FONCTIONS DU PREMIER ET DU DEUXIEME DEGRE

1) Fonctions constantes.

- Une **fonction constante** est une fonction de la forme :

$$\boxed{f(x) = b \quad \text{où b est un nombre réel fixe}}$$

- Exemples :

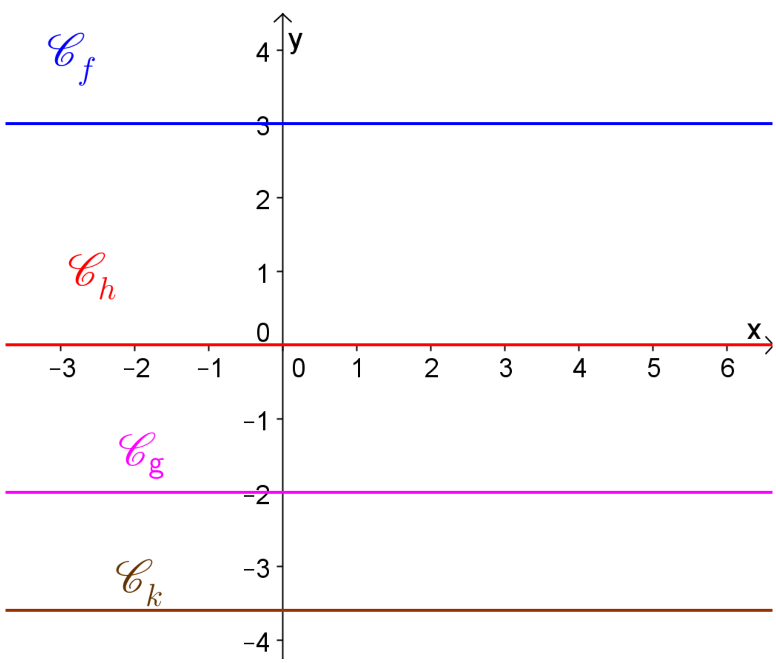
  $f(x) = 3$

  $g(x) = -2$

  $h(x) = 0$

  $k(x) = -3,6$

- La **courbe** d'une fonction constante est une droite parallèle à l'axe (Ox) :



2) Fonctions du premier degré.

- Une **fonction du premier degré** est une fonction qu'on peut écrire sous la forme :

$$\boxed{f(x) = ax + b \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq 0}$$

- Exemples :

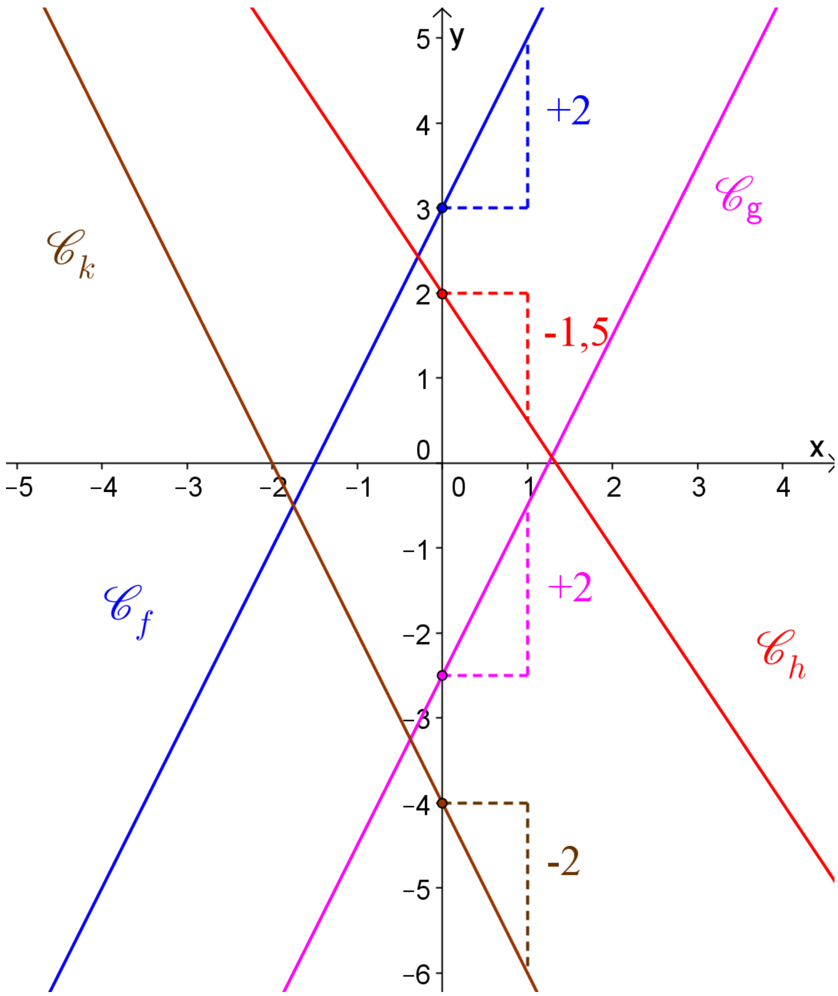
  $f(x) = 2x + 3$

$g(x) = 2x - 2,5$

$h(x) = -1.5x + 2$

$k(x) = -2x - 4$

- La courbe d'une fonction du premier degré est une droite d'équation $y = ax + b$:

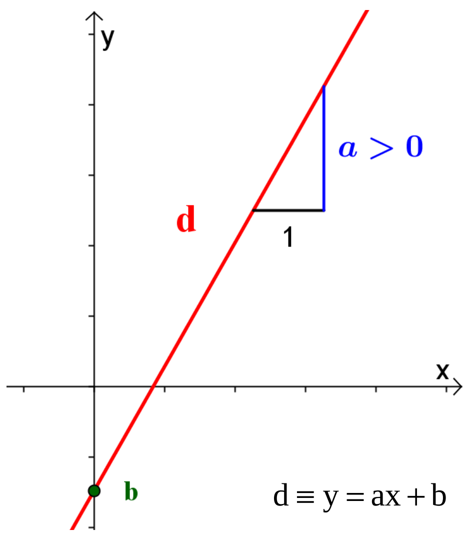


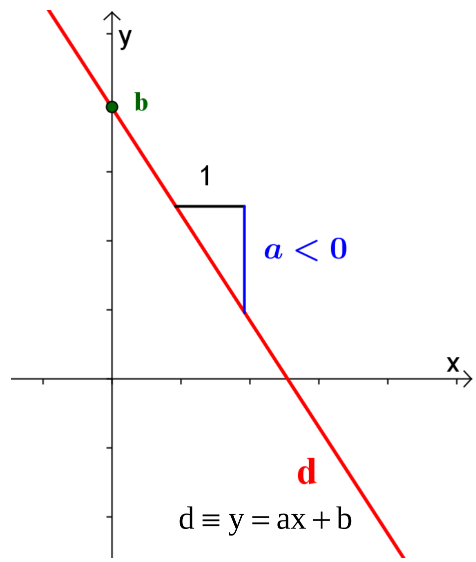
- **Equation d'une droite (rappels) :**
    - Une droite d qui est **parallèle à (Oy)** a une équation de la forme : $\boxed{d \equiv x = k}$ où k est un nombre réel constant. En effet les points d'une telle droite sont caractérisés par le fait qu'ils ont tous la même abscisse k.
    - Une droite d qui n'est **pas parallèle à (Oy)** a une équation de la forme : $\boxed{d \equiv y = ax + b}$ où a et b sont des nombres réels constants. <u>Interprétation graphique des coefficients a et b</u> :

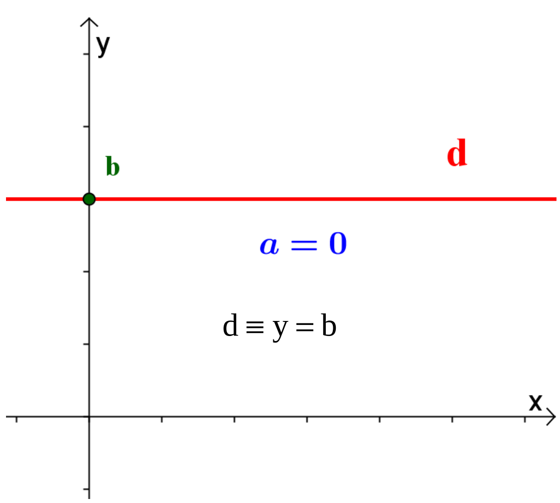
- **a** est la **pente** de d : en allant de n'importe quel point de la droite d'une unité vers la droite puis de a unités vers le haut si $a > 0$ (respectivement vers le bas si $a < 0$) on retombe sur un pont de la droite.

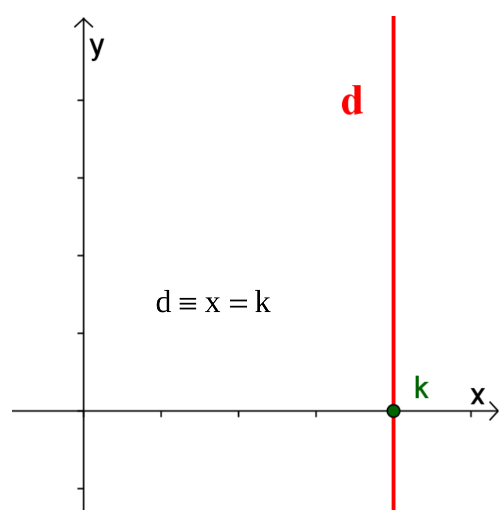
  <u>Conséquence</u> : si $a > 0$ la droite est croissante, si $a < 0$ la droite est décroissante et si $a = 0$ la droite est parallèle à (Ox).
- b est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec (Oy) : on dit que **b** est **l'ordonnée à l'origine**.

  En effet si $x = 0$ alors $y = a \cdot 0 + b = b$ donc $(0;b) \in d \cap (Oy)$.









- **Droites parallèles et droites perpendiculaires**

  Soient d et d' deux droites non parallèles à (Oy) d'équations $d \equiv y = ax + b$ et $d' \equiv y = a'x + b'$, alors :

$$\boxed{d \parallel d' \Leftrightarrow a = a'}$$

$$\boxed{d \perp d' \Leftrightarrow a' = -\frac{1}{a} \quad (\text{pour } a \neq 0 \text{ et } a' \neq 0)}$$

3) Fonctions du deuxième degré.

- Une **fonction du deuxième degré** est une fonction qu'on peut écrire sous la forme :

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq 0}$$

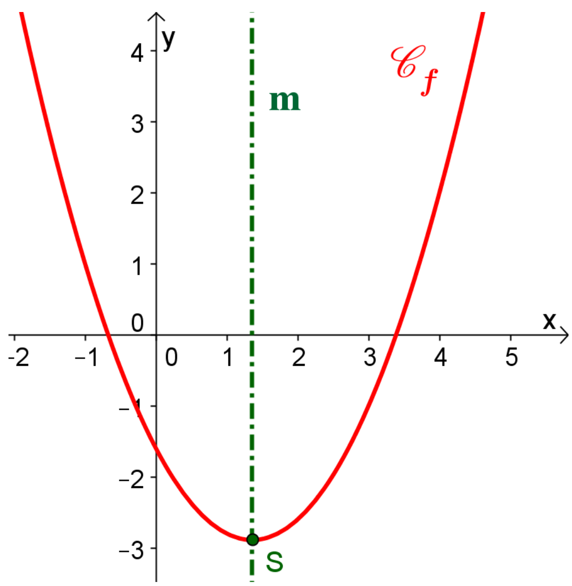
- Exemples :

$f(x) = x^2 - 5x + 1$

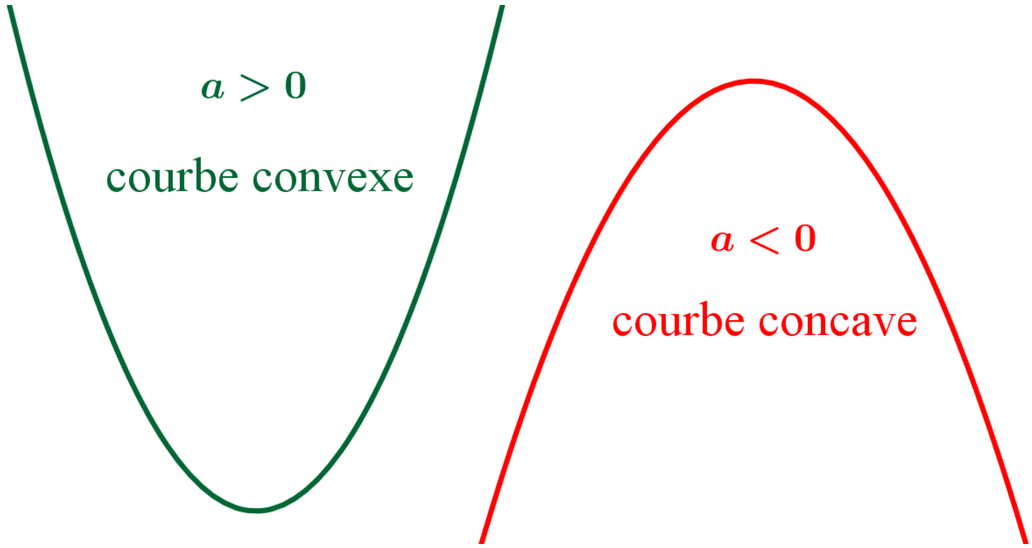
$f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 7,4x + 1$

$f(x) = (x+3)(2x-7) = 2x^2 - 7x + 6x - 21 = 2x^2 - x - 21$

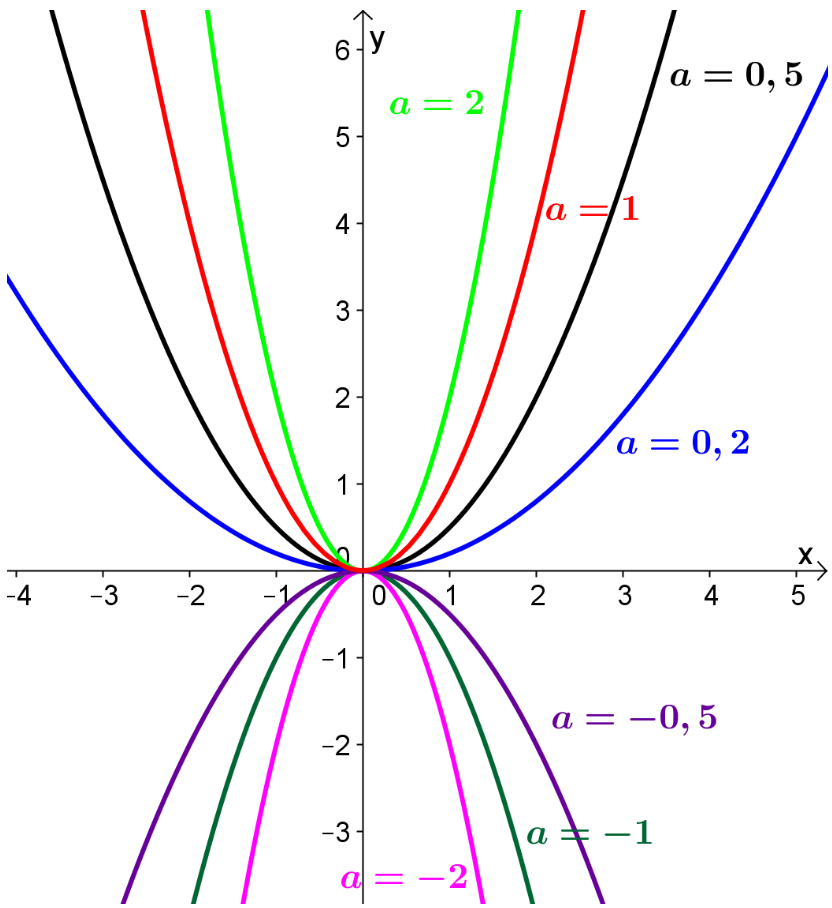
- La courbe d'une fonction du second degré est une **parabole** de **sommet S** qui a un **axe de symétrie m** qui est parallèle à (Oy) :



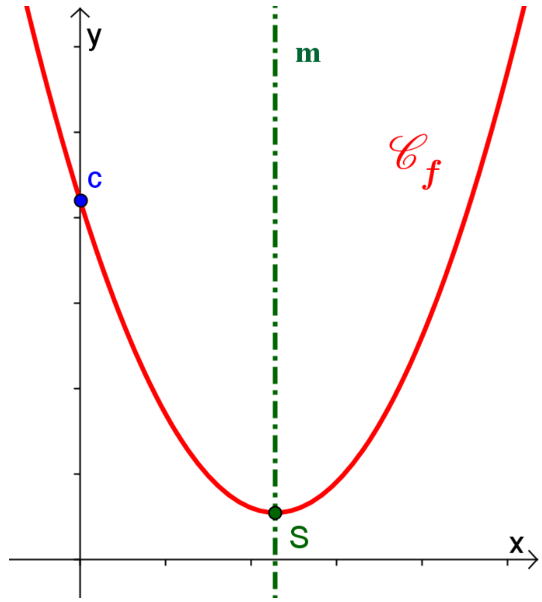
- **<u>Interprétation graphique</u>** <u>des coefficients a, b et c</u>.
  - **Signe de a** :



  - Plus la **valeur absolue de a** est grande et plus les deux branches de la parabole sont « resserrées » autour de l'axe de symétrie :

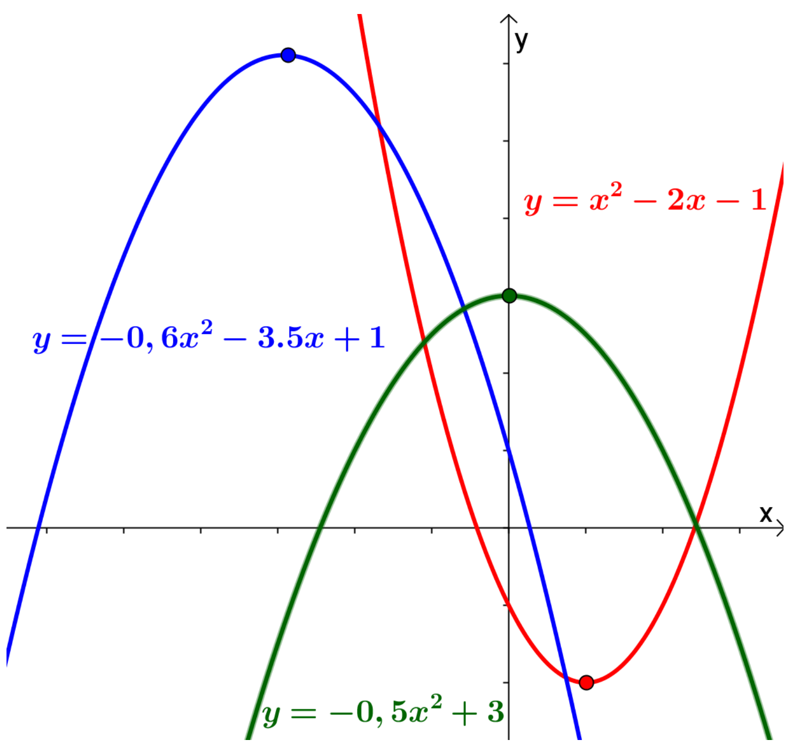


- **Influence de c** : $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$ donc $I(0;c)$ est le point d'intersection de la parabole avec l'axe (Oy) :

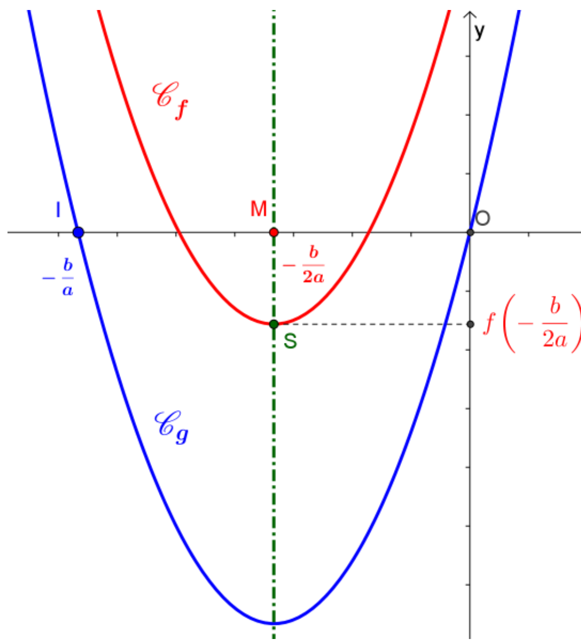


Changer la valeur de c revient à faire une *translation verticale* (vers le haut si c augmente, vers le bas si c diminue) de la courbe de f : on ne change pas sa forme et elle garde le même axe de symétrie !

- **Influence de b** : $m = (Oy) \Leftrightarrow S \in (Oy) \Leftrightarrow b = 0$



- **Calcul des coordonnées du sommet S :**
  - Les courbes de $f(x)=ax^2+bx+c$ et de $g(x)=ax^2+bx$ ont le même axe de symétrie m.
  - On calcule les points d'intersection de la courbe de g et de l'axe (Ox) en résolvant l'équation : $g(x)=0 \Leftrightarrow x(ax+b)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=-\frac{b}{a}$. Ces points sont donc l'origine $O(0,0)$ du repère et $I\left(-\frac{b}{a},0\right)$.
  - O et I sont symétriques par rapport à m donc m passe par le milieu $M\left(-\frac{b}{2a},0\right)$ de $[OI]$ et par conséquent : $m \equiv x=-\frac{b}{2a}$
  - M et S ont la même abscisse et on trouve l'ordonnée de S en calculant $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.



  - Exemple : $f(x)=-3x^2+6x-5$

    $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont le même axe de symétrie m où $g(x)=-3x^2+6x$.

    $\mathcal{C}_g \cap (Ox)$: $g(x)=0 \Leftrightarrow x(-3x+6)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=-2$

    $M(-1,0)$ est le milieu M de $[OI]$ avec $I(-2,0)$ donc $m \equiv x=-1$

    abscisse de S : -1, ordonnée de S : $f(-1)=-3(-1)^2+6(-1)-5=-14$.

    D'où $S(-1,-14)$.

4) Tableau des images

- Dressons un tableau des images de la fonction du premier degré $f(x)=5x-3$ tel que la différence entre deux valeurs consécutives de x, notée Δx, soit toujours la même :

x	Δx	$f(x)$	Δy
– 7		**– 38**	
	} +2		} +10
– 5		**– 28**	
	} +2		} +10
– 3		**– 18**	
	} +2		} +10
– 1		**– 8**	
	} +2		} +10
1		**2**	
	} +2		} +10
3		**12**	
	} +2		} +10
5		**22**	
	} +2		} +10
7		**32**	
	} +2		} +10
9		**42**	
	} +2		} +10
11		**52**	
	} +2		} +10
13		**62**	

x	Δx	$f(x)$	Δy
– 5		**– 28**	
	} +1,7		} +8,5
– 3,3		**– 19,5**	
	} +1,7		} +8,5
– 1,6		**– 11**	
	} +1,7		} +8,5
0,1		**– 2,5**	
	} +1,7		} +8,5
1,8		**6**	
	} +1,7		} +8,5
3,5		**14,5**	
	} +1,7		} +8,5
5,2		**23**	
	} +1,7		} +8,5
6,9		**31,5**	
	} +1,7		} +8,5
8,6		**40**	
	} +1,7		} +8,5
10,3		**48,5**	
	} +1,7		} +8,5
12		**57**	

On constate que la différence entre deux valeurs successives de $f(x)$, notée Δy est toujours la même !

- Faisons la même chose avec les fonctions du second degré $f(x)=-3x^2-5x+11$ et $g(x)=4x^2-7x-3$: on constate que cette fois-ci les Δy ne sont plus invariables, mais que la « différence de la différence », c'est-à-dire la différence entre deux valeurs successives de Δy, notée $\Delta(\Delta y)$, est constante !

x	Δx	$f(x)$	Δy	$\Delta(\Delta y)$
– 2,5		4,75		
	} +0,4		} +3,52	
– 2,1		8,27		} – 0,96
	} +0,4		} +2,56	
– 1,7		10,83		} – 0,96
	} +0,4		} +1,6	
– 1,3		12,43		} – 0,96
	} +0,4		} +0,64	
– 0,9		13,07		} – 0,96
	} +0,4		} – 0,32	
– 0,5		12,75		} – 0,96
	} +0,4		} – 1,28	
– 0,1		11,47		} – 0,96
	} +0,4		} – 2,24	
0,3		9,23		} – 0,96
	} +0,4		} – 3,2	
0,7		6,03		} – 0,96
	} +0,4	,	} – 4,16	
1,1		1,87		} – 0,96
	} +0,4		} – 5,12	
1,5		– 3,25		

x	Δx	$f(x)$	Δy	$\Delta(\Delta y)$
– 4		89		
	} +1,2		} –41,04	
– 2,8		47,96		} +11,52
	} +1,2		} –29,52	
– 1,6		18,44		} +11,52
	} +1,2		} – 18	
–0,4		0,44		} +11,52
	} +1,2		} – 6,48	
0,8		– 6,04		} +11,52
	} +1,2		} +5,04	
2		– 1		} +11,52
	} +1,2		} +16,56	
3,2		15,56		} +11,52
	} +1,2		} +28,08	
4,4		43,64		} +11,52
	} +1,2		} +39,6	
5,6		83,24		} +11,52
	} +1,2		} +51,12	
6,8		134,36		} +11,52
	} +1,2		} +62,64	
8		197		

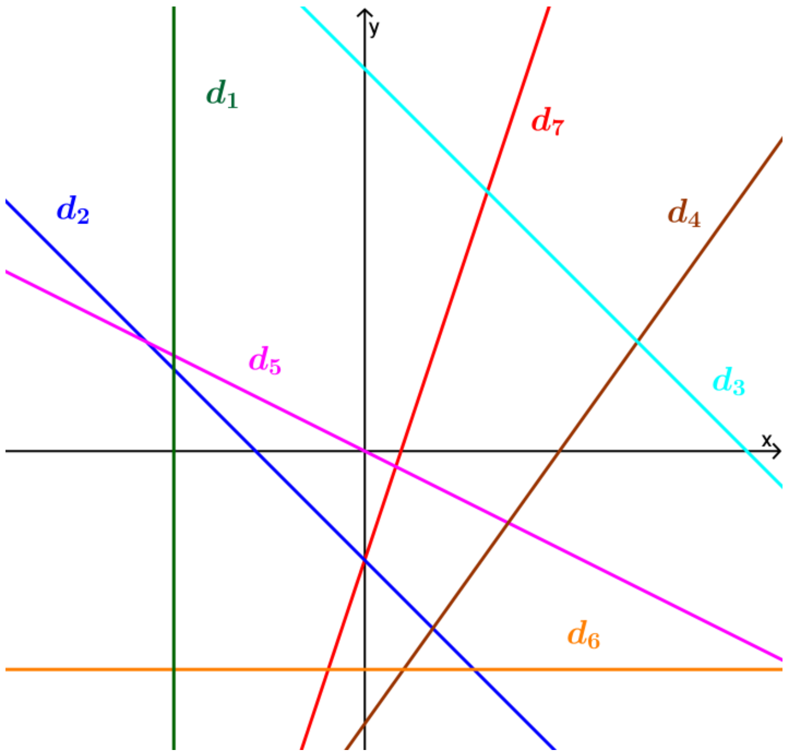
- *Remarque* : Pour une fonction du troisième degré il faudrait faire une étape de plus et calculer $\Delta(\Delta(\Delta y))$ pour obtenir une différence constante, etc.

Exercices

1) On donne sept droites dans un repère non gradué (voir figure ci-dessous) et les douze fonctions du premier degré et équations suivantes :

$f(x)=3x-2$	$x=-3,5$	$m(x)=-2$
$q(x)=7+x$	$j(x)=-x-2$	$k(x)=-\dfrac{1}{2}x-5$
$l(x)=-4$	$i(x)=1,4x-5$	$g(x)=7-x$
$h(x)=-\dfrac{1}{2}x$	$p(x)=1$	$x=6,1$

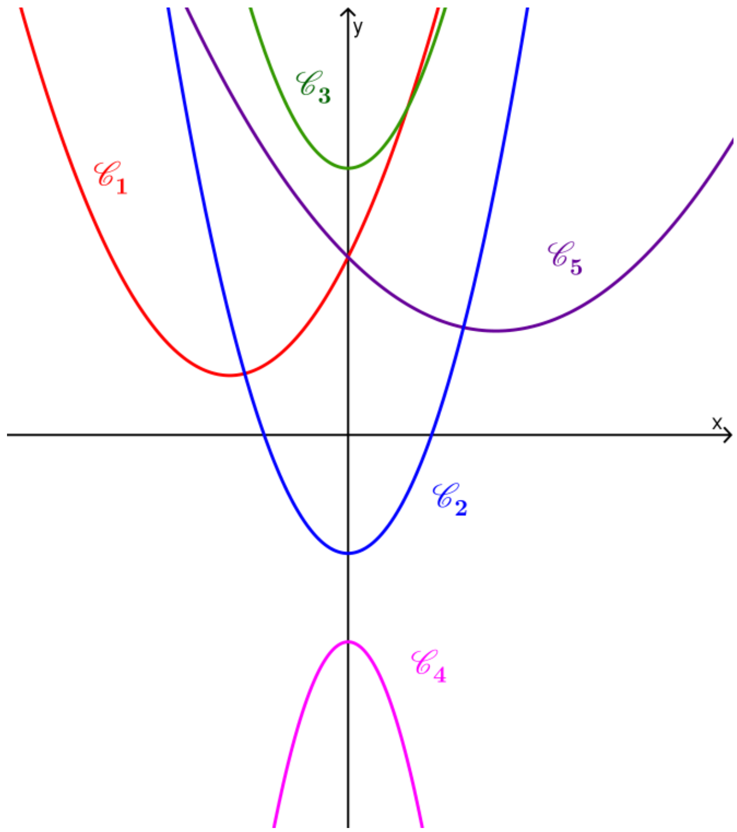
Associez à chaque droite l'une des douze expressions en justifiant vos réponses.



2) On donne cinq courbes dans un repère non gradué (voir figure ci-dessous) et les neuf fonctions du second degré suivantes :

$f(x)=3x^2$	$g(x)=x^2+4.5$	$h(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2x+3$
$i(x)=0,4x^2-x+1$	$j(x)=\dfrac{1}{5}x^2-x+3$	$k(x)=-3x^2-x$
$l(x)=x^2-2$	$m(x)=-2x^2-3,5$	$h(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2x+3$

Associez à chaque courbe l'une des neuf expressions en justifiant vos réponses.



3) On donne les tableaux de valeurs suivants pour six fonctions :

x	-6	$-4{,}3$	$-2{,}6$	$-0{,}9$	$0{,}8$	$2{,}5$	$4{,}2$	$5{,}9$	$7{,}6$
$f_1(x)$	-25	$-19{,}9$	$-14{,}8$	$-9{,}7$	$-4{,}6$	$0{,}5$	$5{,}6$	$10{,}7$	$15{,}8$

x	$-8{,}5$	$-6{,}4$	$-4{,}3$	$-2{,}2$	$-0{,}1$	2	$4{,}1$	$6{,}2$	$8{,}3$
$f_2(x)$	$20{,}5$	$16{,}3$	$12{,}1$	$7{,}9$	$3{,}7$	$-0{,}5$	$-4{,}7$	$-8{,}2$	-13

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f_3(x)$	107	74	47	26	11	2	-1	2	11

x	$-3{,}2$	$-2{,}7$	$-2{,}2$	$-1{,}7$	$-1{,}2$	$-0{,}7$	$-0{,}2$	$0{,}3$	$0{,}8$
$f_4(x)$	-80	$-60{,}75$	-44	$-29{,}75$	-18	$-8{,}75$	-2	$2{,}25$	4

x	-10	-7	-4	-1	2	5	8	11	14
$f_5(x)$	51	$27{,}6$	$11{,}4$	$2{,}4$	$0{,}6$	6	$18{,}6$	38	65

x	-5	$-3{,}5$	-2	$-0{,}5$	1	$2{,}5$	4	$5{,}5$	7
$f_6(x)$	$-56{,}5$	$-39{,}63$	-25	$-12{,}63$	$-2{,}5$	$5{,}375$	11	14.375	$15{,}5$

Déterminez pour chacune d'elles s'il peut s'agir d'une fonction du premier ou du second degré et si oui, trouvez son expression.

4) Complétez le tableau suivant sachant que f est une fonction du second degré, puis calculez l'expression de $f(x)$:

x	$f(x)$	Δy	$\Delta(\Delta y)$
-8	-87		
		} **+48**	
-5			} **– 18**
-2			
1			
4			
7			
10			

5) Calculez les coordonnées du sommet de la parabole d'équation :

$$f(x) = (3x-9)(x+7)$$