Feuille d'exercices 4

(1) $p(x) = x^2 - mx + m + 3$

a) $p(4) = 0 \iff 4^2 - 4m + m + 3 = 0$

$\iff 16 - 3m + 3 = 0$

$\iff 19 - 3m = 0$

$\iff m = \frac{19}{3}$

b) $p(x)$ admet au moins une racine

$\iff \Delta = m^2 - 4(m+3) \geq 0$

$\iff m^2 - 4m - 12 \geq 0$

$\iff (m+2)(m-6) \geq 0$

$\delta = 16 + 48 = 64$

$m_1 = \frac{4-8}{2} = -2$

$m_2 = \frac{4+8}{2} = 6$

m	$-\infty$		-2		6		$+\infty$
Δ		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\iff m \in]-\infty; -2] \cup [6, +\infty[$

c) Les racines de $p(x)$ sont ($\underline{\text{si } \Delta \geq 0}$):

$$x_1 = \frac{m - \sqrt{(m+2)(m-6)}}{2}$$

$$x_2 = \frac{m + \sqrt{(m+2)(m-6)}}{2}$$

Il est clair que $x_2 \geq x_1$. Donc

$p(x)$ admet au moins une racine ≥ 6

$$\iff \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ \frac{m + \sqrt{(m+2)(m-6)}}{2} \geq 6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} m \in]-\infty; -2] \cup [6, +\infty[& (1) \\ \underbrace{\sqrt{(m+2)(m-6)}}_{+} \geq \underbrace{12 - m}_{\text{signe ?}} & (2) \end{cases}$$

Résolvons ② :

1er cas : $\boxed{12 - m \leq 0} \Leftrightarrow \boxed{m \geq 12}$

Alors ② est trivialement vérifiée car le membre de gauche est ≥ 0 alors que le membre de droite est ≤ 0.

Donc $S_1 = [12, +\infty[$ (ens. de sol. pour m)

2e cas : $\boxed{12 - m \geq 0} \Leftrightarrow \boxed{m \leq 12}$

Alors : $\underbrace{\sqrt{(m+2)(m-6)}}_{+} \geq \underbrace{12 - m}_{+} \quad |(\ )^2$

$\Leftrightarrow (m+2)(m-6) \geq (12-m)^2$

$\Leftrightarrow \cancel{m^2} - 4m - 12 \geq \cancel{m^2} - 24m + 144$

$\Leftrightarrow 20m \geq 156$

$\Leftrightarrow m \geq \frac{156}{20} = \frac{39}{5} = 6{,}6$

Donc $S_2 = \left[\frac{39}{5} ; 12\right]$

En résumé, $p(x)$ admet au moins une racine ≥ 6 ssi $m \in S = \left[\frac{39}{5} ; +\infty\right[$

d) $p(x)$ admet au moins une racine < 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in]-\infty ; -2] \cup [6, +\infty[\quad (\Leftrightarrow \Delta \geq 0) & ① \\ \dfrac{m - \sqrt{(m+2)(m-6)}}{2} < 1 & ② \end{cases}$$

② $\Leftrightarrow -\sqrt{(m+2)(m-6)} < 2 - m \quad | \cdot (-1)$

$\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{(m+2)(m-6)}}_{+} > \underbrace{m-2}_{\text{signe ?}}$ ③

1^{er} cas : $\boxed{m-2 \leq 0} \Leftrightarrow \boxed{m \leq 2}$

Alors ③ est trivialement vraie et donc $S_1 =]-\infty ; -2]$, compte tenu de la condition d'existence ①

2^e cas : $\boxed{m-2>0} \Leftrightarrow \boxed{m>2}$

Alors ③ $\Leftrightarrow (m+2)(m-6) > (m-2)^2$

$\Leftrightarrow \cancel{m^2} \cancel{-4m} - 12 > \cancel{m^2} \cancel{-4m} + 4$

$\Leftrightarrow -12 > 4$ FAUX !

Donc $S_2 = \emptyset$

Finalement, $p(x)$ admet au moins une racine < 1 ssi $m \in S = S_1 =]-\infty ; -2]$

2) Soit v la vitesse et t le temps nécessaire pour parcourir la distance de 600 km.

$$\begin{cases} (v+16) \cdot (t - \frac{5}{4}) = 600 & ① \\ vt = 600 & ② \end{cases}$$

② → (1) $\Leftrightarrow \cancel{vt} - \frac{5}{4} v + 16 t - 20 = \cancel{600}$

$\Leftrightarrow -\frac{5}{4} v + 16 t - 20 = 0$ ③

② $\Leftrightarrow v = \frac{600}{t}$ (4)

④ dans ③ : $-\frac{750}{t} + 16t - 20 = 0 \quad | \cdot t$

$\Leftrightarrow -750 + 16t^2 - 20t = 0$

Casio → $t = 7{,}5$ ou $\underbrace{t = -\frac{25}{4}}_{\text{imp. car } t>0}$

Donc : $t = 7$h 30 min et $v = 80$ km/h

3) Soit x le nombre de gagnants prévus et y la somme pour chacun d'eux

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot y = 20400 & (1) \\ (x-2)(y+850) = 20400 & (2) \end{cases}$$

(2) $(x-2)(y+850) = 20400$

$\Leftrightarrow xy + 850x - 2y - 1700 = 20400$

$\Leftrightarrow 850x - 2y - 1700 = 0$

$\Leftrightarrow 425x - y - 850 = 0$ (3)

(1) $x \cdot y = 20400$

$\Leftrightarrow x = \frac{20400}{y}$ (4)

(4) $\rightarrow$ (3) $425 \cdot \frac{20400}{y} - y - 850 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{8670000}{y} - y - 950 = 0$

$\Leftrightarrow 8670000 - y^2 - 850y = 0$

$\Leftrightarrow y^2 + 850y - 8670000 = 0$

Casio $\rightarrow$ $y_1 = 2550$

$y_2 = -3400$ à exclure car une somme d'argent est ≥ 0

Donc $y = 2550$

$x = 8$

Donc il y avait initialement 8 gagnants et chacun d'eux devait recevoir la somme de 2 550 €

(4) Définition :

débit (d'un robinet) $\boxed{d = \frac{q}{t}}$

$= \dfrac{\text{quantité d'eau écoulée (en l ou en m}^3\text{ p.ex)}}{\text{temps (en min ou en h p.ex)}}$

Notons d_1 et d_2 les débits des robinets
t_1 et t_2 les temps qu'ils mettent pour remplir le bassin seul.

et q = quantité d'eau du réservoir

On a le système :

$$\begin{cases} t_1 = t_2 - 3 & (1) \\ q = d_1 t_1 = d_2 t_2 & (2) \\ q = (d_1 + d_2) \cdot \frac{20}{3} & (3) \end{cases}$$

(On a en fait 5 inconnues et seulement 4 équations, donc on ne pourra pas trouver toutes les inconnues ! Mais on arrive à trouver les temps ☺)

Idée : éliminer q !

Ecrire une équation avec les temps (autre que (1))

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{q}{d_1} \Leftrightarrow \frac{1}{t_1} = \frac{d_1}{q} & (4) \\ t_2 = \frac{q}{d_2} \Leftrightarrow \frac{1}{t_2} = \frac{d_2}{q} & (5) \end{cases}$$

$$③ \Leftrightarrow \frac{20}{3} = \frac{9}{d_1+d_2} \Leftrightarrow \frac{3}{20} = \frac{d_1+d_2}{9} \quad ⑥$$

Or, en ajoutant membre par membre ④ et ⑤, on trouve ⑥ !!!

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{d_1}{9} + \frac{d_2}{9} = \frac{3}{20}$$

D'où le nouveau système d'éq. avec t_1 et t_2 :

$$\begin{cases} t_1 = t_2 - 3 & ① \\ \dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_2} = \dfrac{3}{20} & ② \end{cases}$$

$$① \to ② : \quad \frac{1}{t_2-3} + \frac{1}{t_2} = \frac{3}{20}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t_2 + t_2 - 3}{t_2(t_2-3)} = \frac{3}{20}$$

$$\Leftrightarrow 20(2t_2-3) = 3t_2(t_2-3)$$

$$\Leftrightarrow 3t_2^2 - 49t_2 + 60 = 0$$

Casio $\to$ $t_2 = 15$ ou $t_2 = \frac{4}{3}$

Donc $t_1 = 12$ ou $t_1 = \underbrace{\frac{4}{3} - 3 < 0}_{\text{impossible!}}$

Finalement : $\begin{cases} t_1 = 12\text{ h} \\ t_2 = 15\text{ h} \end{cases}$

(5) Soit r la raison de la suite arithmétique (a, b, c) et soit q la raison de la suite géométrique (b, c, a)

Donc $\boxed{a = b - r}$ (1) et $\boxed{c = b + r}$ (2)

D'autre part : $\boxed{c = bq}$ (3) et $\boxed{a = bq^2}$ (4)

(1) et (2) $\longrightarrow$ $a + b + c = 18$

$\Leftrightarrow b \cancel{- r} + b + b \cancel{+ r} = 18$

$\Leftrightarrow 3b = 18$

$\Leftrightarrow \boxed{b = 6}$ ☺ (5)

(3), (4) et (5) $\longrightarrow$ $a + b + c = 18$

$\Leftrightarrow bq^2 + b + bq = 18$

$\Leftrightarrow 6q^2 + 6 + 6q = 18 \quad | :6$

$\Leftrightarrow q^2 + q + 1 = 3$

$\Leftrightarrow q^2 + q - 2 = 0$

Carnb $\rightarrow$ $q = 1$ ou $q = -2$

Or, si $q = 1$ alors $a = b = c$ (c-à-d la suite est constante), à exclure d'après l'énoncé.

Donc $\boxed{q = -2}$!!

On obtient : $c = 6 \cdot (-2) = -12$ (3)

et $a = 6 \cdot (-2)^2 = 24$

D'où : $a = 24 \underbrace{, \quad b =}_{r = -18} 6 \underbrace{, \quad c =}_{-18} -12$