

CHAPITRE I

THEOREME DE THALES

A. Proportions et rapports de longueurs

1) Résolvez les équations suivantes :

a) $\frac{3}{x} = \frac{4}{7}$

f) $\frac{7x-1}{9x+8} = \frac{4}{5}$

b) $\frac{-1}{4} = \frac{5}{2x}$

g) $\frac{5x}{3-4x} = \frac{-2}{7}$

c) $\frac{5}{x} = \frac{11}{13}$

h) $\frac{2x-1}{5x+2} = \frac{3}{4}$

d) $\frac{7}{8} = \frac{-2x}{3}$

i) $\frac{1}{x} = \frac{4-x}{4}$

e) $\frac{x}{12-x} = \frac{2}{3}$

j) $\frac{x+3}{1-2x} = \frac{3x+4}{5-6x}$

2) Construire deux rectangles différents tels que le rapport de la longueur à la largeur est :

a) 3 b) $\frac{5}{3}$ c) 1

3) Tracez un segment $[AB]$ de 9 cm puis placez les points M, N, P et Q sur $[AB]$ tels que :

a) $AM = \frac{1}{3} AB$

b) $\frac{AN}{AB} = \frac{11}{18}$

c) $\frac{BP}{BA} = \frac{1}{6}$

d) $\frac{BQ}{BA} = \frac{5}{9}$

4) Soit la droite graduée (AB) :



a) Déterminez les rapports $\frac{AM}{BM}$, $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AB}{AM}$ et $\frac{MB}{MA}$.

b) Reproduisez la figure et placez-y les points N, P, Q et R tels que :

• $MN = \frac{3}{4} AB$ et $N \in [AM]$

• $\frac{BQ}{AQ} = \frac{3}{11}$ et $Q \in (AB)$

• $\frac{BM}{BP} = \frac{2}{5}$ et $P \notin [AB]$

• $\frac{AR}{BR} = \frac{1}{2}$ et $R \in (AB)$

Attention : il y a parfois 2 possibilités !

5) Tracez un segment $[AB]$ de 6 cm. Construisez tous les points X de la droite (AB) tels que

a) $\frac{AX}{AB} = \frac{1}{3}$

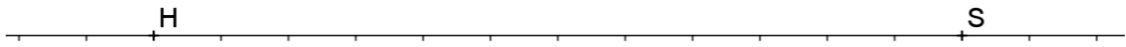
b) $\frac{AX}{AB} = 2$

c) $\frac{BX}{AB} = 1$

d) $\frac{AX}{BX} = 2$

e) $\frac{BX}{AX} = \frac{2}{5}$.

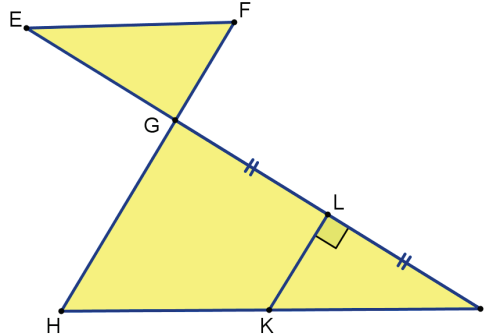
- 6) Reproduisez la droite graduée (HS) puis placez les points définis ci-dessous et calculez les rapports demandés :



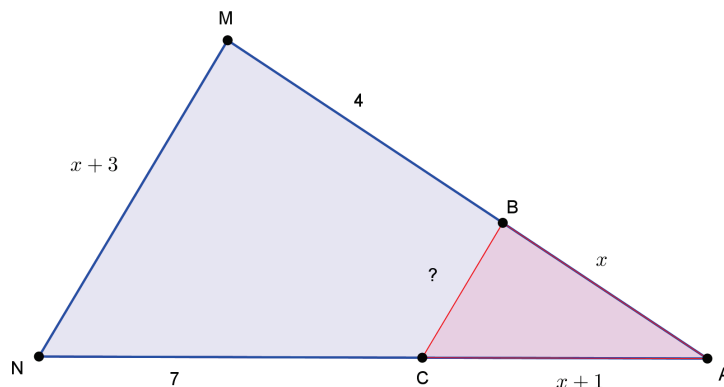
- a) Le point L est défini par : $L \in [HS]$ et $\frac{HL}{HS} = \frac{1}{2}$. Que vaut alors $\frac{HL}{LS}$?
- b) Le point A est défini par : $A \in [HS]$ et $\frac{HA}{AS} = \frac{1}{3}$. Que vaut alors $\frac{HA}{HS}$?
- c) Le point E est défini par : $E \in [HS]$ et $\frac{EH}{ES} = 2$. Que vaut alors $\frac{HE}{HS}$?
- d) Le point T est défini par : $T \notin [HS]$ et $\frac{HT}{HS} = \frac{1}{6}$. Que vaut alors $\frac{TH}{TS}$?
- 7) Tracez un segment $[AB]$ d'une longueur de 6 cm. Placez sur la droite (AB) les points suivants :
- a) $M \in [AB]$ tel que $AM = 2BM$
- b) $N \in d \setminus [AB]$ tel que $AN = 2BN$
- c) $P \in d$ tel que $AP = \frac{1}{2}BP$ (2 solutions !)
- d) $Q \in d$ tel que $AQ = 5BQ$ (2 solutions !)
- 8) a) Quel est le rapport de la longueur d'une diagonale à la longueur d'un côté dans un carré ? (Indication : utiliser le théorème de Pythagore !)
- b) Dans un cercle, quel est le rapport de la circonférence au diamètre ?
- c) Dans un triangle équilatéral, quel est le rapport de la hauteur à la longueur d'un côté ?

B. Théorème de Thalès

- 9) Sur la figure suivante E, G, I et F, G, H sont alignés, $(EF) \parallel (HI)$, $EF = 25$ cm, $GF = 7$ cm, $EG = 24$ cm et $GH = 20$ cm :



- Quelle est la nature du triangle EFG ?
 - Calculez KL et que K est le milieu de $[HI]$.
 - Calculez KI .
- 10) Soit ABC un triangle avec $AB = 10$ cm, $BC = 8$ cm et $AC = 6$ cm, $E \in [AB]$, $F \in [AC]$ tel que $(EF) \parallel (BC)$.
- Faites une figure exacte.
 - Déterminez la nature des triangles ABC et AEF .
 - On pose $AE = x$. Exprimez AF , CF , EF et BE en fonction de x .
 - Pour quelle valeur de x le triangle AEF et le trapèze $BCFE$ ont-ils le même périmètre ?
 - Pour quelle valeur de x le triangle AEF et le trapèze $BCFE$ ont-ils la même aire ?
- 11) Sur la figure suivante (non exacte) on suppose que $(BC) \parallel (MN)$, $AB = x$, $BM = 4$, $AC = x + 1$, $CN = 7$, et $MN = x + 3$.

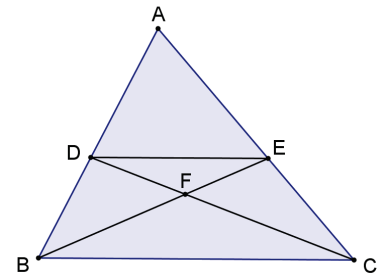


- Déterminer x .
- En déduire la longueur du segment $[BC]$.
- Compléter : Les côtés du $\triangle AMN$ sont ... fois plus longs que ceux du $\triangle ABC$.

- d) Tracer les hauteurs $[MK]$ et $[BH]$ des triangles AMN et ABC respectivement. Déterminer le rapport de ces hauteurs en justifiant la réponse.
- e) En déduire le rapport des aires des triangles AMN et ABC .
- 12) Montrer à l'aide du théorème de Thalès que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.
- 13) On donne un triangle (ABC) tel que $AB = 8$ cm, $AC = 5$ cm et $BC = 6$ cm. Sur le côté $[AB]$ on a marqué le point D situé à 3 cm de A . Par D on trace la parallèle à (BC) qui coupe (AC) en E , et la parallèle à (AC) qui coupe (BC) en F .
- a) Faites une figure à main libre pour illustrer la situation.
- b) Calculez le périmètre du $\triangle DEC$.

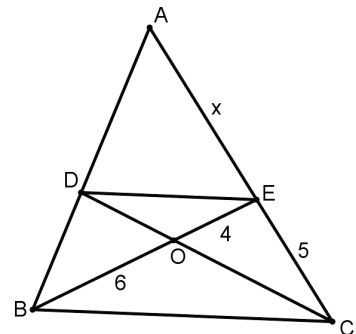
- 14) Sur la figure ci-contre on donne : $(DE) \parallel (BC)$, $FE = 3$, $FB = 4$ et $BD = 5$:

- a) Montrez que $\frac{FE}{FB} = \frac{AD}{AB}$.
- b) Calculez AD .



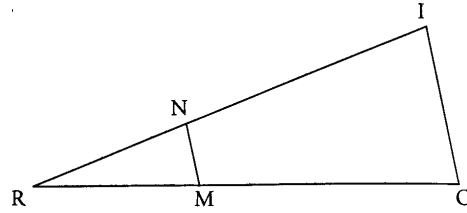
- 15) Sur la figure suivante $OE = 4$, $OB = 6$, $EC = 5$, $AE = x$ et $(DE) \parallel (BC)$.

- a) Exprimer le rapport DE / BC de deux façons différentes.
- b) En déduire x .

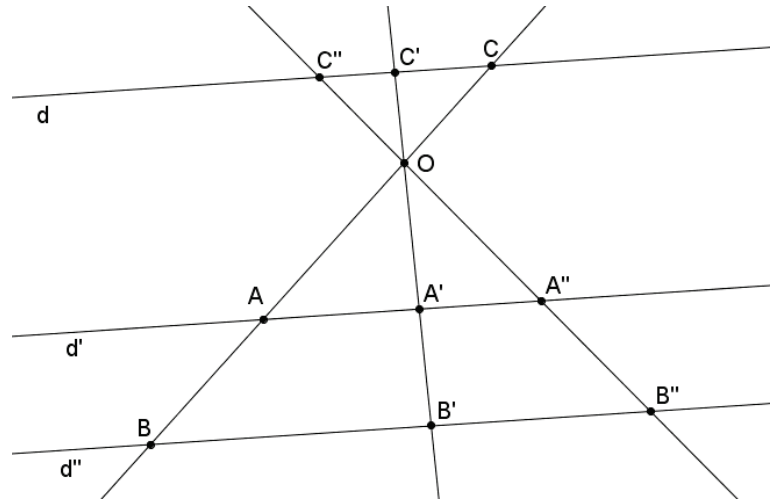


- 16) Soit $ABCD$ un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$ dont les diagonales se coupent en O tel que $OC = 12$, $OD = 5$, $CD = 13$ et $AC = 21$.
- a) Faites un croquis, puis calculez OB et AB .
- b) Quelle est la nature du triangle OCD ? Quels sont les autres triangles de même nature sur la figure ?
- c) Calculez l'aire du trapèze.
- d) Calculez le périmètre du trapèze.

- 17) Sur la figure ci-dessous, $\Delta(ROI)$ est un triangle tel que $RO = 8$ cm, $RI = 7$ cm, $OI = 3$ cm, $M \in [RO]$, $N \in [RI]$ et $(MN) \parallel (OI)$. On pose : $RM = x$ avec $0 \leq x \leq 8$.



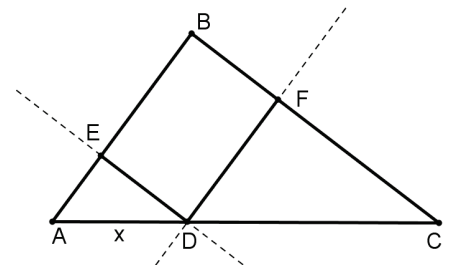
- Exprimez les longueurs RN et MN en fonction de x .
 - Montrez que le périmètre p_1 du triangle $\Delta(RMN)$ est égal à $\frac{9}{4}x$.
 - Montrez que le périmètre p_2 du trapèze (MOIN) est égal à $18 - \frac{3}{2}x$.
 - Déterminez x pour que $p_1 = p_2$.
- 18) Sur la figure (inexacte) ci-dessous on a $d \parallel d' \parallel d''$. On donne : $OA = 7$, $OA'' = 9$, $OC = 11$, $AB = 12$, $A'B' = 10$ et $AA' = 3,5$:



Déterminez OB'' , BB' et OC'' en justifiant vos calculs.

- 19) Sur la figure suivante on donne : $AB = 6$, $BC = 8$, $AC = 10$, $D \in [AC]$, $E \in [AB]$, $F \in [BC]$, $(DE) \parallel (BC)$ et $(DF) \parallel (AB)$.

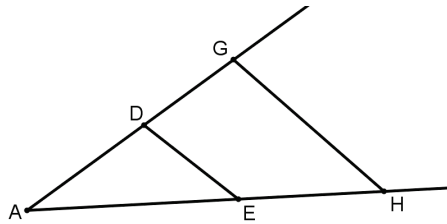
- Quelle est la nature des triangles $\Delta(ABC)$, $\Delta(ADE)$ et $\Delta(DCF)$ ainsi que du quadrilatère $BEDF$?
- En posant $x = AD$, exprimez ED et DF en fonction de x .
- Pour quelle valeur de x le quadrilatère $BEDF$ et le triangle $\Delta(DCF)$ ont-ils la même aire ?



- 20) Dessinez un segment de 9 cm. En utilisant uniquement une règle non graduée et un compas, partagez ce segment en 7 segments de même longueur. Décrivez et justifiez votre démarche !

C. Réciproque du théorème de Thalès

- 21) Sur la figure (inexacte) ci-dessous on a $AE = 15$, $EH = \frac{45}{2}$, $AG = 25$ et $DG = 15$:



A-t-on $(DE) \parallel (GH)$?

- 22) Sur quelles figures a-t-on : $(AB) \parallel (EF)$? Justifiez votre réponse !

figure 1

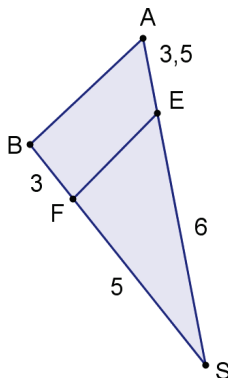


figure 2

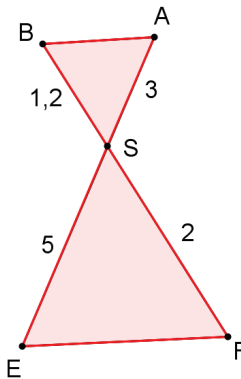
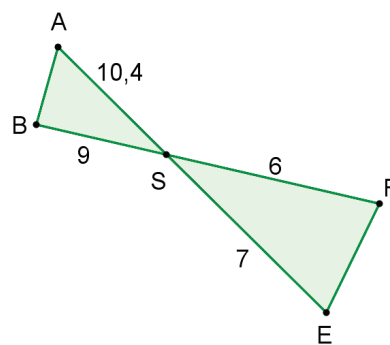


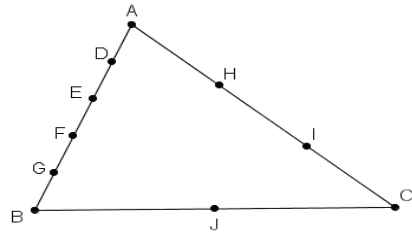
figure 3



- 23) Soit $ABCD$ un quadrilatère dont les diagonales se coupent en O et tel que $AC = 27$, $BD = 18$, $OA = 15$ et $OD = 10$ (faites un schéma !). Montrez que $ABCD$ est un trapèze mais pas un parallélogramme !
- 24) Soit IML un triangle tel que $IL = 7,5$, $IM = 15$, $ML = 12,5$, $K \in [IL]$ avec $IK = 3$ et $J \in [ML]$ avec $JL = 7,5$.
- Schéma.
 - Montrez que $(MI) \parallel (JK)$.
 - Calculez JK .

- 25)** Sur la figure ci-contre, $AD = DE = EF = FG = GB$, $AH = HI = IC$ et $BJ = JC$:

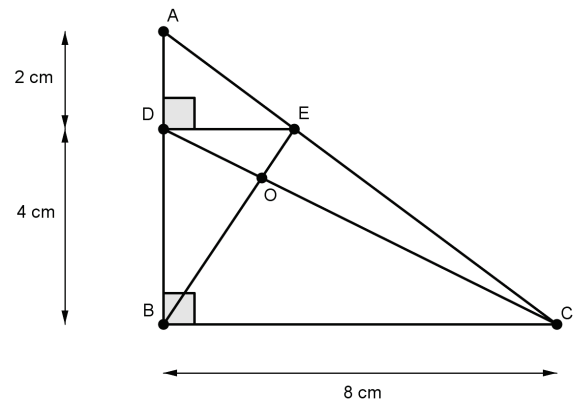
Toutes les droites à trouver dans cet exercice
doivent passer par deux points déjà définis !
Justifiez vos réponses !



- a) Trouvez trois droites parallèles à (DH) .
- b) Trouvez une droite parallèle à (IJ) .
- c) Trouvez une droite parallèle à (EH) .
- 26) Soit la figure suivante :
- a) En utilisant les données sur la figure, montrez que $(DE) \parallel (BC)$.

- b)** Montrez que $\frac{AD}{AB} = \frac{OE}{OB}$. Calculez ensuite la valeur de ces deux rapports.
- c)** Sans *aucune justification*, indiquer trois autres rapports égaux à $\frac{AD}{AB}$:

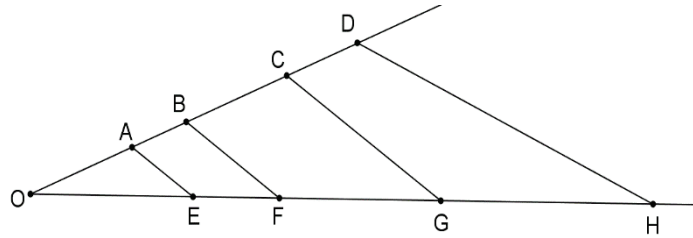
$$\frac{AD}{AB} = \frac{OE}{OB} = \dots = \dots = \dots$$



- d) Calculez AC , AE et DE .
- e) Soit $I = \text{mil}[AC]$. Est-ce que $(OI) \parallel (DE)$?
- 27) a) Construisez :
- un triangle ABC avec $AB = 8 \text{ cm}$, $AC = 6 \text{ cm}$ et $BC = 4 \text{ cm}$,
 - $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$ tels que $(MN) \parallel (BC)$ et $AM = 5 \text{ cm}$,
 - $P \in [BC]$ tel que $CP = 1,5 \text{ cm}$.
- b) Calculez AN et MN .
- c) Montrez que $MNPB$ est un parallélogramme.

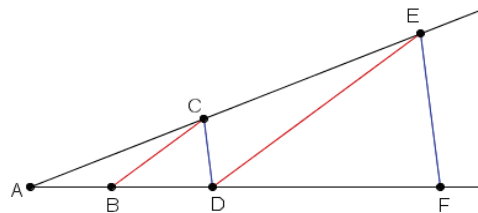
- 28) a)** Faites la construction suivante :
- Tracez un quadrilatère $SABC$ et $A' = \text{mil}[SA]$.
 - Tracez la droite d telle que : $d \parallel (AB)$, $A' \in d$ et $B' \in d \cap (SB)$.
 - Tracez la droite d' telle que : $d' \parallel (BC)$, $B' \in d'$ et $C' \in d' \cap (SC)$.
- b)** Démontrez que $C' = \text{mil}[SC]$.
- c)** Démontrez que $(AC) \parallel (A'C')$.

- 29) Sur la figure (inexacte) suivante on a : $(AE) \parallel (BF) \parallel (CG)$, $AB = 2,5$, $OF = 9$, $FG = 4,5$, $EG = 7,5$, $CD = 1$ et $FH = 5,7$:



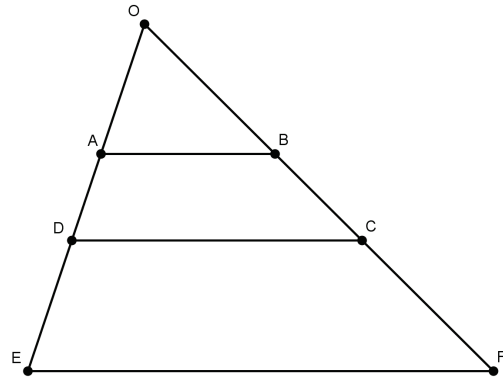
- a) Calculez BC .
 b) Est-ce que $(DH) \parallel (AE)$? Justifiez !
- 30) Sur la figure suivante $(BC) \parallel (DE)$ et $(CD) \parallel (EF)$.

- a) Montrez que $\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AF}$.
 b) Déduisez-en que :
 ➤ si $AB = 1$ alors $AF = \dots$
 ➤ si $AD = 1$ alors $AF = \dots$



- 31) a) Construisez :
 ➤ un quadrilatère quelconque $ABCD$,
 ➤ le milieu M de $[AD]$,
 ➤ la droite d passant par M et parallèle à (AB) qui coupe (BD) en I ,
 ➤ la droite d' passant par I et parallèle à (BC) qui coupe $[CD]$ en J .
 b) Montrez que J est le milieu de $[CD]$.
 c) Que peut-on dire des droites (MJ) et (AC) ?
- 32) a) Construisez :
 ➤ un quadrilatère $ABCD$ tel que $AB = AD = 4$ cm, $BC = 6$ cm et $CD = 3$ cm,
 ➤ $X \in [AB]$ tel que $AX = \frac{3}{4} AB$,
 ➤ la parallèle à (AC) passant par X qui coupe (BC) en Y ,
 ➤ la parallèle à (BD) passant par Y qui coupe (CD) en Z ,
 ➤ la parallèle à (AC) passant par Z qui coupe (AD) en T .
 b) Calculez BY , CY , CZ , DZ , DT et AT .
 c) Comparez les droites (XT) et (BD) . Justifiez votre réponse !
- 33) Sur la figure (inexacte) ci-contre, on a $(AB) \parallel (DC) \parallel (EF)$, $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$ et $DA = 2$:
- a) Déterminez le périmètre du triangle $\Delta(OAB)$. Quelle est la nature de ce triangle ?

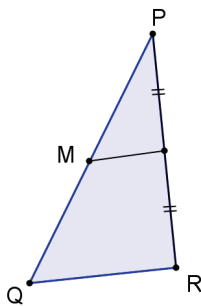
- b) Sachant que $DE = \frac{10}{3}$, déterminez le périmètre du trapèze $CDEF$.
- c) Est-ce que $(BD) \parallel (EC)$?



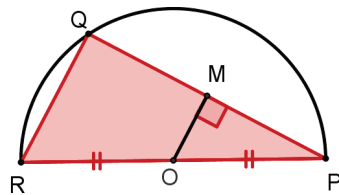
D. Théorème des milieux et réciproque

- 34) Soit un triangle ABC , D le milieu de $[AC]$, E le milieu de $[BC]$, $BA = 6$ m, $BC = 8$ m et $BD = 5$ m.
- a) Faire un croquis, puis calculez DE .
- b) Déterminez la nature du triangle ABC .
- 35) Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, $BC = 7$ cm, $I = \text{mil}[AC]$ et la parallèle à (AB) passant par I coupe $[BC]$ en L (schéma). Calculez le périmètre du triangle ICL en justifiant vos calculs !
- 36) Pour chacune des figures suivantes, vérifiez si le point M est nécessairement le milieu du segment $[PQ]$. Justifiez vos réponses !

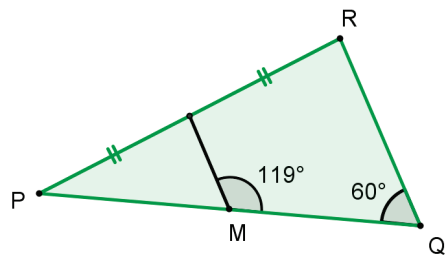
a)



b)

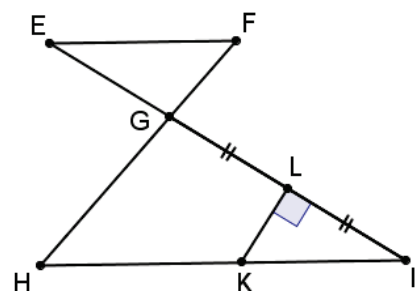


c)



- 37) Sur la figure ci-contre E, G, I et F, G, H sont alignés, $(EF) \parallel (HI)$, $EF = 25$ cm, $GF = 7$ cm, $EG = 24$ cm et $GH = 20$ cm :

- a) Quelle est la nature du triangle EFG ?
- b) Prouvez que K est le milieu de $[HI]$, puis calculez KL et KI .

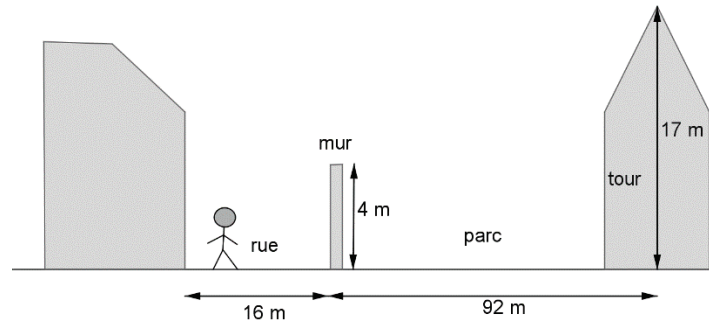


- 38) Tracez un parallélogramme $EFGH$, le milieu I de $[EF]$, la droite $d \parallel (FG)$ passant par I et le point $J \in d \cap (EG)$. Montrez que F, J et H sont alignés.
- 39) a) Construisez :
- un triangle équilatéral ABC dont les côtés mesurent 5 cm et un arc de cercle de centre A et passant par B et C ,
 - un point $M \in \widehat{BC}$, le milieu P de $[BM]$, le milieu Q de $[CM]$, le milieu D de $[AB]$ et le milieu E de $[AC]$.
- b) Comparez DP et EQ à AM . Justifiez votre réponse.
- c) Comparez PQ et DE à BC . Justifiez votre réponse.
- d) Déduisez-en que $(PE) \perp (QD)$.
- 40) **Théorème de Varignon.** Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque et E, F, G, H les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Montrez que $EFGH$ est un #.

E. Problèmes mixtes

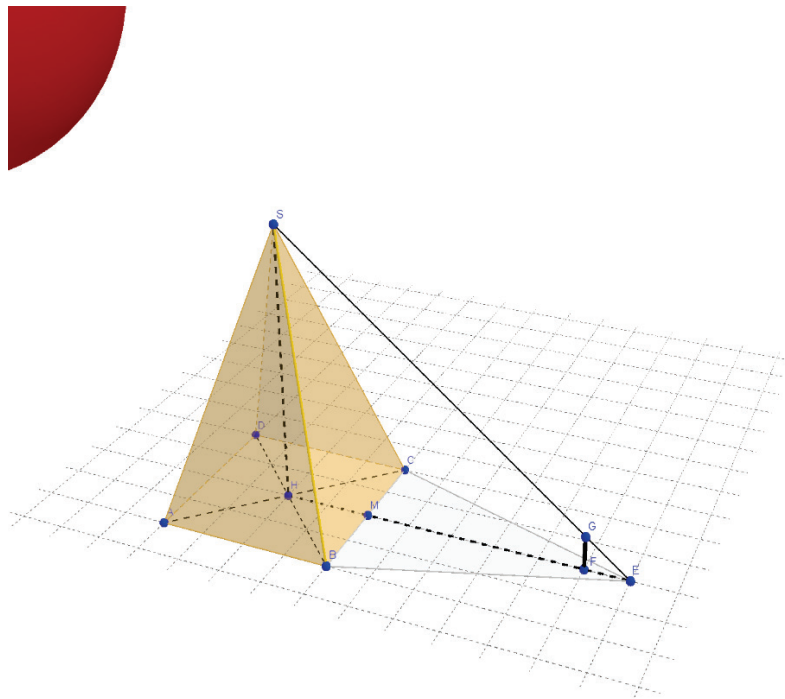
- 41) **Variante du théorème de Thalès dans un triangle.** Dans le triangle ABC , on place un point M sur $]AB[$ et un point N sur $]AC[$.
- a) Montrer que si $(MN) \parallel (BC)$ alors $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ et $\frac{AB}{MB} = \frac{AC}{NC}$.
- b) Montrer à l'aide d'un contre-exemple qu'en général ce rapport n'est pas égal à $\frac{MN}{BC}$, ni égal à $\frac{BC}{MN}$.
- c) Enoncer et démontrer la réciproque de la propriété du a).
- 42) **Le théorème de Thalès dans un trapèze.** Dans un trapèze $ABCD$ de bases parallèles $[AB]$ et $[CD]$, on place un point M sur $]AD[$ et un point N sur $]BC[$.
- a) Montrer que si $(MN) \parallel (AB)$ alors $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC}$ et $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$.
- Indication :** prolongez les côtés non parallèles du trapèze jusqu'à leur point d'intersection O et utilisez le théorème de Thalès ou une variante dans des triangles.
- b) Enoncer et démontrer la réciproque de cette propriété.

- 43) Sur la figure ci-dessous les yeux du personnage se promenant dans la rue se trouvent à 1,6 m du sol. D'un côté de la rue se trouve un mur entourant un parc dans lequel se trouve une tour. Est-ce que le promeneur peut voir le sommet de la tour par-dessus le mur ?



- 44) La figure (non exacte) ci-dessous représente la Grande Pyramide de Gizeh et son ombre au soleil. Une légende rapporte qu'on mit au défi le philosophe et mathématicien grec **Thalès de Milet** de calculer la hauteur de la pyramide. Pour cela Thalès plaça verticalement un bâton $[FG]$ sur la médiatrice (HE) du côté $[BC]$ de telle manière que l'ombre du bâton se termine en E exactement comme celle de la pyramide. Il mesura les longueurs suivantes :

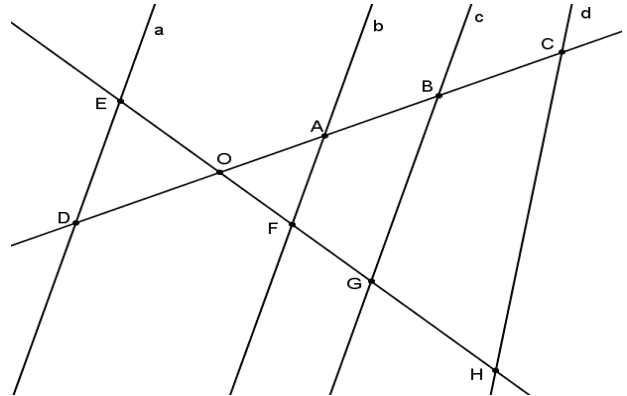
$$FG = 2 \text{ m}, FE = 3 \text{ m}, ME = 96 \text{ m} \text{ et } AB = 228 \text{ m}.$$



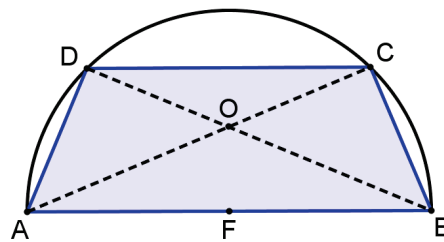
Faites un schéma du triangle $\Delta(SHE)$, puis montrez comment Thalès a calculé la hauteur de la pyramide.

- 45) Construisez à l'aide d'un compas et d'une règle non graduée un segment dont la longueur x est définie par : $\frac{3}{5} = \frac{7}{x}$.

- 46) Sur la figure (inexacte) suivante on a :
 $a \parallel b \parallel c$, $OA = 3$, $OD = 2$, $OE = 3$,
 $DE = 1,2$, $FG = 3$, $GH = 4$ et $BC = \frac{8}{3}$.
 Calculez CH en justifiant vos calculs !



- 47) Soit le trapèze $ABCD$ inscrit dans un demi-cercle de centre F et de diamètre $[AB]$ tel que :
 $AB = 10$ cm et $AC = 8$ cm :



- Faites une construction exacte.
- Montrez que le trapèze est isocèle, c.-à-d. que les côtés $[AB]$ et $[CD]$ ont la même médiatrice d . (d est donc un axe de symétrie du trapèze).
- Déduisez-en que $AD = BC$ et que le point d'intersection des diagonales $O \in d$.
- Quelle est la nature du triangle ABC ? Calculez BC ainsi que la hauteur issue de C du triangle ABC .
- Calculer DC . Indication : tracer le rectangle $DCHK$, où H et K appartiennent à $[AB]$.
- Calculez l'aire et le périmètre du trapèze.
- Calculer finalement OC et AO .

48) Observez la figure suivante :

Recopiez et complétez la démonstration suivante dont le but est de montrer que $(AP) \parallel (CR)$:

a) $(AB) \dots (SP)$ et $(QR) \dots (SP)$, donc $(AB) \dots (QR)$

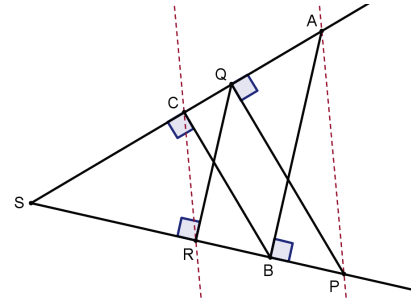
b) $(BC) \dots (SA)$ et $(PQ) \dots (SA)$, donc $(BC) \dots (PQ)$

c) $(AB) \dots (QR)$ donc d'après on a : $\frac{SA}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} \Leftrightarrow \dots = \dots$ (1)

d) $(PQ) \dots (BC)$ donc d'après on a : $\frac{SP}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} \Leftrightarrow \dots = \dots$ (2)

e) D'après (1) et (2) : $\dots = \dots$ donc $\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$ (3)

f) D'après on a :



49) a) Construisez (*figure exacte !*):

- un segment $[AB]$ de longueur 8 cm
- le cercle \mathcal{C} de diamètre $[AB]$
- deux points C et D (différents de A et B) sur \mathcal{C}
- un point M sur $[AB]$ (différent de A et B)
- le point $H \in [AC]$ tel que $(MH) \perp (AC)$
- le point $I \in [AD]$ tel que $(MI) \perp (AD)$
- les droites (HI) et (CD)

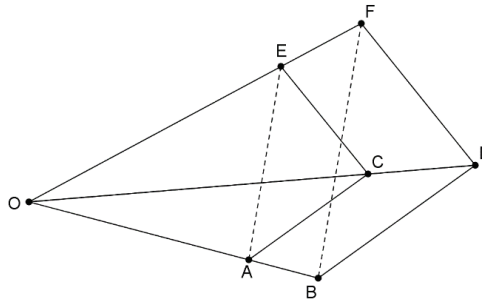
b) Complétez puis démontrez : $(HI) \dots (CD)$. **Indication** : commencez par examiner la nature du triangle ABC .

50) Dans un triangle quelconque ABC on choisit un point D sur le côté $[AB]$, puis on construit successivement les points suivants sur les côtés du triangle ABC :

- E tel que $(DE) \parallel (BC)$
- F tel que $(EF) \parallel (AB)$
- G tel que $(FG) \parallel (AC)$
- H tel que $(GH) \parallel (BC)$
- I tel que $(HI) \parallel (AB)$

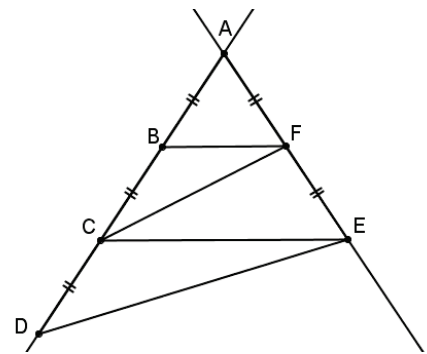
Faire la construction ! Montrer que $(DI) \parallel (AC)$.

- 51) Un cas particulier du théorème de Desargues.** Sur la figure suivante on suppose que $(AC) \parallel (BD)$ et $(CE) \parallel (DF)$. Montrer que $(AE) \parallel (BF)$.



- 52)** Sur la figure suivante on a $AB = BC = CD = AF = EF = x$:
Justifiez vos réponses aux questions suivantes :

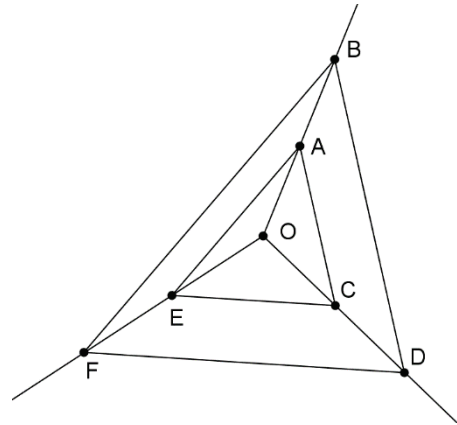
- Montrez que $(BF) \parallel (CE)$.
- Que vaut CE si $BF = \frac{14}{17}$?
- Comparez les angles \widehat{BFC} et \widehat{ECF} .
- A-t-on $(CF) \parallel (DE)$?
- Comparez les angles \widehat{EDC} et \widehat{FCB} .



- 53) a)** Construisez :
- un carré $ABCD$ et M un point quelconque du côté $[AB]$
 - $N \in [AD]$ tel que $AM = AN$
 - $P = s_D(N)$
 - $I = \text{mil}[MP]$
- b)** Montrez que $(NM) \parallel (DB)$.
- c)** Montrez que $(DI) \parallel (NM)$.
- d)** Que peut-on conclure d'après b) et c) ?
- 54)** Démontrer à l'aide du théorème de Thalès ou de sa réciproque qu'une symétrie centrale :
- conserve les directions
 - conserve les distances

- 55) Sur la figure (inexacte) ci-contre, on sait que $OA = 2$, $AB = 1,6$, $CD = 3,2$, $AC = 5,5$, $OE = 2,5$, $FD = 9$, $(AC) \parallel (BD)$ et $(EC) \parallel (FD)$.

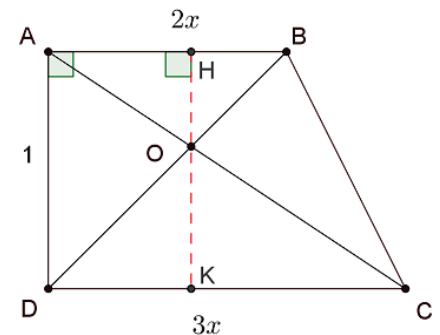
- Calculez OC et BD .
- Calculez EF et EC .
- Montrez que $(AE) \parallel (BF)$.
- Sachant que le périmètre du triangle $\Delta(ACE)$ vaut 14,62, calculez le périmètre du triangle $\Delta(BDF)$.



- 56) Soit $ABCD$ est un trapèze rectangle en A , de bases parallèles $[AB]$ et $[DC]$ et dont les diagonales se coupent en O .

Sachant que $AD = 1$, $AB = 2x$ et $CD = 3x$, calculez les aires des 4 triangles $\Delta(OAB)$, $\Delta(OBC)$, $\Delta(OC D)$ et $\Delta(ODA)$ en fonction de x .

Indication : commencez par calculer OH et OK .



- 57) On donne un rectangle $ABCD$ avec $AB = DC = x$ et $AD = BC = 1$. Les diagonales se coupent en E , M est le milieu de $[CD]$ et $F \in (AC) \cap (BM)$.

- Figure !
- Exprimez l'aire des triangles $\Delta(ADE)$, $\Delta(ABE)$, $\Delta(BEF)$, $\Delta(BFC)$, $\Delta(MCF)$ et du quadrilatère $EFMD$ en fonction de x . Vérifiez si le compte est bon !

- 58) Soit ABC un triangle quelconque, $A' = \text{mil}[BC]$, $B' = \text{mil}[AC]$ et $C' = \text{mil}[AB]$.

- Faites une figure soignée.
- Montrez que $(B'C') \parallel (BC)$ et que $\frac{B'C'}{BC} = \frac{1}{2}$.
- Soit $G \in (BB') \cap (CC')$. Montrez que $\frac{BG}{BB'} = \frac{CG}{CC'}$ et déterminer la valeur de ce rapport.
- De même, soit $G' \in (BB') \cap (AA')$. Montrez que $\frac{AG'}{AA'} = \frac{BG'}{BB'}$ et déterminer la valeur de ce rapport.
- Quelle conclusion pouvez-vous en tirer pour les points G et G' ?
- Comment appelle-t-on les droites (AA') , (BB') et (CC') ainsi que le point G ?
- Énoncez le théorème que vous venez de démontrer.

- 59) Sur la figure (non exacte) ci-dessous, $ABCD$ est un parallélogramme. Une droite coupe $[BD]$ en E , $[DC]$ en F et (BC) en G de telle sorte que $AE = 5$ cm et $EF = 3$ cm . Calculer FG !

