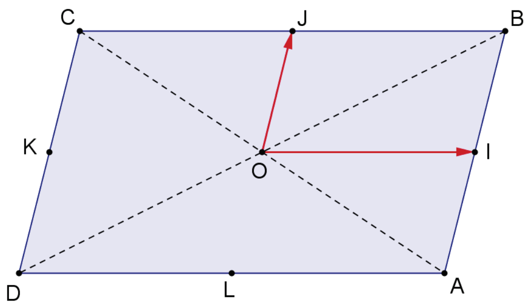
CHAPITRE IV

GEOMETRIE ANALYTIQUE

1) Soit *ABCD* un parallélogramme de centre *O* et *I*, *J*, *K*, *L* les milieux des quatre côtés :



a) Déterminez les coordonnées des points *O, A, B, C, D, I, J, K* et *L*

i) dans le repère $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$

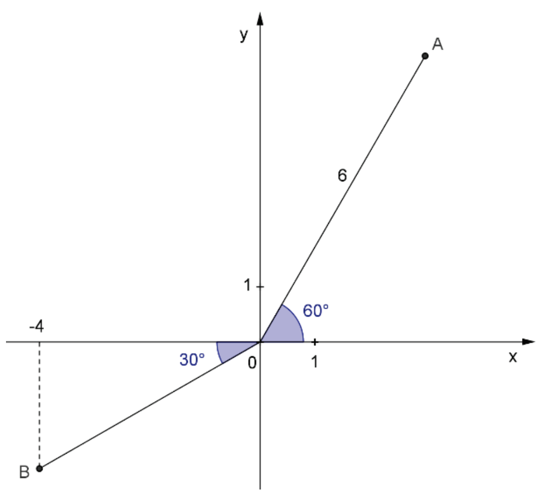
ii) dans le repère $\left(C,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$

iii) dans le repère $(B,\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$

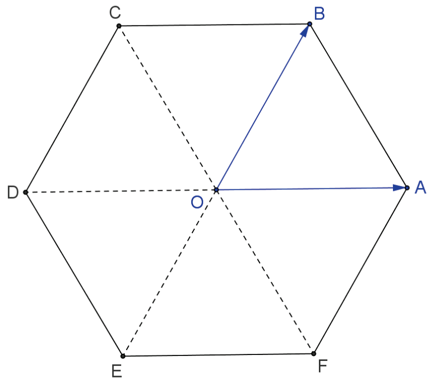
b) Déterminez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{LC}$, $\overrightarrow{BD}$ *et* $\overrightarrow{JA}$ dans le repère $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

2) Soient $\Delta(ABC)$ un triangle quelconque et G son centre de gravité. Calculez les coordonnées de G dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

3) Calculez les coordonnées *exactes* des points A et B de la figure suivante :



4) Soit $ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre O :



Déterminez les coordonnées des vecteurs suivants dans le repère $\left(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$:

$$\overrightarrow{AF},\ \overrightarrow{FE},\ \overrightarrow{ED},\ \overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{BF},\ \overrightarrow{BE},\ \overrightarrow{FD},\ \overrightarrow{DB}.$$

5) Le plan étant muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne $A(5;-7,3)$, $B(-9;0)$, $C\left(\frac{1}{2};-3\right)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\2,4\end{pmatrix}$. Calculez les coordonnées de :

a) $\overrightarrow{AB}$

b) $2\cdot\overrightarrow{CA}$

c) $-\overrightarrow{BC}$

d) $\vec{u}+\vec{v}$

e) $\vec{u}-\vec{v}$

f) $3\vec{u}+2\vec{v}$

g) $3\overrightarrow{BA}-7\overrightarrow{CB}$

h) $\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}+4\overrightarrow{BA}$

6) On donne $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ dans un repère du plan. Calculez :

$\vec{a}=3\cdot\vec{u}-2\cdot\vec{v}+\vec{w}$.

$\vec{b}=-\frac{1}{2}\cdot\vec{v}+2\cdot\vec{u}-\frac{3}{2}\cdot\vec{w}$.

7) Dans un repère on donne $P(-5;-3)$, $Q(3;-1)$, $R(2;3)$, $S(-6;1)$. Montrez par deux méthodes différentes que $PQRS=\#$.

8) Soient les points $A(-2;0)$, $B\left(1;\frac{1}{2}\right)$ et $C(-20;-3)$ dans un repère du plan.

a) Calculez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $5\cdot\overrightarrow{CB}$.

b) Calculez les coordonnées du milieu I de $[AC]$.

c) Calculez les coordonnées du centre de gravité G du $\Delta(ABC)$.

d) Calculez les coordonnées du point D sachant que $ABDC$ est un parallélogramme.

e) Calculez les coordonnées du point E tel que $3 \cdot \overrightarrow{BA} + 7 \cdot \overrightarrow{EC} = \vec{0}$.

9) Soient $A(-5;7)$, $B(4;-9)$ et $C(-8;-2)$ dans un repère du plan.

a) Déterminez les points D, E, F définis par les équations vectorielles suivantes :

$2 \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{CE} - 3 \cdot \overrightarrow{AB} + 3 \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BE}$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{AC} + 3 \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} - 2 \cdot \overrightarrow{BF}$

b) Montrez que les triangles $\Delta(ABC)$ et $\Delta(DEF)$ ont le même centre de gravité.

10) Le plan étant muni d'un repère, on donne $A(11;-2)$, $B(-4,5;1)$, $C(-17;13)$, $D(x;-5)$ et $E(-3;y)$. Déterminez les réels x et y pour que:

a) $2\overrightarrow{AD} - 6\overrightarrow{EB} = \vec{0}$

b) $5\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - 8\overrightarrow{EA}$

c) $\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{DE}$

d) $\overrightarrow{EA} - 11\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BE} + 4\overrightarrow{EA}$

11) Soient $A(-8;3)$, $B(5;-7)$, $C(-1;-3)$ et $D(5;0)$ dans un repère du plan.

a) Déterminez E et F tels que $(ABCE) = \#$ et $(BFDC) = \#$.

b) Déterminez H tel que $3 \cdot \overrightarrow{BA} - 5 \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} - 2 \cdot \overrightarrow{AH}$.

c) Déterminez K tel que $\overrightarrow{AK} - 3 \cdot \overrightarrow{KB} + 2 \cdot \overrightarrow{CK} = \vec{0}$.

d) Déterminez $A' = mil[AB]$, $B' = mil[BC]$, $C' = mil[CD]$ et $D' = mil[DA]$. Que peut-on dire du quadrilatère $(A'B'C'D')$?

12) Dans un repère du plan on donne $A(-3;5)$, $B(4;2)$, $C(7;-5)$ et on appelle A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

a) Calculez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{B'C'}$.

b) Que peut-on conclure en comparant ces deux vecteurs ?

c) Calculez $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$

13) Soient $A(3x;5)$, $B(x-6;y+13)$, $C(8;y)$, $D(5x+1;-8)$, $E(5;-1)$ et $F(x+1;-7)$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Analysez s'il est possible de trouver x et y tel que :

a) E soit le milieu de $[AB]$?

b) *(ABCD)* soit un # ?

c) E soit l'image de A par la symétrie de centre D ?

d) E soit le centre de gravité du triangle $\Delta(ABC)$?

e) $t_{\overrightarrow{DA}}(F)=E$?

14) Soient $A(-5,4)$, $B(4,3)$ et $C(1,-4)$ dans un repère du plan.

a) Déterminez les coordonnées du centre de gravité G du triangle $\Delta(ABC)$.

b) Déterminez les coordonnées du milieu A' de $[BC]$.

c) Déterminez les coordonnées du symétrique D de G par rapport à A'.

d) Quelle est la nature du quadrilatère *(GBDC)* ? Justifiez !

15) Le plan étant muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on donne $A(24;x)$, $B(-31;-16)$, $C(-3;77)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\15\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\18\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-3\\11\end{pmatrix}$.

a) Analysez si $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère du plan.

b) Même question pour $(O,\vec{u},\vec{w})$.

c) Même question pour $(A,\vec{v},\vec{w})$.

d) Même question pour $(B,-\vec{u},2\vec{w})$.

e) Pour quelle(s) valeur(s) de x les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils colinéaires ?

16) Soient $A(-1;5)$, $B(3;-3)$ et $C(1;x)$ dans un repère du plan. Déterminez x pour que A, B et C soient alignés.

17) Soient $A(-13;7)$, $B(2;-5)$, $C\left(x;\frac{9}{5}\right)$ et $D(-3;y)$ dans un repère du plan. Déterminez x et y pour que A, B, C, D soient alignés.

18) Soient $A(-1;8)$, $B(2;5)$, $C(7;-16)$, $D(3;-4)$ et $E(x;-9)$ dans un repère du plan.

a) Analysez si parmi les points A, B, C et D il y en a trois qui sont alignés.

b) Déterminez x pour que A, D et E soient alignés.

19) Soient $A(-7;3)$, $B(2;5)$, $C(4;-2)$ et $D(-12,6;22,6)$ dans un repère du plan. Montrez que $ACBD$ est un trapèze.

20) Soit $ABCD$ un parallélogramme, I le milieu de $[AD]$, P le point défini par $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $Q=s_A(I)$ (figure !). En choisissant un repère approprié, montrez que les points Q, P et C sont alignés !

21) Soient les points $A(-4,-3)$, $B(2,-1)$, $C(0,3)$ et $D(-8,5)$ dans un repère du plan.

a) Est-ce que $ABCD$ est un parallélogramme ?

b) Est-ce que $ABCD$ est un trapèze ?

c) Déterminer les coordonnées du point E tel que $ABCE$ soit un parallélogramme.

d) Montrer *analytiquement* et *géométriquement* que A, E et D sont alignés.

22) Dans un repère du plan représentez les droites suivantes et en déterminer une équation cartésienne :

a) la droite d passant par $A(-6;5)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\binom{3}{-7}$;

b) la droite e passant par $B(-3,5)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\binom{1}{-2}$;

c) la droite f passant par $C(3,0)$ et parallèle à d ;

d) la droite g passant par les points A et B ;

e) l'axe des abscisses ;

f) l'axe des ordonnées.

23) Dans un repère du plan on donne les points $E(9;-7)$, $F(-2;0)$ et $G(3,4)$. a) Déterminez une équation cartésienne de chacune des droites suivantes : (EF), (FG) et (EG). b) Déterminez le point d'abscisse 1 de chaque droite. c) Déterminer le point d'ordonnée 2 de chaque droite.

24) Soient les points $A(-4,1)$, $B(12,-3)$ et $C(24,-6)$ dans un repère du plan.

a) Est-ce que A, B et C sont alignés ?

b) Déterminez une équation cartésienne de la droite (AB).

c) Les points $O(0,0)$ et $D(21,-5)$ appartiennent-ils à la droite (AB) ?

25) Soient $R(3;-2)$, $S(5;1)$, $T(-4;-1)$ dans un repère du plan.

a) Déterminez une équation cartésienne de *(RS)*.

b) Est-ce que $T \in (RS)$?

c) Déterminez une équation cartésienne de la droite d telle que $T \in d$ et $d \parallel (RS)$.

d) Trouvez trois autres points de *d*.

26) Déterminez un point à coordonnées entières et un vecteur directeur de chacune des droites suivantes, puis représenter ces droites dans un repère orthonormé du plan.

a) $d \equiv 2x + y - 3 = 0$

b) $e \equiv -2x + 5y - 4 = 0$

c) $f \equiv 3x - y - 5 = 0$

d) $g \equiv x + 4y + 2 = 0$

e) $h \equiv x = 6$

f) $i \equiv y = 4$

27) Soient $A(2;-3)$, $B(-1;4)$ et $C(7;0)$ dans un repère du plan.

a) Vérifiez que $\Delta(ABC)$ est un vrai triangle.

b) Calculez le centre de gravité G de ce triangle.

c) Déterminez les équations des trois médianes de ce triangle et vérifiez que G appartient à chacune de ces droites.

28) Déterminez l'équation réduite des droites suivantes :

a) d passe par $A(-4,3)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

b) e passe par $B\left(\frac{2}{3},-1\right)$ et a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) f passe par $C(2,1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{w}\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}$.

d) g passe par $E(3;1)$ et par $F(-5;4)$.

29) Déterminez l'équation réduite de la droite a qui passe par le point A et qui est parallèle à la droite d dans les cas suivants:

a) $A(-3;5)$ et $d \equiv y = 3x - 67$.

b) $A(6;1)$ et $d \equiv 2x - 3y + 12 = 0$.

30) Soient $A(6;-1)$ et $d \equiv 7x - 2y - 3 = 0$ dans un repère du plan.

a) Déterminez l'équation réduite de la droite d.

b) Déterminez l'équation réduite de la droite a telle que $A \in a$ et $a \parallel (Ox)$.

c) Déterminez l'l'équation réduite de la droite b telle que $A \in b$ et $b \parallel d$.

31) Soient $d \equiv 7x - 9y + 11 = 0$ et $d' \equiv ax + 4y - 1 = 0$ dans un repère du plan. Pour quelle(s) valeur(s) de a a-t-on $d \parallel d'$?

32) On donne quatre droites par leurs équations cartésiennes dans un repère du plan :

$$d_1 \equiv x - y + 2 = 0 \qquad d_2 \equiv 2x + 3y + 6 = 0$$
$$d_3 \equiv 2x + 7 = 0 \qquad d_4 \equiv -5y + 15 = 0$$

a) Pour chacune de ces droites, déterminez son équation réduite puis représentez-la.

b) Vérifiez si les points $A\left(-\frac{7}{2};\frac{1}{3}\right)$, $B(1;3)$ et $O(0;0)$ appartiennent à ces droites.

33) Dessinez dans un repère les droites *a*, *b*, *c* passant par l'origine et ayant pour pentes respectivement $\frac{5}{2}$, 0 et $-\frac{2}{3}$.

34) Voici les équations cartésiennes de neuf droites dans un repère du plan :

$d_1 \equiv 4 = \frac{y}{2}$	$d_2 \equiv 6x = 5 - 4y$	$d_3 \equiv x = 7 - y$
$d_4 \equiv 4x - 6y = 0$	$d_5 \equiv y = 9 + x$	$d_6 \equiv \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 11$
$d_7 \equiv 4x + 3 = 5$	$d_8 \equiv 2x - 3y = 1$	$d_9 \equiv 5x - 7y = 5(x - y + 2)$

a) Parmi ces droites quelles sont celles qui sont parallèles entre elles ?

b) Parmi ces droites quelles sont celles qui sont parallèles à *(Ox)* ?

c) Parmi ces droites quelles sont celles qui sont parallèles à *(Oy)* ?

d) Parmi ces droites quelles sont celles qui passent par l'origine du repère ?

e) Parmi ces droites quelle est celle qui « monte » le moins vite ?

f) Parmi ces droites quelle est celle qui « descend » le plus vite ?

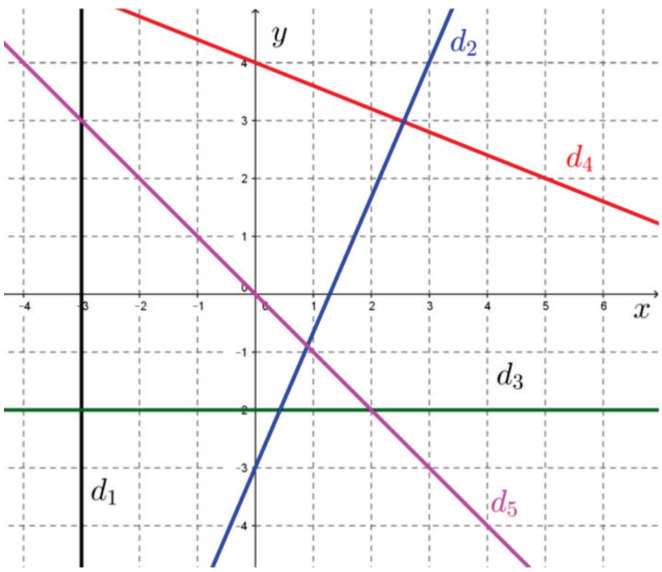
35) Dans un repère du plan on donne la droite $d \equiv 7x - 2y + 2 = 0$ et le point $A(2;8)$.

a) Déterminez si cette droite « monte » ou « descend ».

b) Est-ce que $A \in d$?

c) Déterminez une équation de la droite $d' \parallel d$ passant par l'origine du repère.

36) Donnez l'équation réduite de chacune des droites de la figure suivante :



37) Voici les équations de six droites dans un repère orthonormé (unité : 1 cm) :

$a \equiv y = 2x - 3$

$b \equiv y = -\frac{3}{2}x + 4$

$c \equiv 2x + y + 1 = 0$

$d \equiv y = -3(x+2) + 5$

$e \equiv 3x - 2y + 1 = 0$

$f \equiv 3(x-2) = 6$

Pour chacune de ces droites précisez la pente et l'ordonnée à l'origine (si elles existent) puis représentez-la.

38) Recopiez et complétez le tableau suivant :

droites	*Equation cartésienne*	*Equation réduite*	*Vecteur directeur*	*Pente*	*Ordonnée à l'origine*	*Point à coordonnées entières*
a	$x + 3y - 5 = 0$					
b		$y = -\frac{x}{3} + \frac{4}{3}$				
c				-8		$C(4,0)$
d			$\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$		$\frac{1}{2}$	

39) Dans un repère du plan on donne les droites $d \equiv 2x + 5y = 10$ et $d' \equiv 3x - 2y = 6$.

a) Tracez ces deux droites et déterminez graphiquement $d \cap d'$.

b) Vérifiez le résultat précédent par un calcul.

40) Soient $M\left(-3;\frac{1}{2}\right)$, $P(-2;0)$ et $d \equiv 2x + 2y + 1 = 0$. Déterminez $(MP) \cap d$. Vérifiez votre résultat sur une figure.

41) Dans un repère du plan on donne les droites $(AB) \equiv 3x - 7y + 19 = 0$, $(AC) \equiv 3x + 10y + 2 = 0$ et $(BC) \equiv 2x + y - 10 = 0$. Déterminez les points A, B et C.

42) Dans un repère du plan on donne les points $D(-1;4)$, $E(3;3)$ et $F(0;2)$.

a) Déterminez une équation de chacune des droites d_1, d_2 et d_3 tel que $d_1 \parallel (EF)$ et $D \in d_1$, $d_2 \parallel (ED)$ et $F \in d_2, d_3 \parallel (DF)$ et $E \in d_3$.

b) Déterminez les points $A \in d_1 \cap d_2$, $B \in d_1 \cap d_3$ et $C \in d_3 \cap d_2$.

c) Montrez que les triangles $\Delta(DEF)$ et $\Delta(ABC)$ ont le même centre de gravité.

43) Résolvez algébriquement les systèmes suivants et donnez à chaque fois une interprétation géométrique :

a) $\begin{cases} 2x-1=8y-x \\ 16y=6x-4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-9y=14x \\ \dfrac{7x}{4}+\dfrac{y}{6}=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+3y=12 \\ x-6-2y=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3(x-2y)-7x=5-(x+8) \\ \dfrac{x}{5}-\dfrac{y+2}{7}=1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{3x-3}{2}-\dfrac{1-2y}{6}=2 \\ -2x-\dfrac{8y+2}{3}=5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x-4y=13 \\ -2x+\dfrac{8}{3}y=3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 4x-3(2y-6)=5 \\ \dfrac{x-1}{3}-\dfrac{2y-5}{2}=x-2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{2}+\dfrac{y+4}{3}=5 \\ \dfrac{2x-1}{4}-\dfrac{y+1}{7}=-2 \end{cases}$

i) $\begin{cases} y-\dfrac{2x-3}{3}=6 \\ 2x-3y=5 \end{cases}$

j) $\begin{cases} \dfrac{3x-2}{2}+\dfrac{7-y}{3}=1 \\ \dfrac{6-5x}{5}-\dfrac{y+2}{15}=y \end{cases}$

PROBLÈMES

44) M. Dupont a acheté au total 30 bouteilles de vin. Une bouteille de vin rouge coûte 18 € et une bouteille de vin blanc coûte 12 €. Sachant que M. Dupont a dû payer un montant de 438 €, combien de bouteilles de chaque sorte a-t-il acheté ?

45) Soient $A(2x-1;4y+5)$, $B(4-y;7-2x-3y)$ et $I(-8;3)$ où x et y sont deux nombres réels. Est-il possible de trouver x et y tel que I soit le milieu de $[AB]$?

46) Dans un repère $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ on donne les points $A(-1,4)$, $B(3,7)$ et $C(2,-5)$. Calculez les coordonnées du point K défini par $\overrightarrow{AK}+2\overrightarrow{BK}-4\overrightarrow{KC}=\vec{0}$:

a) dans le repère $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$.

b) dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

47) Soit $\Delta(ABC)$ un triangle quelconque, I le milieu de [AB], J le point tel que $\overrightarrow{AJ}=-\overrightarrow{AC}$ et K le point tel que $2\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$.

a) Déterminez les coordonnées des points A, B, C, I, J et K dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

b) Montrer que les points I, J et K sont alignés.