)
- $\begin{cases} BA^2 = BH \cdot BC \\ CA^2 = CH \cdot CB \end{cases}$ (th. des projections)
- Th. de la hauteur :
  $HA^2 = HB \cdot HC$
- Relation d'Euclide :
  $AH = \frac{AB \cdot AC}{BC}$ (ou $AB \cdot AC = AH \cdot BC$)

Ici : • $BA^2 = BH \cdot BC$

$\Leftrightarrow 6^2 = x \cdot (x+5)$

$\Leftrightarrow 36 = x^2 + 5x$

$\Leftrightarrow x^2 + 5x - 36 = 0$

$\Leftrightarrow x = 4$ ou $x = -9$ impossible ($x > 0$, longueur !!)

Donc : $\boxed{x = 4 = BH}$.

- $AH^2 = x \cdot 5$
  $\Leftrightarrow AH^2 = 4 \cdot 5 = 20$
  $\Leftrightarrow AH = \sqrt{20} = \boxed{2\sqrt{5}}$
- $AC^2 = 5 \cdot (5 + x)$
  $\Leftrightarrow AC^2 = 5 \cdot 9 = 45$
  $\Leftrightarrow AC = \boxed{3\sqrt{5}}$