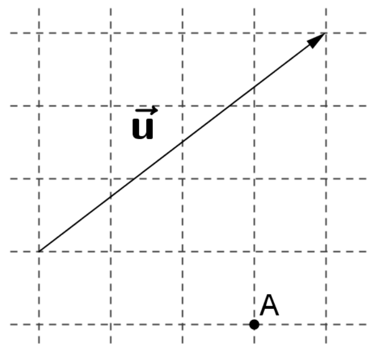
CHAPITRE III VECTEURS

EXERCICES

1) Recopiez le point A et le vecteur $\vec{u}$ sur le quadrillage de votre feuille :



a) Construisez le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

b) Construisez le point C tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{u}$.

c) Construisez le point D tel que $\overrightarrow{AD} = -\vec{u}$.

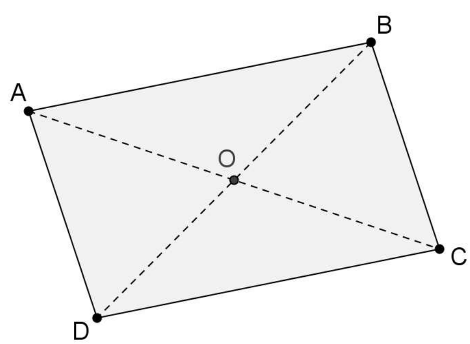
d) Construisez le point E tel que $\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{DC}$.

e) Quel est le représentant de $\overrightarrow{AC}$ d'origine D ?

f) Quel est le représentant de $\overrightarrow{DA}$ d'extrémité C ?

g) Calculez $\|\vec{u}\|$ (unité = côté d'un carré du quadrillage).

2) ABCD = # et ses diagonales se coupent en O :



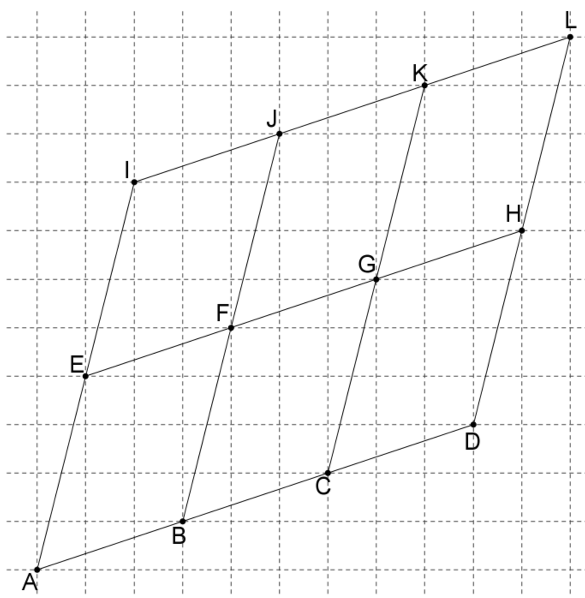
a) Complétez par un vecteur égal :

- $\overrightarrow{DA} = \ldots$
- $\overrightarrow{CD} = \ldots$
- $\overrightarrow{OA} = \ldots$
- $\overrightarrow{DO} = \ldots$

b) Que pensez-vous des affirmations suivantes ? Justifiez vos réponses !

- $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$
- $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$
- $BA = DC$
- $[DO] = [OB]$
- $O \in \overrightarrow{BD} \cap \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{DD} = \overrightarrow{AA}$

3) En utilisant les points A, B, …, L de la figure suivante, donnez trois autres représentants de chacun des vecteurs suivants :



a) $\overrightarrow{EF}$ **c)** $\overrightarrow{FK}$ **e)** $\overrightarrow{BJ}$ **g)** $\overrightarrow{GI}$

b) $\overrightarrow{LH}$ **d)** $\overrightarrow{IK}$ **f)** $\overrightarrow{LF}$ **h)** $\overrightarrow{FI}$

4) Soit un triangle quelconque $\Delta(EFG)$.

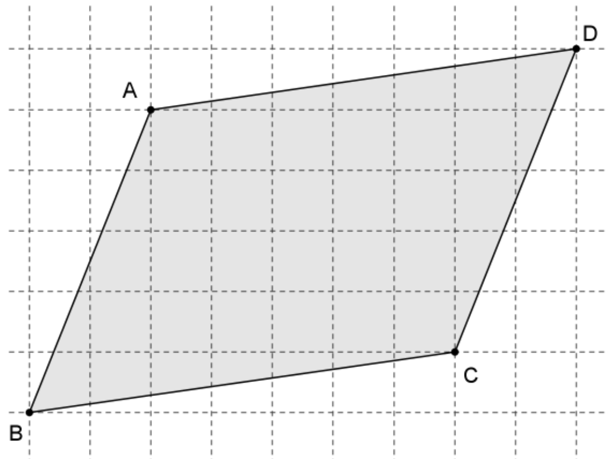
a) Construisez :

- le point H tel que $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$
- le point I tel que $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{FG}$
- le point J tel que $\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{EG}$

b) Montrez que $E = \text{milieu}[IH]$, $F = \text{milieu}[IJ]$ et $G = \text{milieu}[HJ]$.

c) Quel est le rapport des aires des triangles $\Delta(EFG)$ et $\Delta(IJH)$? Justifiez votre réponse !

5) Reproduisez la figure suivante (ABCD = #) :



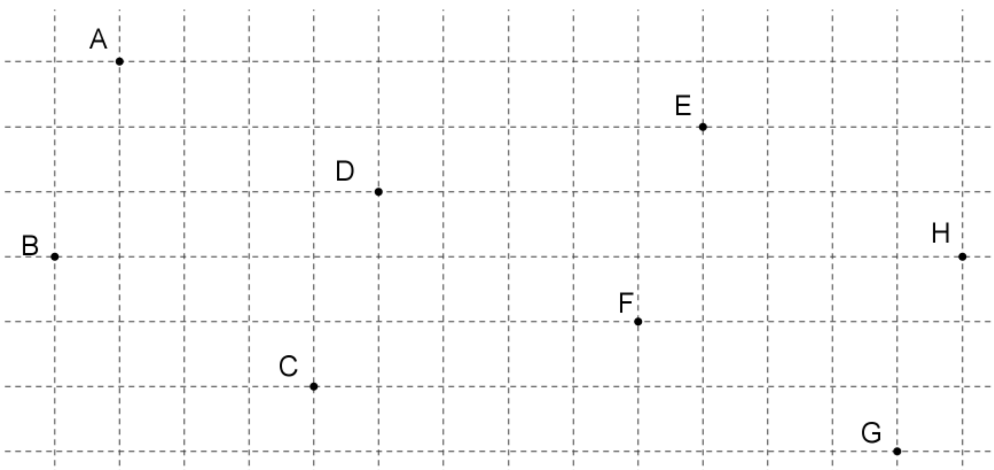
a) Construisez les points E, F, G, H et I définis par :

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AC}; \quad \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AC}; \quad \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AC}; \quad \overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{BC}; \quad \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AC}$$

b) Quelle est la nature des quadrilatères BCEF, DGEC et ABHI ?

c) Que représente le point A pour le segment $[IC]$?

6) En vous servant uniquement des points A, B, …, G de la figure suivante :



a) Déterminez tous les représentants de $\overrightarrow{AB}$.

b) Déterminez tous les représentants de $\overrightarrow{AC}$.

c) Déterminez tous les représentants de $\overrightarrow{AD}$.

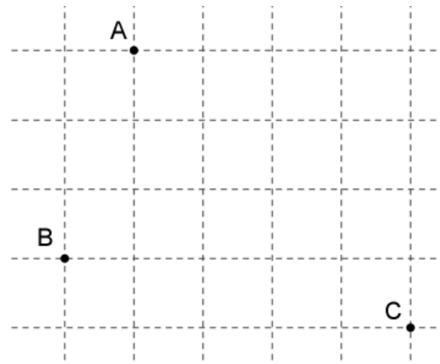
d) Déterminez tous les représentants de $\overrightarrow{BC}$.

e) Déterminez tous les représentants de $\overrightarrow{DH}$.

f) Déterminez tous les parallélogrammes non aplatis de la figure.

7) Reproduisez la figure ci-contre.

a) Construisez les points D, E, F, G et H tel que :

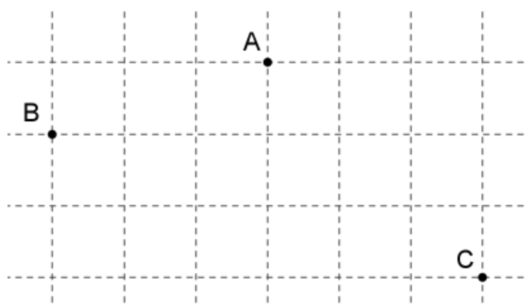


- $3 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$
- $-\dfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$
- $-2 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CF}$
- $\overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{BE}$
- $3 \cdot \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{GH}$

b) Complétez en vous basant sur votre figure :

- $\overrightarrow{AG} = \cdots \overrightarrow{AH}$ donc …
- $\overrightarrow{HC} = \cdots \overrightarrow{HB}$ donc …

8) Reproduisez la figure suivante puis construisez les points D, E, F définis par $\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BA} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{FE}$. Énumérez tous les parallélogrammes de la figure obtenue !



9) Pour chacune des relations suivantes, faites une figure qui lui correspond :

a) $\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BC}$

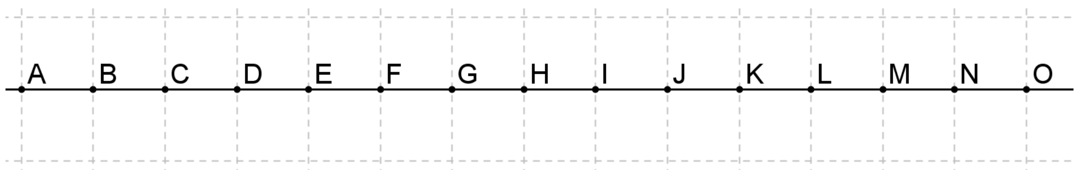
d) $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$

e) $\overrightarrow{AC} = -\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

10) Sur une droite d, marquez deux points O et A tels que $OA = 3\,\text{cm}$ puis placez sur cette droite les points B, C, D et E tels que :

$$3\cdot\overrightarrow{OB} = 4\cdot\overrightarrow{OA}\ ;\ 2\cdot\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BO}\ ;\ \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{OC}\ ;\ \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}.$$

11) Soient A, B, …, O 15 points alignés et régulièrement espacés :



Complétez les égalités suivantes :

a) $\overrightarrow{AE} = \ldots\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB} = \ldots\overrightarrow{AE}$

b) $\overrightarrow{GD} = \ldots\overrightarrow{IO}$ et $\overrightarrow{IO} = \ldots\overrightarrow{GD}$

c) $\overrightarrow{CL} = \ldots\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{EB} = \ldots\overrightarrow{CL}$

d) $\overrightarrow{GG} = \ldots\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{IL} = \ldots\overrightarrow{GG}$

e) $\overrightarrow{DH} = \ldots\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{FA} = \ldots\overrightarrow{HD}$

f) $\overrightarrow{BM} = \ldots\overrightarrow{GO}$ et $\overrightarrow{GO} = \ldots\overrightarrow{MB}$

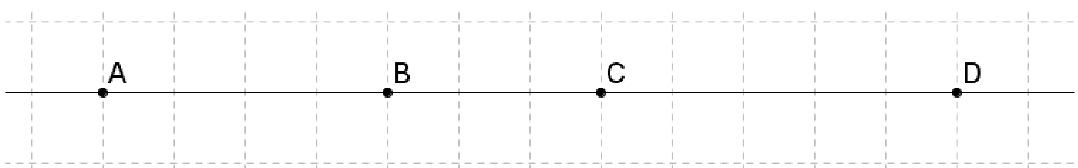
g) $\overrightarrow{OH} = \ldots\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OE} = \ldots\overrightarrow{OH}$

h) $\overrightarrow{AO} = \ldots\overrightarrow{LG}$ et $\overrightarrow{OA} = \ldots\overrightarrow{CH}$

i) $\overrightarrow{NF} = \ldots\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{FN} = \ldots\overrightarrow{EI}$

j) $\overrightarrow{JE} = \ldots\overrightarrow{DK}$ et $\overrightarrow{KD} = \ldots\overrightarrow{JE}$

12) Voici une figure avec 4 points alignés A, B, C et D :



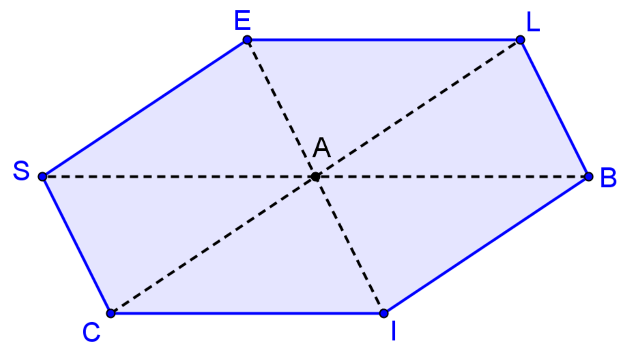
a) Complétez les relations de colinéarité suivantes :

- $\overrightarrow{AC} = \ldots\cdot\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{CD} = \ldots\cdot\overrightarrow{BA}$
- $\overrightarrow{BD} = \ldots\cdot\overrightarrow{DA}$
- $\overrightarrow{BA} = \ldots\cdot\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{DA} = \ldots\cdot\overrightarrow{CB}$
- $\overrightarrow{CC} = \ldots\cdot\overrightarrow{BA}$

b) Construisez sur la figure ci-dessus les points P, Q, R, S et T (***sans explication***) :

- $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{CB}$
- $\overrightarrow{QA} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$
- $\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{RB} = \vec{0}$
- $6\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$
- $\overrightarrow{TA} + 3\overrightarrow{BC} = \vec{0}$

13) Sur la figure suivante, les quadrilatères (SALE), (SAIC), (SCAE), (BAEL), (LAIB) et (BACI) sont des # :



En utilisant uniquement les points de la figure :

a) Donnez tous les représentants des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{ES}$.

b) Complétez chacune des égalités suivantes :

- $-\frac{1}{2}\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{\ldots}$
- $\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{EL} = \overrightarrow{\ldots}$
- $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{LB} = \overrightarrow{\ldots}$
- $\overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{\ldots}$

14) Dans chacun des deux cas suivants analysez si les points C, D et F sont alignés :

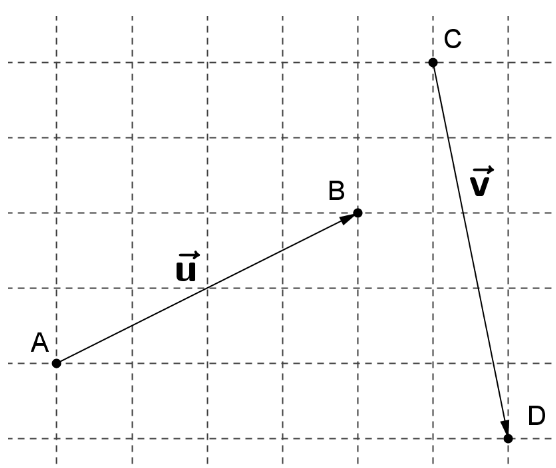
a) $2 \cdot \overrightarrow{FD} + 3 \cdot \overrightarrow{DC} - 4 \cdot \overrightarrow{CF} = \vec{0}$

b) $x \cdot \overrightarrow{FD} + (1-x) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CF}$ avec $x \in \mathbb{R}^*$

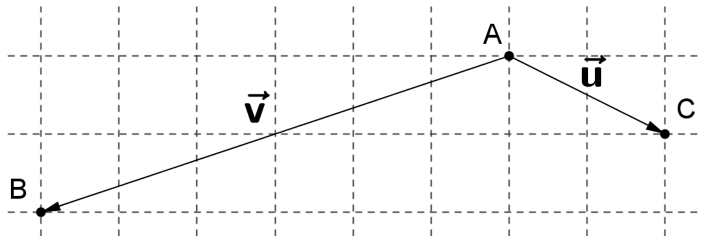
15) Soient A, B, C trois points et a, b, c trois nombres réels tel que $a \neq b$. Montrez que si $a \cdot \overrightarrow{AB} + b \cdot \overrightarrow{BC} + c \cdot \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ alors A, B, C sont alignés.

16) Reproduisez chacune des figures suivantes, puis construisez les vecteurs et les points demandés :

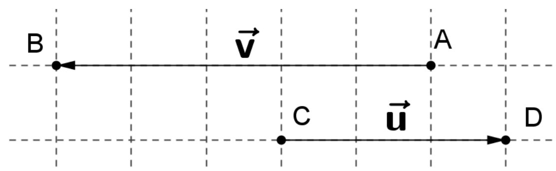
a) $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AE}$ et $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{AF}$



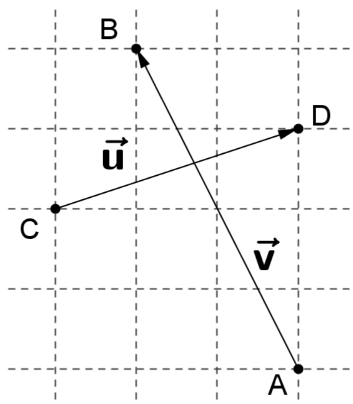
b) $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{d} = \vec{v} - \vec{u} = \overrightarrow{AE}$



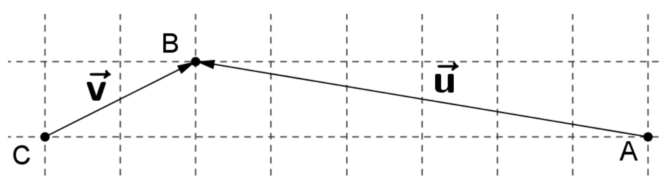
c) $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{CE}$ et $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{BF}$



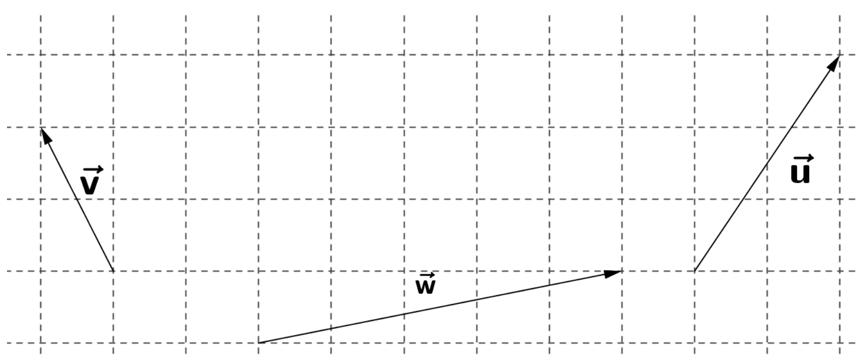
d) $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{CE}$ et $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{BF}$



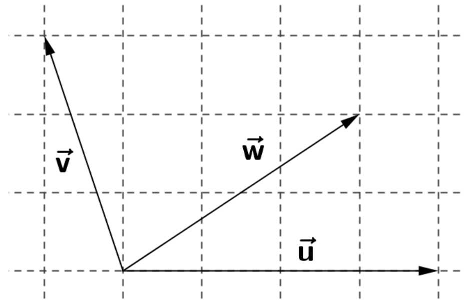
e) $\vec{s} = \vec{u} + 2 \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{AE}$



f) $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ et $\vec{t} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$



g) $\vec{a} = \vec{u} - \vec{v}$, $\vec{b} = \vec{v} - \vec{w}$, $\vec{c} = \vec{w} - \vec{u}$ et $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$



17) En vous servant de la figure, donnez trois représentants de chacun des vecteurs suivants:

a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}$.

b) $\vec{b} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{LI}$.

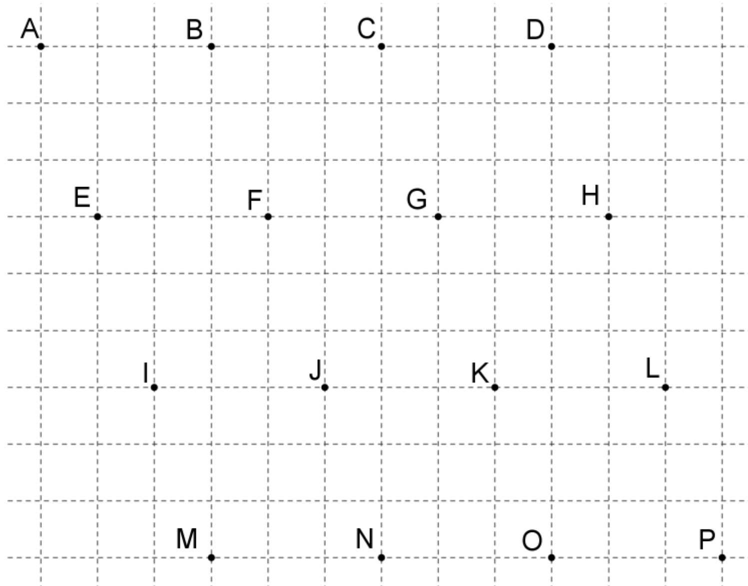
c) $\vec{c} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{LO}$.

d) $\vec{d} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AM}$.

e) $\vec{e} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{GP}$.

f) $\vec{f} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CP}$.

g) $\vec{g} = \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{BI}$



18) Soient un point A et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On définit les points C, D, E et F par :

$$\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v},\ \overrightarrow{AD} = \vec{u} - \vec{v},\ \overrightarrow{AE} = -\vec{u} - \vec{v} \text{ et } \overrightarrow{AF} = -\vec{u} + \vec{v}$$

Analysez la nature du quadrilatère (CDEF).

19) Soient les points A, B, C, D, E et F tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CF}$.

a) Faites une figure qui correspond à ces données.

b) Montrez que :

- $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{EF}$
- $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BE}$

20) Soit (MACH) un # tel que $MA = 3\,\text{cm}$ et $AC = 4\,\text{cm}$.

a) Figure.

b) Construisez le point B tel que $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC}$.

c) Construisez le point D tel que $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{HM} - \overrightarrow{CH}$.

21) Soit un #(ABCD) et I le point d'intersection de ses diagonales (figure !). Calculez :

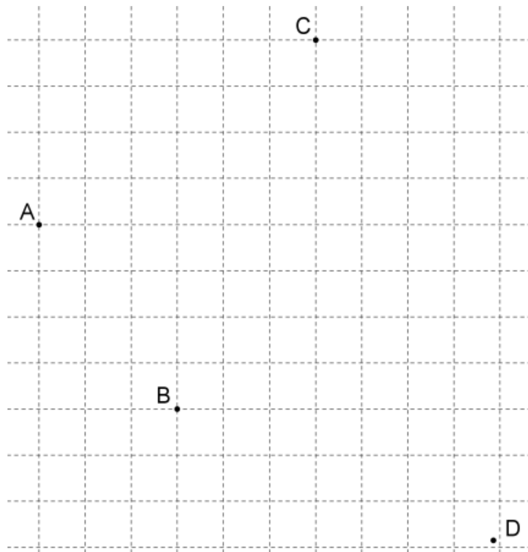
a) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AD}=$

b) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AI}=$

c) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BI}=$

d) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AI}=$

22) On donne quatre points A, B, C, D sur une grille :



a) Construisez les points E et F définis par $\vec{u}=\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$.

b) Que peut-on dire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$? Justifiez votre réponse par un calcul vectoriel !

23) Soient A, B et C les trois points non alignés de la figure ci-dessous et K le point défini par la relation : $\overrightarrow{AK}-2\overrightarrow{BK}+3\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{BC}$

a) Exprimez $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

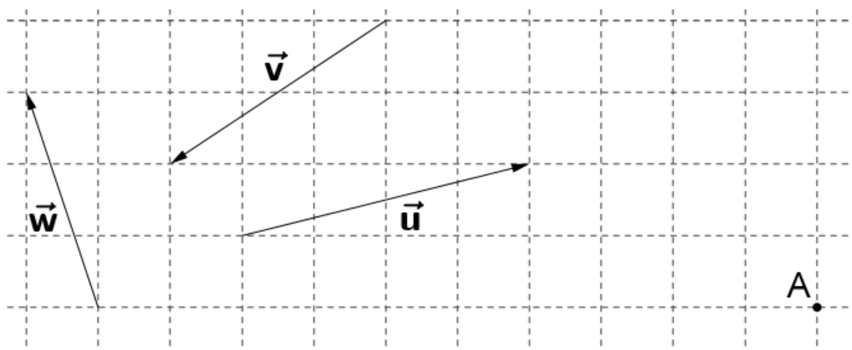
b) Déduisez-en la construction du point K sur la figure.

24) Soient deux points A et B distants de 7 cm (figure). Construisez le point C tel que

$$3\cdot\overrightarrow{AB}-2\cdot\overrightarrow{BC}+5\cdot\overrightarrow{CA}=\vec{0}.$$

25) Reproduisez la figure ci-dessous sur votre feuille (dessinez $\vec{w}$ près du bord gauche de votre feuille !) puis construisez :

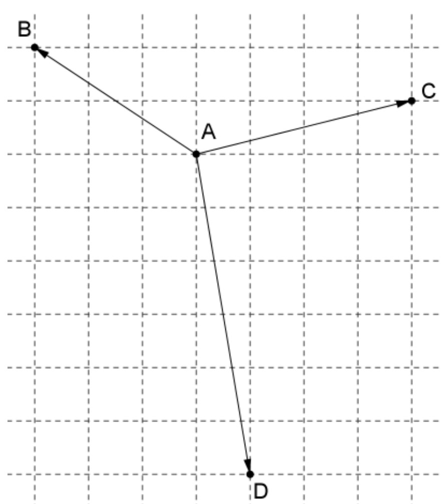
- le point B tel que $\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \vec{u}$
- le point C tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{w}$
- le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
- le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \vec{v} - \vec{u}$
- le point F tel que $\overrightarrow{FB} = \vec{w} - 3 \cdot \vec{v}$
- le point G tel que DAGC = #



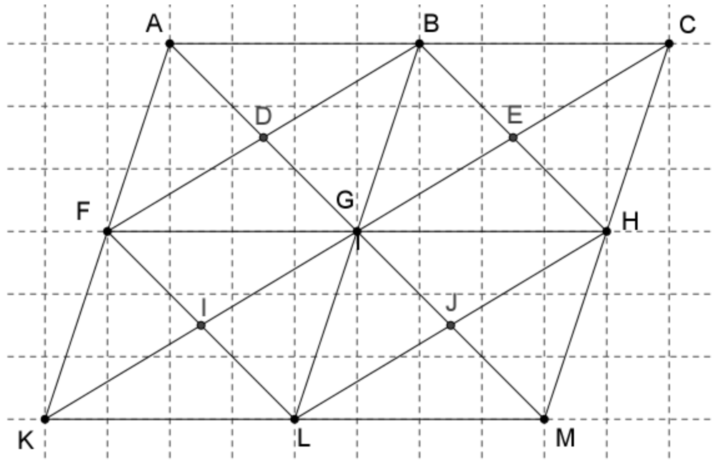
26) Simplifiez l'écriture du vecteur $\vec{u} = -\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) - \left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC}\right) + \left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DA}\right) - \overrightarrow{CB}$ où A, B, C, D sont quatre points quelconques.

27) Reproduisez la figure ci-dessous puis construisez les points M et P tels que

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA} \text{ et } \overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} - 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.$$



28) Sur la figure suivante ACMK est un #, B est le milieu de [AC], H celui de [CM], L celui de [KM] et F celui de [AK] :



a) Comptez le nombre de # non aplatis sur cette figure (uniquement ceux dont les quatre côtés sont tracés) !

b) En utilisant les points de la figure, donnez des vecteurs égaux aux vecteurs suivants :

- $\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{CG}$
- $\overrightarrow{LG}-\overrightarrow{IL}$
- $-\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{AM}$
- $-\overrightarrow{MK}+\frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{CG}$

c) Complétez par des vecteurs :

- $\ldots-\overrightarrow{HJ}=\overrightarrow{FD}$
- $\overrightarrow{FG}-3\cdot\ldots=\overrightarrow{BK}$

29) Faites les calculs ci-dessous en utilisant les points de la figure suivante :

a) $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{CB}$

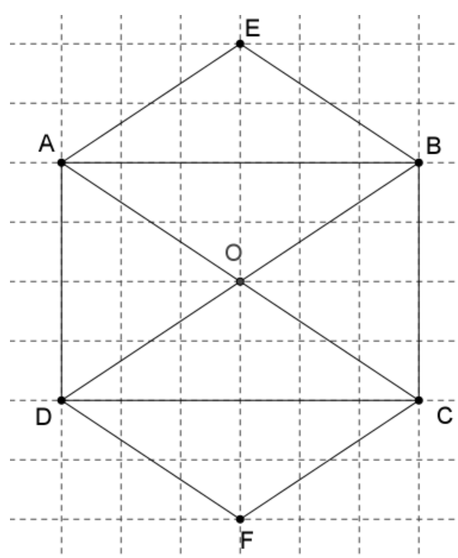
b) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DF}$

c) $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AE}$

d) $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{OC}$

e) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$

f) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}$



30) Analysez si les points A, B et C sont alignés (puis faites une figure) sachant que :

a) $2\cdot\overrightarrow{BA}=3\cdot\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}$

b) $\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{5}{6}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}$

31) Les points A, B, C, D, E et F et les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont définis par la figure ci-contre. Construisez les points G, H, I et J et les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ et $\vec{d}$ en faisant à chaque fois une nouvelle figure :

a) $\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\overrightarrow{EG}$

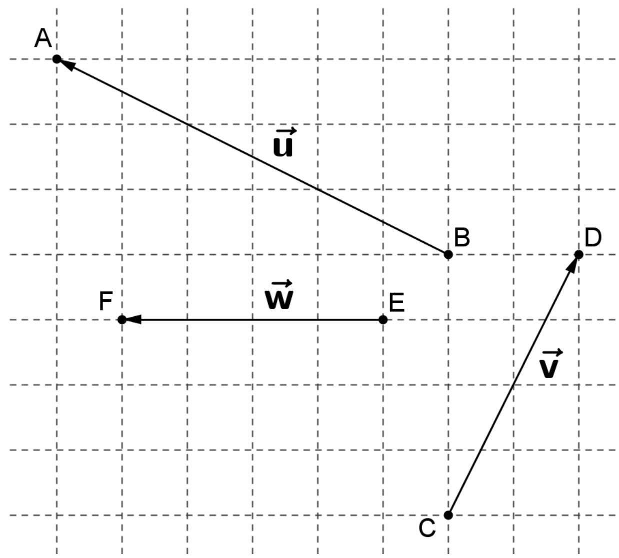
b) $\vec{b}=\vec{u}-\vec{v}=\overrightarrow{CH}$

c) $\vec{c}=\vec{v}-\vec{w}+\vec{u}$

d) $\vec{d}=3\cdot\vec{w}-2\cdot\vec{u}+\vec{v}$

e) $\overrightarrow{FI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{FE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

f) $3\cdot\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AJ}=2\cdot\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AB}$



32) Soient A et B deux points distants de 1,5 cm (figure).

a) Construisez le point C tel que : $\overrightarrow{BC}=\frac{5}{2}\cdot\overrightarrow{AB}$.

b) Construisez le point D tel que : $\overrightarrow{AD}=-\frac{4}{3}\cdot\overrightarrow{AB}$.

c) Déterminez le réel k tel que : $\overrightarrow{CD}=k\cdot\overrightarrow{AB}$.

d) Calculez $\left\|\overrightarrow{CD}\right\|$.

33) Soient ABCD un # et I le milieu de $[AC]$ (figure). En utilisant les points donnés, simplifiez le plus possible les expressions :

a) $\overrightarrow{ID}-\overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AI}$

c) $2\cdot\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{DA}$

34) Sur la figure suivante, déterminez un représentant de :

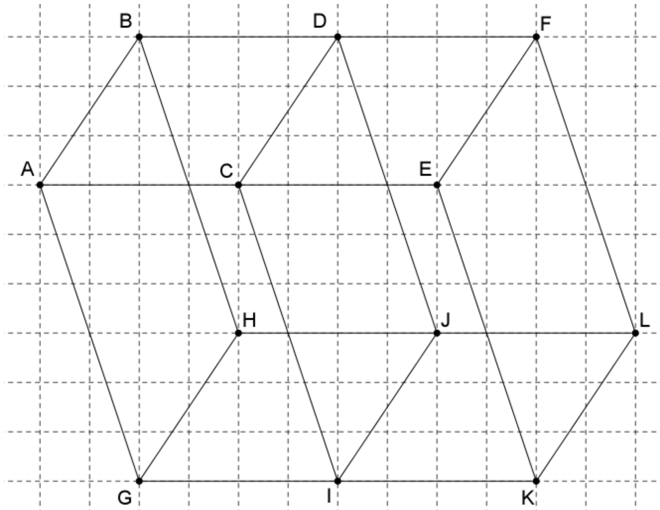
a) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{HI}+\overrightarrow{LF}$

b) $\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{JF}$

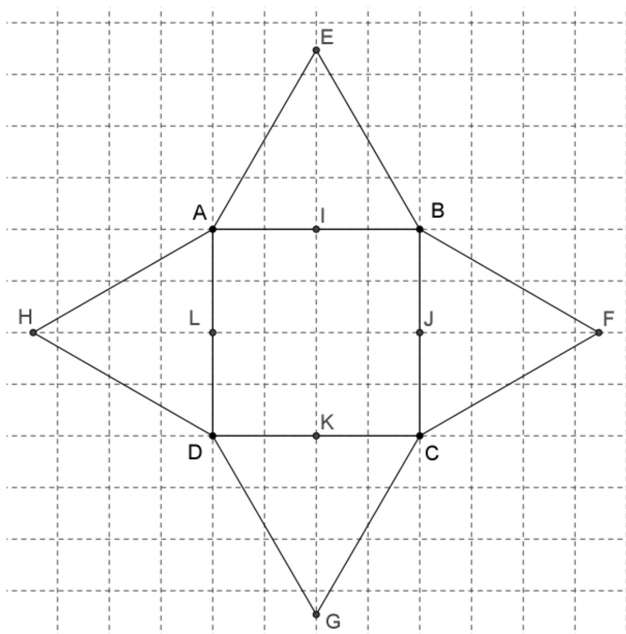
c) $\overrightarrow{EH}-2\cdot\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{LE}$

d) $\overrightarrow{BL}-\overrightarrow{DG}-\overrightarrow{CF}$

e) $\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{LI}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}-\frac{1}{3}\overrightarrow{FK}$



35) Sur la figure suivante les triangles $\Delta(ABE),\Delta(BCF)$, $\Delta(CDG)$ et $\Delta(ADH)$ sont équilatéraux et (ABCD) est un carré :



Complétez en vous servant uniquement des points de la figure :

a) $\ldots+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AE}$

b) $\overrightarrow{IE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DG}=\ldots$

c) $\ldots-\overrightarrow{FJ}=\overrightarrow{HD}$

d) $2\cdot\ldots-\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{LB}$

e) $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}=\ldots$

f) $\overrightarrow{HA}-2\cdot\ldots=\overrightarrow{CF}$

g) $2\cdot\overrightarrow{KJ}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{HA}=\ldots$

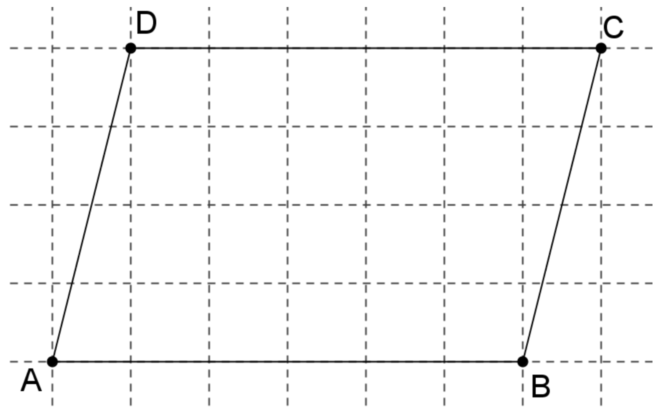
36) Reproduisez la figure suivante puis construisez les points M, N, P et Q définis par : :

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BN} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{BD} - \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BP} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$2 \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{QD} = 4 \cdot \overrightarrow{CD} - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}$



37) Soit un triangle $\Delta(ABC)$ avec $AB = 2,5\text{ cm}$, $AC = 5\text{ cm}$ et $BC = 6\text{ cm}$ et les points D et E définis par les équations vectorielles :

- $\overrightarrow{AB} + 3 \cdot \overrightarrow{BC} + 2 \cdot \overrightarrow{CD} = 3 \cdot \overrightarrow{AD}$
- $9 \cdot \overrightarrow{CE} - 14 \cdot \overrightarrow{AE} = 5 \cdot \overrightarrow{BE}$

Construisez ABC puis D et E.

38) Soient A, B, C trois points non alignés et I, J deux points définis par $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + 3 \cdot \overrightarrow{AC}$ et $4 \cdot \overrightarrow{BJ} = 3 \cdot \overrightarrow{BC}$ (figure). Montrez par un calcul vectoriel que les points A, I et J sont alignés.

39) Soit $\Delta(ABC)$ un triangle quelconque et D le point défini par : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - 3 \cdot \overrightarrow{AC}$.

a) Construisez D.

b) Exprimez $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

c) Exprimez $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

d) Exprimez $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

40) Soient A et B deux points distincts. Construisez les points M, P, Q, R, S, T, U et V définis par les équations vectorielles :

a) $\overrightarrow{AM} = 5 \cdot \overrightarrow{BM}$

b) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PB}$

c) $\overrightarrow{BQ} - 3 \cdot \overrightarrow{AQ} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$

d) $\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{RB} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$

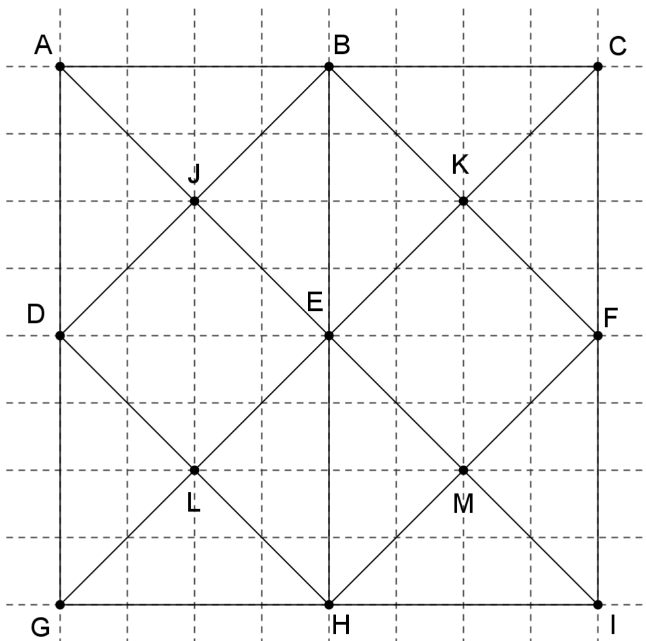
e) $2 \cdot \overrightarrow{AS} - 3 \cdot \overrightarrow{BS} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$

f) $\overrightarrow{BT} - 2 \cdot \overrightarrow{AT} = 2 \cdot \overrightarrow{BA}$

g) $2 \cdot \overrightarrow{AU} - 3 \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

h) $\overrightarrow{VA} - 5 \cdot \overrightarrow{BV} = \vec{0}$

41) En considérant la figure ci-contre, complétez :



a) $\overrightarrow{AM} = \ldots \overrightarrow{FK}$

b) $\overrightarrow{FK} = \ldots \overrightarrow{MA}$

c) $\overrightarrow{BE} = \ldots \overrightarrow{BJ} - \ldots \overrightarrow{FD}$

d) $\overrightarrow{LE} + \overrightarrow{CF} = \ldots$

e) $\overrightarrow{JM} - \overrightarrow{LK} = \ldots$

f) $\overrightarrow{DL} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{MF} - \overrightarrow{AB} = \ldots$

g) $\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{CK} - \overrightarrow{LG} - \overrightarrow{MI} = \ldots$

h) $\left\|\overrightarrow{LC}\right\| = \ldots$ (unité = côté d'un carré du quadrillage)

42) Etant donné un triangle $\Delta(ABC)$ quelconque, construisez les points Q, R, S, T, U et V définis par les équations vectorielles :

a) $\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{RB}-\overrightarrow{RC}=\vec{0}$

c) $2\cdot\overrightarrow{AS}-\overrightarrow{BS}-\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{AB}$

d) $2\cdot\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\vec{0}$

e) $\overrightarrow{AU}-2\cdot\overrightarrow{BU}+3\cdot\overrightarrow{CU}=2\cdot\overrightarrow{AB}$

f) $\overrightarrow{AV}-3\cdot\overrightarrow{VB}=2\cdot\left(\overrightarrow{CV}+\overrightarrow{AV}-\overrightarrow{BC}\right)$

43) Soient A, B et M trois points, montrez que :

a) M = milieu de $[AB]\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$.

b) M = milieu de $[AB]\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=2\cdot\overrightarrow{AM}$.

44) Soit un triangle quelconque $\Delta(ABC)$ et I le milieu de [BC].

Montrez que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\cdot\overrightarrow{AI}$.

45) On donne le parallélogramme #(ABCD), et on définit les points E et F par les égalités vectorielles $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BE}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DF}=\vec{0}$. Démontrez vectoriellement que C est le milieu de [EF]. Faites d'abord une figure !

46) Soit ABC un triangle quelconque et D, E les points définis par $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AC}$.

a) Faites une figure.

b) Prouvez que C est le milieu de $[DE]$.

47) Tracez deux points A et B tels que $AB=5\text{ cm}$.

a) Construisez les points C, D et E définis par :

- $2\cdot\overrightarrow{AC}=3\cdot\overrightarrow{CB}$
- $3\cdot\overrightarrow{AD}-2\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{9}{5}\cdot\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$

b) Montrez que B est le milieu de $[CE]$.

48) Soit G le centre de gravité d'un triangle $\Delta(ABC)$, A', B', C' les milieux de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement. Montrez que :

a) $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$.

b) G est également le centre de gravité du triangle A'B'C'.

c) Construisez les points D, E, F tels que $\overrightarrow{A'D}=2\cdot\overrightarrow{A'G}$, $\overrightarrow{B'E}=2\cdot\overrightarrow{B'G}$ et $\overrightarrow{C'F}=2\cdot\overrightarrow{C'G}$ puis montrez que G est aussi le centre de gravité du triangle DEF.

49) Soient ABC un triangle quelconque, D le point tel que $A=\text{milieu de}[CD]$, E le point tel que $B=\text{milieu de}[AE]$ et F le point tel que $C=\text{milieu de}[BF]$.

a) Figure.

b) En désignant par G et H les centres de gravité des triangles ABC et DEF respectivement, montrez que $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=3\cdot\overrightarrow{GH}$.

c) Déduisez-en que $G=H$.

50) Soit ABC un triangle équilatéral de côté 4 cm (figure). Construisez les points Q et T tels que :

a) $\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{BC}$

b) $2\cdot\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TC}=\vec{0}$

51) Soient ABC un triangle isocèle avec $AB=AC=6\text{ cm}$ et $BC=4\text{ cm}$ de centre de gravité G et D, E, F trois points définis par les égalités : $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{CF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CG}$.

a) Figure.

b) Que peut-on dire des points D, E, F ? Justifiez votre réponse !

c) Montrez par un calcul vectoriel que G est aussi le centre de gravité de DEF.

52) Soient ABC un triangle quelconque, G son centre de gravité et D, E, F trois points définis par : $\overrightarrow{AD}+3\cdot\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\vec{0}$, $2\cdot\overrightarrow{EA}-3\cdot\overrightarrow{EC}=2\cdot\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{AF}-4\cdot\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AC}-4\cdot\overrightarrow{FB}$.

a) Exprimez $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{CF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.

b) Déduisez-en que G est aussi le centre de gravité du triangle DEF.

53) Soit G le centre de gravité d'un triangle ABC.

a) Montrez qu'il existe un point unique D tel que $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=3\cdot\overrightarrow{AB}$.

b) Que peut-on dire du quadrilatère ABGD ?

54) Soit G le centre de gravité d'un triangle $\Delta(ABC)$, A', B', C' les milieux de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement.

a) Construisez les points S, P et R définis par :

$\overrightarrow{GS} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ $\quad\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}$ $\quad\overrightarrow{GR} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$

b) Montrez que :

$\overrightarrow{GS} = -\overrightarrow{GA}$ $\quad\overrightarrow{GP} = -\overrightarrow{GB}$ $\quad\overrightarrow{GR} = -\overrightarrow{GC}$

c) Quelle est l'isométrie (vue en 5^e !) qui transforme le triangle ABC en le triangle SPR ?

55) Soient deux triangles $\Delta(ABC)$ et $\Delta(DEF)$ et leurs centres de gravité G et G' respectivement.

a) Montrez que $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 3 \cdot \overrightarrow{GG'}$

b) Déduisez-en une condition nécessaire et suffisante pour que deux triangles aient le même centre de gravité.

56) Soient A, B, C trois points non alignés et I, J deux points définis par les équations vectorielles : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ et $4\overrightarrow{BJ} = 3\overrightarrow{BC}$.

a) Figure !

b) Montrez que A, I et J sont alignés.

57) Soit un triangle $\Delta(ABC)$ et G son centre de gravité .

a) Construisez les points I, J, K sachant que :

- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{BJ} = 2 \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$

b) Montrez que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes en G.