Calculs sur les radicaux III

1re série

Simplifier les expressions suivantes, sachant que a, b, et c sont des réels strictement positifs et n et m sont des entiers naturels. (On demande de rendre rationnel le dénominateur dans le résultat final.)

1. $\sqrt{a^2}$ .... $= a$
2. $\sqrt{a^3}$ .... $= a\sqrt{a}$
3. $\sqrt{a^4}$ .... $= a^2$
4. $\sqrt{a^5}$ .... $= a^2\sqrt{a}$
5. $\sqrt{a^{38}}$ .... $= a^{19}$
6. $\sqrt{a^{39}}$ .... $= a^{19}\sqrt{a}$
7. $\sqrt{a^{2n}}$ .... $= a^n$
8. $\sqrt{a^{2n+1}}$ .... $= a^n\sqrt{a}$
9. $\sqrt{a^{2n+2}}$ .... $= a^{n+1}$
10. $\sqrt{a^{2n+3}}$ .... $= a^{n+1}\sqrt{a}$
11. $\sqrt{a^{6n+9}}$ .... $= a^{3n+4}\sqrt{a}$
12. $\sqrt{ab^2}$ .... $= b\sqrt{a}$
13. $\sqrt{a^4b^{18}}$ .... $= a^2b^9$
14. $\sqrt{a^{4n}b^{6m}}$ .... $= a^{2n}b^{3m}$
15. $\sqrt{a^5b^9}$ .... $a^2b^4\sqrt{ab}$
16. $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ .... $= \dfrac{\sqrt{a}}{a}$
17. $\dfrac{1}{\sqrt{a^2}}$ .... $= \dfrac{1}{a}$
18. $\dfrac{a}{\sqrt{a}}$ .... $= \sqrt{a}$
19. $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}}$ .... $= \dfrac{1}{a\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a^2}$
20. $\dfrac{1}{\sqrt{a^{27}}}$ .... $= \dfrac{\sqrt{a}}{a^{14}}$

21. $\sqrt{\dfrac{a^7}{b^8}}$ .... $= \dfrac{a^3\sqrt{a}}{b^4}$

22. $\sqrt{\dfrac{a^{14}}{b^{17}}}$ .... $= \dfrac{a^7}{b^8\sqrt{b}} = \dfrac{a^7\sqrt{b}}{b^9}$

23. $\dfrac{a\sqrt{a^3}}{\sqrt{a^5b^6}}$ .... $= \dfrac{1}{b^3}$

24. $a\sqrt{abc}\,\dfrac{a^3}{b\sqrt{ac^2}}$ .... $= \dfrac{a^4\sqrt{bc}}{bc}$

25. $\dfrac{\sqrt{8a^3b^2c^8}}{2ab^2\sqrt{\dfrac{1}{5c}}}$ .... $= \dfrac{c^4\sqrt{10ac}}{b}$

26. $\dfrac{\dfrac{a}{2\sqrt{bc^7}}\cdot\sqrt{72\cdot a^3b^4}}{b^2c^4\sqrt{\dfrac{1}{2}ab}}$ .... $= \dfrac{6a^2\sqrt{c}}{bc^8}$

27. $\dfrac{\sqrt{18a^8b^4}}{\dfrac{\sqrt{343a}}{2\sqrt{12a^2c}}\cdot b^3}\cdot\sqrt{14c}$ .... $= \dfrac{24a^4c\sqrt{3a}}{7b}$

2^e^ série

Simplifier les expressions suivantes en supposant que toutes les expressions ont un sens. On demande de rendre rationnel le dénominateur dans le résultat final.

1. $\dfrac{1}{\sqrt{a}-1}$ .... $= \dfrac{\sqrt{a}+1}{a-1}$

2. $\dfrac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ .... $= \dfrac{\sqrt{a}-3\sqrt{b}}{a-b}$

3. $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ .... $\dfrac{x+2\sqrt{xy}+y}{x+y}$

4. $\dfrac{x+\sqrt{y}}{x-\sqrt{y}}$ .... $= \dfrac{x^2+2x\sqrt{y}+y}{x^2-y}$

5. $\dfrac{\sqrt{2xy}+3\sqrt{x^3y}+4\sqrt{xy^3}}{\sqrt{xy}}$ .... $= \sqrt{2}+3|x|+4|y|$

6. $\dfrac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} + \dfrac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}$ .... $= \dfrac{2\left(a^2+b\right)}{a^2-b}$

7. $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}$ .... $= -x-\sqrt{x^2-1}$

8. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)\cdot\dfrac{(1+\sqrt{x})^2-(1+x)}{(1-\sqrt{x})^2+2\sqrt{x}}$ .... $=2$

3$^{\text{e}}$ série

a) Vérifier l'identité suivante, où a, b et c sont des réels positifs :

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$$
$$=a^2+b^2+c^2-2bc-2ca-2ab$$

b) Transformer l'expression suivante, sachant que a, b et c sont des réels positifs, $a^2=b^2+c^2$ et $2p=a+b+c$:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Réponse : $S=\dfrac{bc}{2}$.

c) Si $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}$, démontrer que :

$$\sqrt{ax}+\sqrt{by}+\sqrt{cz}=\sqrt{(a+b+c)(x+y+z)}$$