Exercices sur les fonctions

Exercice 1

Déterminer si possible les ***images*** et les ***antécédents*** des réels -1, 0, 2, $\frac{3}{5}$ et $\sqrt{2}$ par la fonction f dans les cas suivants :

(1) $f\left(x\right)=\dfrac{3-x}{2}$

(2) $f\left(x\right)=\dfrac{x+1}{x-2}$

(3) $f\left(x\right)=x^2-5x+1$

(4) $f\left(x\right)=\dfrac{2}{x^2}-1$

(5) $f\left(x\right)=x+\dfrac{1}{x}$

Exercice 2

Déterminer le domaine de la fonction f dans les cas suivants :

(1) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{3}{x^2-1}$

(2) $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{3x}}{x-2}+\dfrac{x-1}{x+3}$

(3) $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{5x+4}}{\sqrt{2x+8}}$

(4) $f\left(x\right)=\sqrt{\dfrac{5x+4}{2x+8}}$

(5) $f\left(x\right)=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{2x+1}}$

(6) $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{2x+1}}$

(7) $f : x\mapsto\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{-2x+7}}$

(8) $f\left(x\right)=\dfrac{3}{\sqrt{x+2}}-\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$

(9) $f\left(x\right)=\sqrt{x^3-8x}+\dfrac{3}{x-2}$

(10) $f\left(x\right)=\sqrt{x}+2\sqrt{x-4}-\sqrt{5-2x}$

(11) $f : x\mapsto\dfrac{\sqrt{5x+12}}{2x+39-5x^2}$

(12) $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^3+x^2-2x-2}$

Exercice 3

Déterminer le domaine et la parité de la fonction f dans les cas suivants :

(1) $f\left(x\right)=7x^4-3x^2-4$

(2) $f\left(x\right)=x^3+5x-\dfrac{1}{x}$

(3) $f\left(x\right)=x\sqrt{x}$

(4) $f\left(x\right)=\dfrac{8x}{x^2-5}$

(5) $f\left(x\right)=3x+4$

(6) $f\left(x\right)=\sqrt{x^2-1}$

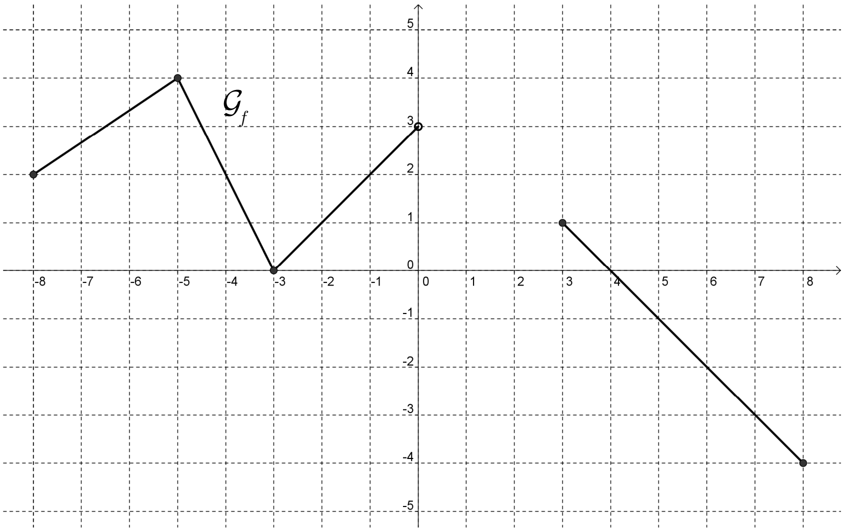
(7) $f\left(x\right)=\sqrt{x^3-6x}$

(8) $f\left(x\right)=\dfrac{3x^2+7}{1-x^2}$

(9) $f\left(x\right)=x-\dfrac{1}{x^2}$

Exercice 4

Voici le graphe complet d'une fonction f :



(1) Quel est le domaine de f ?

(2) Déterminer les images de -3, de 3 et de 7 par f.

(3) Déterminer les antécédents de 2 par f.

(4) Déterminer tous les réels qui ont au moins un antécédent par f.

(5) Quelles sont les racines de f ?

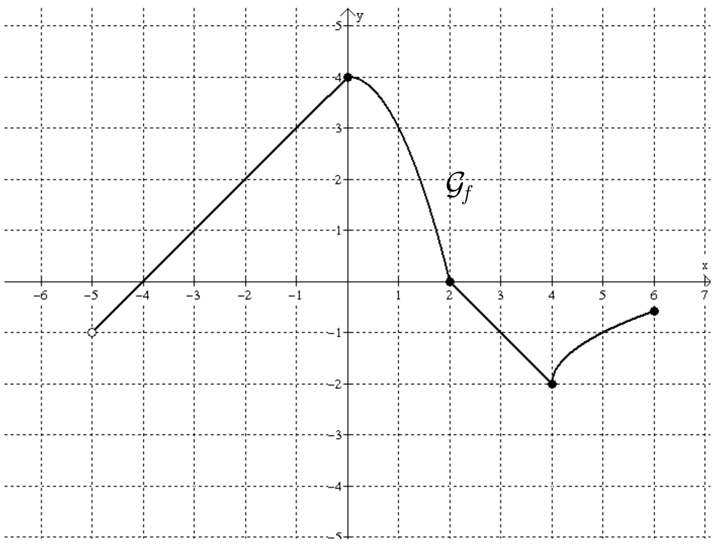
(6) Déterminer tous les réels dont l'image est > 2 :

(7) Résoudre graphiquement l'inéquation $f\left(x\right) \leq -1$:

(8) Quel est le sens de variation de f sur $\left[4,7\right]$? sur $\left[-6,-3\right]$?

Exercice 5

Voici le graphe complet d'une fonction f :



(1) Quel est le domaine de définition de f ?

(2) Quel sont les images de 2, de 3, de 0 et de -2 par f ?

(3) Quels sont les antécédents de 3 par f ?

(4) Quelles sont les racines de f ?

(5) Quel est le sens de variation de f sur [0,4] ?

(6) Dresser le tableau de variations de f.

(7) Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :

a) $f(x) > 0$ b) $f(x) \leq 3$ c) $f(x) = -2$ d) $f(x) \geq -1$

Exercice 6

Etudier le sens de variation des fonctions suivantes :

(1) $f\left(x\right) = 2x + 5$

(2) $f\left(x\right) = 3 - x$

(3) $f\left(x\right) = 1 + 7\sqrt{x}$

(4) $f\left(x\right) = 6 - 2\sqrt{x+1}$

(5) $f\left(x\right) = \dfrac{3}{\sqrt{4-x}}$

(6) $f\left(x\right) = \dfrac{1}{1+x^2}$ (sur $\mathbb{R}_+$, puis sur $\mathbb{R}_-$)

(7) $f\left(x\right) = 2 - \dfrac{3}{x}$ (sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}_-^*$)

(8) $f\left(x\right) = 1 + \dfrac{2}{7x^2}$ (sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}_-^*$)

(9) $f\left(x\right) = \dfrac{4}{x+2}$ (sur $\left]-2,+\infty\right[$, puis sur $\left]-\infty,-2\right[$)

Exercice 7

Une étude dans une entreprise a montré que la quantité vendue q et le prix de vente unitaire x, exprimé en euros, sont liés par la relation : $q = 800 - 5x$, pour x variant de 0 à 120.

(1) Exprimer $R\left(x\right)$, le montant des recettes en euros, en fonction de x.

(2) Étudier les variations de la fonction R et en déduire la valeur de x pour laquelle l'entreprise perçoit la recette maximale.

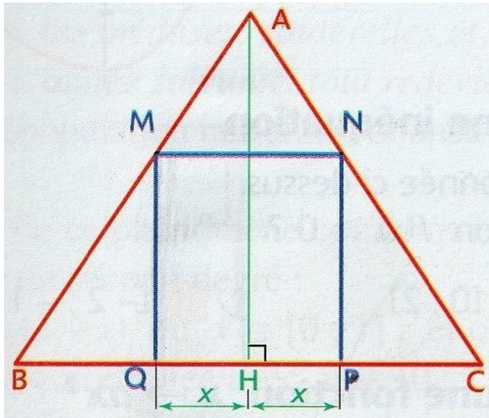
Exercice 8

Soit $ABCD$ un rectangle de côtés 2 et 3 et x un réel compris entre 0 et 2. Sur les côtés du rectangle, on construit les points M , N , P et Q (un par coté) tels que $AM = BN = CP = DQ = x$. On note $A(x)$ l'aire du quadrilatère $MNPQ$.

Après avoir fait une figure, calculer $A(x)$ et déterminer le sens de variation de la fonction A. En déduire l'extremum de cette fonction et la valeur de x pour laquelle il est atteint.

Exercice 9

Soit ABC un triangle isocèle en A avec $BC = 12$. Soit H le pied de la hauteur issue de A et $AH = 9$. Soit P et Q deux points de $[BC]$ symétriques par rapport à H. On note $HP = HQ = x$. Déterminer les dimensions du rectangle $MNPQ$ d'aire maximale inscrit dans ce triangle. ($M \in [AB]$ et $N \in [AC]$).



Exercice 10

(1) Déterminer une équation cartésienne de l'hyperbole $\mathcal{H}$ de centre de symétrie $C(3,-2)$ et passant par le point $A(2,4)$.

(2) Déterminer ***algébriquement*** les points d'intersection de $\mathcal{H}$ avec la parabole $\mathcal{P} : y = x^2$.

(3) Déterminer ***algébriquement*** les intervalles sur lesquels $\mathcal{P}$ est située au-dessus de $\mathcal{H}$.

(4) Représenter graphiquement $\mathcal{P}$ et $\mathcal{H}$ dans un repère orthonormé du plan.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

(1) Tracer $\mathcal{H}$, la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

(2) Etudier l'intersection de $\mathcal{H}$ avec les droites $\mathcal{D} : y = x - 2$, $\mathcal{D}' : y = x + 1$ et $\mathcal{D}'' : y = x + 4$.

(3) On note pour tout réel m , la droite $\mathcal{D}_m$ d'équation $y = x + m$.

a) Quelle particularité les droites $\mathcal{D}_m$ présentent entre elles ?

b) Conjecturer graphiquement sur le nombre de points d'intersection de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{D}_m$.

c) Montrer que déterminer ces points revient à résoudre l'équation : $x^2 + (m-1)x + m - 1 = 0$.

d) En déduire le nombre de points d'intersection de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{D}_m$, en fonction du paramètre m. Comment appelle-t-on les deux droites $\mathcal{D}_m$ qui ont un seul point d'intersection avec $\mathcal{H}$?

Exercice 12

Soit l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ et le point $A(4,0)$.

(1) A l'aide d'une règle, tracer la droite $\mathcal{D}$, passant par A et tangente à $\mathcal{H}$.

(2) Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ sans utiliser la figure. ***Indication*** : appeler m la pente de la droite.