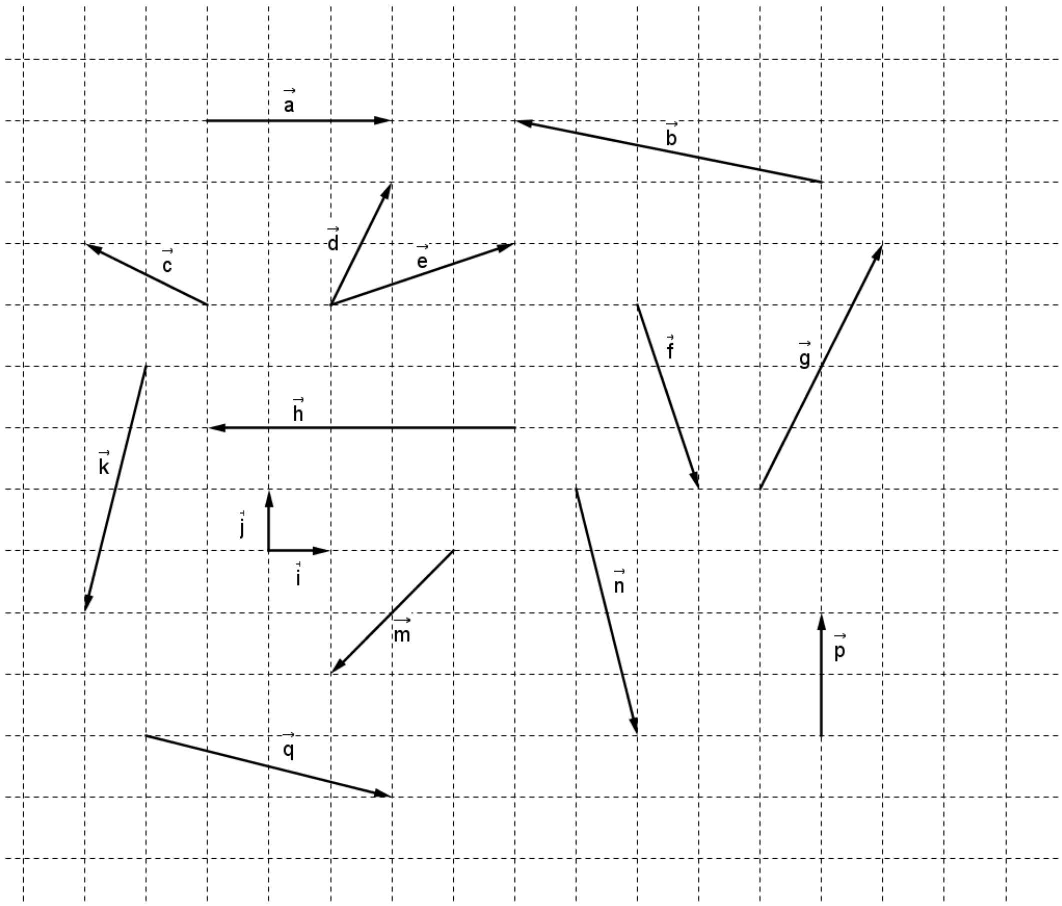
Exercices de géométrie analytique

Exercice 1



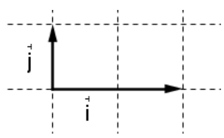
(1) Déterminer les coordonnées des vecteurs représentés dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$.

(2) Déterminer les coordonnées des vecteurs représentés dans la base $\left(\vec{j}, \vec{i}\right)$.

(3) Déterminer les coordonnées des vecteurs représentés dans la base $(\vec{a}, \vec{p})$.

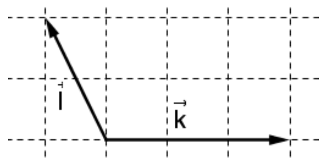
Exercice 2

(1) Dans une base orthogonale $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ telle que $\left\|\vec{i}\right\| = 2\left\|\vec{j}\right\|$, comme sur la figure ci-contre, construire les vecteurs :

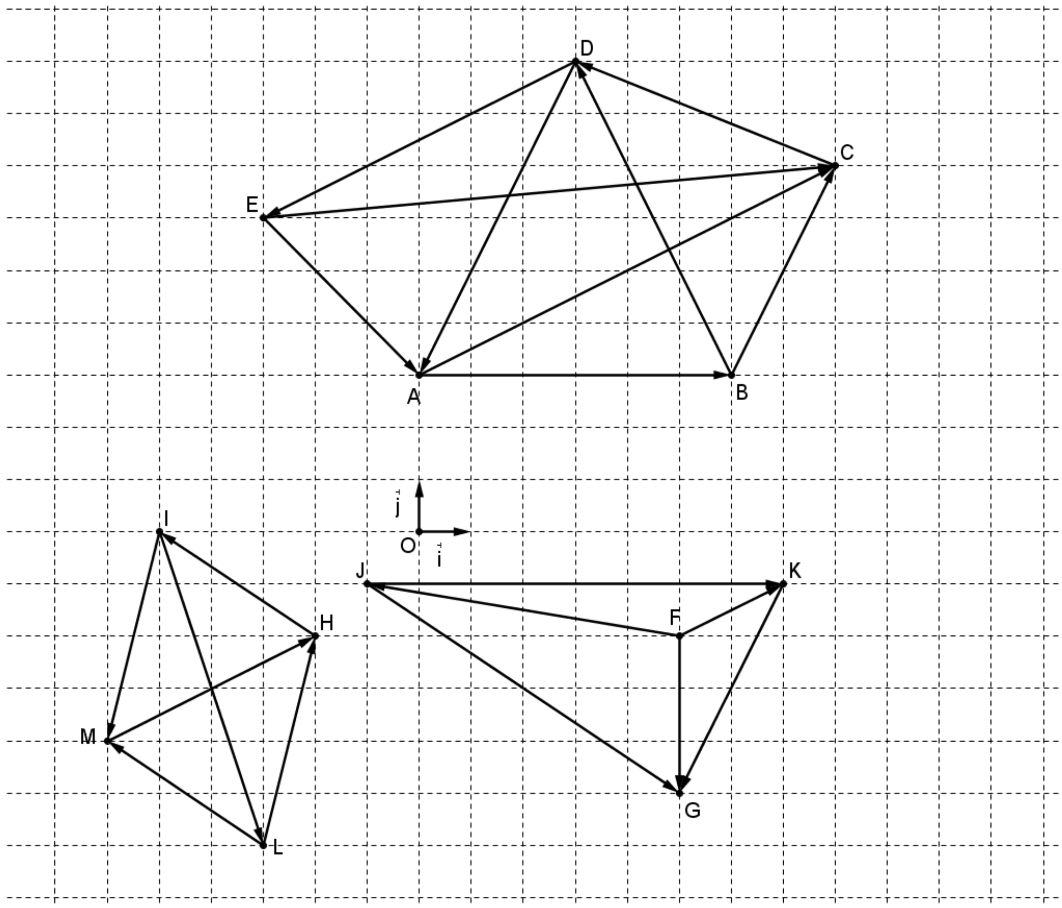


$\vec{a}\,(2{,}1)$, $\vec{b}\,(4{,}2)$, $\vec{c}\,(0{,}3)$, $\vec{d}\,(-2. - 3)$, $\vec{e}\,(0{,}-3)$.

(2) Refaire l'exercice dans la base $\left(\vec{k}, \vec{l}\right)$ représentée ci-contre.



Exercice 3

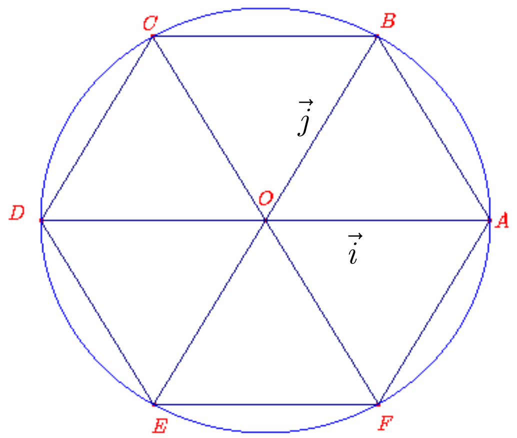


(1) Déterminer les coordonnées des points représentés dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

(2) Déterminer les coordonnées des vecteurs représentés dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$.

(3) Quels sont les vecteurs qui sont colinéaires ? égaux ? opposés ?

Exercice 4



$ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre O. On note : $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$.

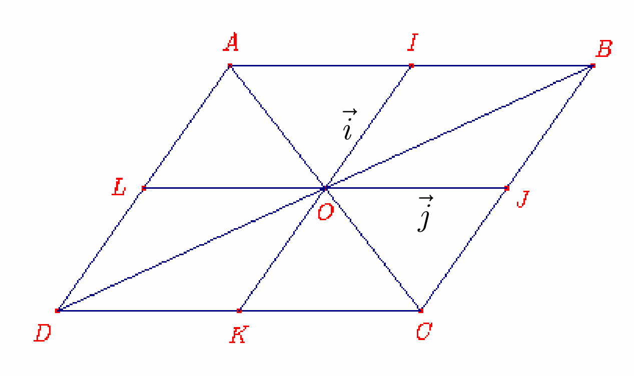
(1) Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$: $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{DB}$.

(2) Déterminer les coordonnées des points O, A, B, C, D, E et F dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 5

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O. I, J, K et L sont les milieux des 4 côtés. On note : $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$.

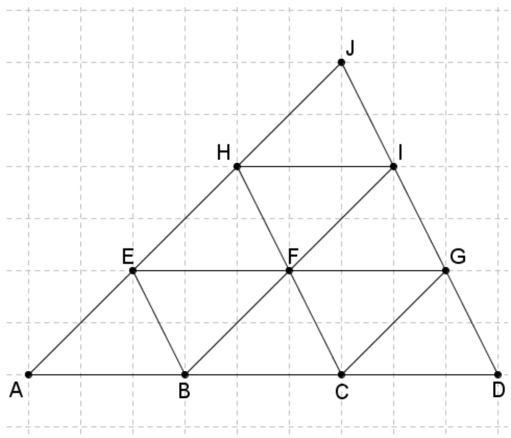
(1) Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{LB}$, $\overrightarrow{LC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{JA}$, $\overrightarrow{JD}$, $\overrightarrow{JK}$.



(2) Déterminer les coordonnées des points O, A, B, C, D, I, J, K, L a) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, b) dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$ et c) dans le repère $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

Exercice 6

La figure ci-contre représente un réseau de triangles isométriques. On choisit comme repère $\left(A, \vec{i}, \vec{j}\right)$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{AE}$.



(1) Déterminer les coordonnées des points A, B, C, …, J dans ce repère.

(2) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{FJ}$, $\overrightarrow{FA}$ et $\overrightarrow{FD}$ dans $(\vec{i}, \vec{j})$.

(3) Quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{FJ} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FD}$ dans cette base ? Conclure sur la nature du point F.

Exercice 7

Soit $(O, \vec{i})$ un repère d'une droite d.

(1) Placer sur cette droite les points $I(1)$, $A(3)$ et $B(-2)$.

(2) Déterminer l'abscisse du point C tel que $\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

(3) Déterminer l'abscisse du point D tel que $\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}$.

(4) Exprimer $\overrightarrow{CD}$ en fonction de $\vec{i}$.

Exercice 8

Dans un repére orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan, on donne les points $A(1,-2)$, $B(5,1)$ et $C(-2,4)$.

(1) Déterminer par deux méthodes les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un ***parallélogramme***.

(2) Déterminer les coordonnées du point E tel que $ABEC$ soit un ***parallélogramme***. (Une seule méthode suffit.)

(3) Montrer ***analytiquement*** et ***géométriquement*** que $C = \text{mil}[DE]$.

$ABCD$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
ou
$ABCD$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow \text{mil}[AC] = \text{mil}[BD]$

Exercice 9

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère cartésien du plan. On donne les trois vecteurs suivants dans la base $(\vec{i},\vec{j})$: $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$.

(1) Montrer que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$.

(2) Déterminer les coordonnées du point A tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{w}$.

(3) Déterminer les coordonnées du point B tel que $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.

(4) Déterminer les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{OC} = \vec{u}$.

(5) Déterminer les coordonnées du point B' tel que $\overrightarrow{OB'} = -2\vec{u}$.

(6) Déterminer les coordonnées du point C' tel que $\overrightarrow{B'C'} = \vec{u} + \vec{v}$.

(7) Déterminer les ***centres de gravité*** des triangles ABC et $AB'C'$.

G est le centre de gravité du triangle ABC
$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Exercice 10

Soit $A(2,4)$, $B(1,-2)$ et $C(4,x)$ trois points dans un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j})$. Déterminer x tel que les points A, B et C soient alignés. Etablir une ***relation de colinéarité*** entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$

Exercice 11

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère cartésien du plan. On donne les quatre points $A(-4,-3)$, $B(2,-1)$, $C(0,3)$ et $D(-8,5)$.

(1) Est-ce que $ABCD$ est un trapèze ?

(2) Est-ce que $ABCD$ est un parallélogramme ?

(3) Déterminer les coordonnées du point E tel que $ABCE$ soit un parallélogramme. Montrer ***analytiquement*** et ***géométriquement*** que A, E et D sont alignés.

Exercice 12

Soit ABC un triangle quelconque, I le milieu de $[AB]$ et J le point tel que $\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AC}$. Soit $\mathcal{R}$ le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

(1) Quelles sont les coordonnées de I et de J dans $\mathcal{R}$? En déduire les coordonnées de $\overrightarrow{IJ}$ dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

(2) Soit K le point tel que $2\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$. Exprimer $\overrightarrow{BK}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ et en déduire une construction de K sur votre figure.

(3) Déterminer les coordonnées de K dans $\mathcal{R}$ et en déduire celles de $\overrightarrow{IK}$ dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

(4) Montrer que les points I, J et K sont alignés.

Exercice 13

On considère un parallélogramme $ABCD$. On appelle I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[DC]$. On définit les points P et M par :

$$\overrightarrow{AM} = \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AJ} \text{ et } \overrightarrow{BP} = -\tfrac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}.$$

(1) Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{MP}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$ et en déduire la nature du quadrilatère $IBPM$.

(2) Soit O le point d'intersection des diagonales du quadrilatère $IBPM$. Démontrer que $P = \text{mil}[OC]$. (***Indication*** : utiliser le repère $\left(B,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$.)

Exercice 14

Soit un triangle ABC. On considère les points M et N définis par :

$$\overrightarrow{AM} = \tfrac{5}{4}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AN} = \tfrac{3}{4}\overrightarrow{AC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Démontrer que les droites MN et BC sont parallèles.

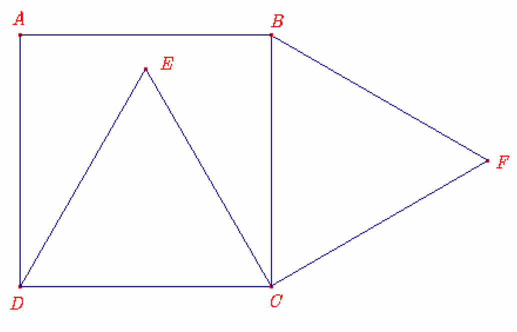
Exercice 15

Soit un triangle ABC. On appelle I le milieu du segment $[AC]$. On considère les points R et S définis par :

$$\overrightarrow{BR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{AS} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Démontrer que les points R, S et I sont alignés.

Exercice 16



$ABCD$ est un carré, CED et BCF sont deux triangles équilatéraux, l'un construit intérieurement sur le côté $[DC]$, l'autre construit extérieurement sur le côté [BC]. Les points A, E et F sont-ils alignés ? On donnera une solution analytique dans un repère bien choisi !

Exercice 17

Soit $ABCD$ est un parallélogramme, I le milieu de $[AB]$ et L le milieu de $[AD]$.

(1) Déterminer des équations cartésiennes de AC et BL dans le repère cartésien $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

(2) Soit E le point d'intersection des droites AC et BL. Déterminer les coordonnées de E dans $\mathcal{R}$.

(3) Les points I, E et D sont-ils alignés ?

Exercice 18

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(-13,0)$, $B(0,8)$, $C(8,13)$ et $D(8,0)$.

(1) Déterminer les aires des triangles ACD et ABO ainsi que l'aire du trapèze $OBCD$. A-t-on : $\text{Aire}(ACD) = \text{Aire}(ABO) + \text{Aire}(OBCD)$?

(2) Conclure avec précision et justifier analytiquement