Exercices sur la division euclidienne des polynômes

Exercice 1

Calculer le quotient et le reste de chacune des divisions suivantes de A par B :

(1) $A(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ et $B(x) = x^2 + 1$

(2) $A(y) = y^3 + 2y^2 + 3$ et $B(y) = y^2 - y - 1$

(3) $A(z) = z^3 - 4z + 5$ et $B(z) = z^2 - 3z + 2$

(4) $A(x) = x^4 + x^3 - x^2 - x + 1$ et $B(x) = x^2 - 4x + 1$

(5) $A(x) = x^4 - 3x^2 + 6$ et $B(x) = x^3 - 5x^2 + x - 6$

(6) $A(x) = x^4 + 2$ et $B(x) = x^2 + 4x - 2$

(7) $A(x) = x^5 - 3x^3 - 2x^2 + x + 6$ et $B(x) = x^3 - x + 1$

(8) $A(y) = y^6 - 5y^5 - 2y^4 - 3y^3$ et $B(y) = y^3 + y^2 - 2$

(9) $A(x) = -2x^3 + 4x^2$ et $B(x) = x^2 - 2$

(10) $A(x) = 3x^3 - 2x + 1$ et $B(x) = 3x^2 + 3x - 1$

(11) $A(x) = x^4 - x$ et $B(x) = 2x + 1$

(12) $A(x) = 3x^3 + 5x^2 + 2$ et $B(x) = 2x^2 - 1$

(13) $A(y) = y^4 + 1$ et $B(y) = y^2 - \sqrt{2}y + 1$

(14) $A(z) = -3z^6 + z^4 - 5z^2 + 1$ et $B(z) = 3z^2 + z + 1$

Réponses :

(1) $Q(x) = x + 1$ et $R(x) = 0$

(2) $Q(y) = y + 3$ et $R(y) = 4y + 6$

(3) $Q(z) = z + 3$ et $R(z) = 3z - 1$

(4) $Q(x) = x^2 + 5x + 18$ et $R(x) = 66x - 17$

(5) $Q(x) = x + 5$ et $R(x) = 21x^2 + x + 36$

(6) $Q(x) = x^2 - 4x + 18$ et $R(x) = -80x + 38$

(7) $Q(x) = x^2 - 2$ et $R(x) = -3x^2 - x + 8$

(8) $Q(y) = y^3 - 6y^2 + 4y - 5$ et $R(y) = -7y^2 + 8y - 10$

(9) $Q(x) = -2x + 4$ et $R(x) = -4x + 8$

(10) $Q(x) = x - 1$ et $R(x) = 2x$

(11) $Q(x) = \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{8} - \dfrac{9}{16}$ et $R(x) = \dfrac{9}{16}$

(12) $Q(x) = \dfrac{3x}{2} + \dfrac{5}{2}$ et $R(x) = \dfrac{3x}{2} + \dfrac{9}{2}$

(13) $Q(y) = y^2 + \sqrt{2}y + 1$ et $R(y) = 0$

(14) $Q(z) = -z^4 + \dfrac{z^3}{3} + \dfrac{5z^2}{9} - \dfrac{8z}{27} - \dfrac{142}{81}$ et $R(z) = \dfrac{166z}{81} + \dfrac{223}{81}$

Exercice 2

Calculer le quotient et le reste des divisions euclidiennes suivantes à l'aide du schéma de Horner :

(1) $\left(2x^3-3x+2\right):(x+2)$

(2) $\left(2x^3-3x+2\right):(x-2)$

(3) $\left(3y^3+2y^2-3y-2\right):(y-1)$

(4) $\left(3z^3+2z^2-3z-2\right):(z+1)$

(5) $\left(x^3+5x^2+5x-2\right):(x+2)$

(6) $\left(x^3+5x^2+5x-2\right):(x-1)$

(7) $\left(x^4-2x^3+x-2\right):(x+1)$

(8) $\left(x^4-2x^3+x-2\right):(x-1)$

(9) $\left(x^4-3x^2+1\right):(x+3)$

(10) $\left(x^4-3x^2+1\right):(x-3)$

Réponses :

(1) $Q(x)=2x^2-4x+5$ et $r=-8$

(2) $Q(x)=2x^2+4x+5$ et $r=12$

(3) $Q(x)=3y^2+5y+2$ et $r=0$

(4) $Q(z)=3z^2-z-2$ et $r=0$

(5) $Q(x)=x^2+3x-1$ et $r=0$

(6) $Q(x)=x^2+6x+11$ et $r=9$

(7) $Q(x)=x^3-3x^2+3x-2$ et $r=0$

(8) $Q(x)=x^3-x^2-x$ et $r=-2$

(9) $Q(x)=x^3-3x^2+6x-18$ et $r=55$

(10) $Q(x)=x^3+3x^2+6x+18$ et $r=55$

Exercice 3

(1) a) Effectuer la division euclidienne de $P(x)=2x^2+x+5$ par $x-\frac{3}{2}$.

b) En déduire la division euclidienne de $P(x)$ par $\frac{3}{2}-x$, par $2x-3$, par $3-2x$, par $4x-6$.

c) En déduire aussi la division euclidienne de $S(x)=6x^2+3x+15$ par $x-\frac{3}{2}$, par $\frac{3}{2}-x$, par $2x-3$, par $3-2x$, par $4x-6$.

(2) Expliquer comment on peut utiliser un schéma de Horner pour effectuer une division euclidienne d'un polynôme quelconque par un binôme de la forme $ax+b$. Appliquer cette méthode pour effectuer les divisions euclidiennes suivantes :

a) $\left(2x^3-5x+8\right):(2x+4)$

b) $\left(x^3-3x+2\right):(5x-2)$

c) $\left(3y^3+2y^2-5\right):(1-y)$

d) $\left(3z^3+z^2-8z-7\right):(3-4z)$

e) $\left(4x^3-5x-2\right):(2x+3)$

Exercice 4

Effectuer la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ par deux méthodes :

a) en développant d'abord $B(x)$ si nécessaire ;

b) en utilisant des schémas de Horner successifs.

(1) $A(x) = x^3 + 2x^2 - x - 4$ et $B(x) = (x-3)(x+1)$

(2) $A(x) = x^4 - x^2 - 2x - 8$ et $B(x) = x^2 - 4$

(3) $A(x) = x^5 + x + 1$ et $B(x) = (x-1)^3$

Réponses :

(1) $Q(x) = x + 4$ et $R(x) = 10x + 8$

(2) $Q(x) = x^2 + 3$ et $R(x) = -2x + 4$

(3) $Q(x) = x^2 + 3x + 6$ et $R(x) = 10x^2 - 14x + 7$

Exercice 5

Déterminer les paramètres réels m, p et r tels que :

(1) $\dfrac{6x^2 + x - 3}{3x - 1} = mx + p + \dfrac{r}{3x - 1}$

(2) $\dfrac{-6x^2 + x + 5}{2x + 1} = mx + p + \dfrac{r}{2x + 1}$

(3) $\dfrac{2x^3 - 4x^2 - x + 5}{2x^2 - 1} = mx + p + \dfrac{r}{2x^2 - 1}$

(4) $\dfrac{4x^2 - 4x - 7}{2x + 1} = mx + p + \dfrac{r}{2x + 1}$

Réponses :

(1) $m = 2, p = 1, r = -2$

(2) $m = -3, p = 2, r = 3$

(3) $m = 1, p = -2, r = 3$

(4) $m = 2, p = -3, r = -4$

Exercice 6

a) Déterminer le paramètre réel m pour que la division du polynôme

(1) $A(x) = 2mx^2 - (m+1)x - m$ par $x + 2$ donne un reste égal à 11.

(2) $A(x) = mx^2 - 2(m-1)x + m$ par $x - 3$ donne un reste égal à 2.

(3) $A(x) = mx^2 + (4m-3)x - 2$ par $x + 2$ soit exacte.

(4) $A(x) = mx^2 - (2m-1)x + 3$ par $x + 3$ donne un reste égal à –3.

(5) $A(x) = (m-1)x^2 - (2m+1)x - 3m$ par $x + 2$ donne un reste égal à 8.

(6) $A(x) = 2mx^2 - (5m-2)x - 3m$ par $x - 3$ donne un reste égal à –2.

(7) $A(x) = (m+1)x^3 - (2m-1)x^2 + 3x - m$ par $x + 1$ soit exacte.

b) Après avoir remplacé le paramètre réel m par la valeur trouvée en a), calculer dans chaque cas le quotient et écrire la division euclidienne.

Réponses :

(1) $m = 1$; $2x^2 - 2x - 1 = (x+2)(2x-6) + 11$

(2) $m = -1$; $-x^2 + 4x - 1 = (x-3)(-x+1) + 2$

(3) $m = 1$; $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$

(4) $m = -\frac{1}{5}$; $-\frac{1}{5}x^2 + \frac{7}{5}x + 3 = (x+3)\left(-\frac{1}{5}x + 2\right) - 3$

(5) $m = 2$; $x^2 - 5x - 6 = (x+2)(x-7) + 8$

(6) impossible !

(7) $m = -\frac{3}{4}$; $\frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 3x + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}(x+1)\left(x^2 + 9x + 3\right)$

Exercice 7

Déterminer les paramètres réels a et b tels que le polynôme $x^4 + x^3 + ax^2 + bx + 2$ soit divisible par $x^2 + 2$. Quelle factorisation obtient-on alors ?

Réponse : $a = 3$ et $b = 2$. La factorisation est :

$$x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = \left(x^2 + 2\right)\left(x^2 + x + 1\right)$$

Exercice 8

Factoriser les polynômes suivants autant que possible :

(1) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$

(2) $P(x) = 3x^3 - 11x^2 - 6x + 8$

(3) $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$

(4) $P(x) = 9x^3 - 6x^2 - 20x - 8$

(5) $P(x) = 4x^4 - 8x^3 - 13x^2 + 2x + 3$

Réponses :

(1) $P(x) = (x+2)(x-3)(2x-1)$

(2) $P(x) = (x+1)(x-4)(3x-2)$

(3) $P(x) = (x-1)(x+2)(3x-1)$

(4) $P(x) = (x-2)(3x+2)^2$

(5) $P(x) = (x+1)(x-3)(2x-1)(2x+1)$

Exercice 9

Simplifier les fractions rationnelles suivantes après avoir précisé les conditions d'existence :

(1) $R(x) = \dfrac{6x^3 + 7x^2 - x - 2}{x^2 + 3x + 2}$

(3) $R(x) = \dfrac{9x^3 - 4x + 27x^2 - 12}{3x^2 + 7x - 6}$

(2) $R(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{4x^3 - 12x^2 - x + 3}$

(4) $R(x) = \dfrac{2x^3 + 7x^2 + 2x - 3}{x^2 - 9}$

(5) $R(x) = \dfrac{3x^3 - 7x^2 + x + 2}{x^2 - 4x + 4}$

(6) $R(x) = \dfrac{3x^3 + 7x^2 - 5x + 3}{x^2 + 6x + 9}$

(7) $R(x) = \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 2x - 1}{3x^2 + x - 2}$

Réponses :

(1) $C.E. : x \neq -1$ et $x \neq -2$; $R(x) = \dfrac{6x^2 + x - 2}{x + 2}$

(2) $C.E. : x \neq 3$ et $x \neq \pm\frac{1}{2}$; $R(x) = \dfrac{x - 3}{4x^2 - 1}$

(3) $C.E. : x \neq -3$ et $x \neq \frac{2}{3}$; $R(x) = 3x + 2$

(4) $C.E. : x \neq -3$ et $x \neq 3$; $R(x) = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x - 3}$

(5) $C.E. : x \neq 2$; $R(x) = \dfrac{3x^2 - x - 1}{x - 2}$

(6) $C.E. : x \neq -3$; $R(x) = \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{x + 3}$

(7) $C.E. : x \neq -1$ et $x \neq \frac{2}{3}$; $R(x) = \dfrac{4x^2 - x - 1}{3x - 2}$

Exercice 10

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

(1) $4x^3 - 20x^2 + 33x - 18 = 0$

(2) $2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0$

(3) $2x^3 + 4x^2 - x - 2 = 0$

(4) $9x^3 + 15x^2 - 32x + 12 = 0$

(5) $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$

(6) $4x^3 = 16x^2 - 13x + 3$

(7) $4x^3 - 4x^2 = 5x - 5$

Réponses :

(1) $S = \left\{\frac{3}{2}, 2\right\}$

(4) $S = \left\{\frac{2}{3}, -3\right\}$

(2) $S = \left\{-\frac{1}{2}, 1, 2\right\}$

(5) $S = \left\{-1, \frac{1}{2}, 2\right\}$

(3) $S = \left\{-2, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

(6) $S = \left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$

(7) $S = \left\{1, \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$