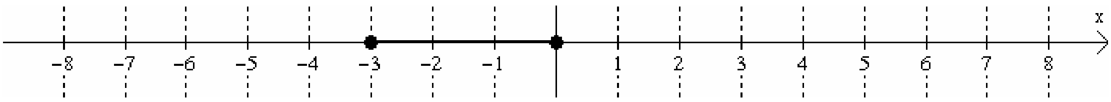
Exercices sur les intervalles, les inéquations et les inégalités

A. Intervalles

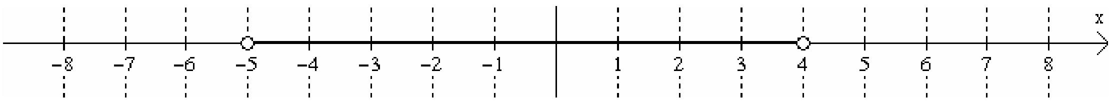
Exercice 1

Ecrire mathématiquement les ensembles suivants :

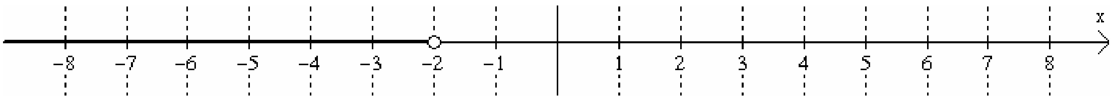
(1)



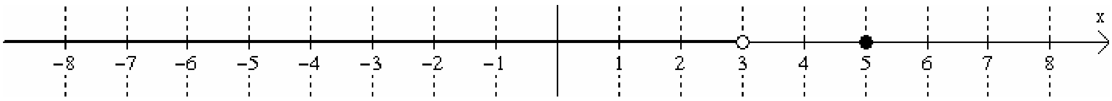
(2)



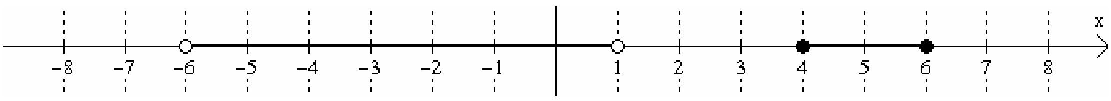
(3)



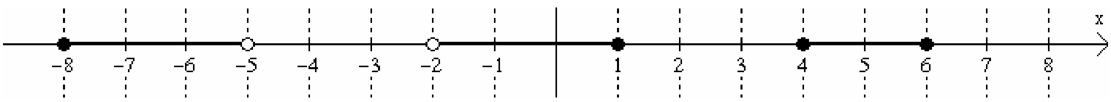
(4)



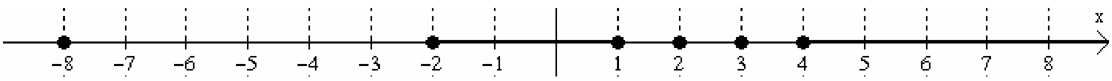
(5)



(6)



(7)



Exercice 2

Ecrire en compréhension les ensembles suivants :

(1) $[3,8]$

(2) $]-\infty,7[$

(3) $[-9,4[$

(4) $]4,+\infty[\cup\{2\}$

(5) $]-3,+\infty[\cup]-\infty,-8[$

(6) $\{4,5,6,7,8,9,10,11\}$

(7) $]-3,0]\cup]1,5]$

(8) $\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$

Exercice 3

Représenter graphiquement les ensembles suivants sur la droite réelle et les écrire aussi simplement que possible.

(1) $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 3 \text{ et } x > -3\}$

(2) $B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 5 \text{ ou } x \leq 2\}$

(3) $C = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 4 \leq x \leq 8 \text{ et } x \neq 6\}$

(4) $D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 3 \text{ ou } x = 3\}$

(5) $E = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x \leq 6\}$

(6) $F = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 3 < x \leq 7 \text{ ou } x > 10\}$

(7) $G = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 4 \text{ et } x < 2\}$

Exercice 4

Simplifier l'écriture des ensembles suivants. Aidez-vous au besoin d'une figure. S'agit-il d'intervalles ?

(1) $[1,5] \cap]2,6[$

(2) $[1,5] \cup]2,6[$

(3) $[3,+\infty[\cap]-\infty,8[$

(4) $[3,+\infty[\cup]-\infty,8[$

(5) $[-3,-2] \cup]-2,8[$

(6) $[-3,-2] \cap]-2,8[$

(7) $[-5,3[\cup \{3\}$

(8) $[-5,3[\cap \{3\}$

(9) $[-4,+\infty[\cup]-2,+\infty[$

(10) $[-4,+\infty[\cap]-2,+\infty[$

(11) $]-\infty,8[\cap \mathbb{N}$

(12) $[-6,8[\cup]4,12] \cup]-12,3[$

(13) $[-6,8[\cap]4,12] \cap]-12,3[$

B. Inéquations du 1$^{\text{er}}$ degré

Exercice 5

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ et donner l'ensemble des solutions :

(1) $\dfrac{x}{2} \leq 6$

(2) $-\dfrac{2x}{3} \geq \dfrac{7}{4}$

(3) $\dfrac{x-1}{2} > 9$

(4) $2x + 3 \leq \dfrac{3}{4}$

(5) $\dfrac{x+3}{3} - \dfrac{5x-7}{6} > 1 - \dfrac{4x+1}{8}$

(6) $\dfrac{5x+1}{2} - \dfrac{x-1}{4} \geq \dfrac{1}{8}$

(7) $x - 2 - \dfrac{3}{5}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{1+3x}{4}\right) \leq -2$

(8) $\dfrac{1}{3} \cdot \left(\dfrac{2x+1}{5} - 1\right) > \dfrac{1}{6}\left(2 + \dfrac{1-4x}{3}\right)$

(9) $\dfrac{3}{2} - \dfrac{8(2x-1)}{7} < \dfrac{1-9x}{7} - x$

(10) $\dfrac{3+5x}{6} + x - \dfrac{1}{2} \leq 0$

Exercice 6

Résoudre les problèmes suivants à l'aide d'une inéquation :

(1) Deux personnes A et B partagent la somme de 360 €. A obtient au moins le double de B. Que peut-on dire de la part des deux personnes ?

(2) Deux côtés d'un triangle mesurent respectivement 4 et 6 cm. Que peut-on dire de la longueur du 3^{e} côté ?

(3) Dans un triangle isocèle, l'angle au sommet principal mesure au plus 24°. Que peut-on dire des deux angles à la base ?

(4) Je possède 25 € et je veux acheter des clous de 2 cents la pièce. Combien de clous puis-je acheter au plus ?

(5) Pierre dépense le tiers de son avoir, puis le cinquième du reste. Il constate qu'il lui reste encore plus de 20 €, somme dont il a besoin pour acheter son manuel de mathématiques. Que peut-on dire de son avoir initial ?

(6) On multiplie un nombre par 5, on retranche 24 du produit, on divise le reste par 6, on ajoute 13 au quotient et on trouve un résultat supérieur au nombre initial. Que peut-on dire de ce nombre ?

(7) Un père a 38 ans. Ses enfants sont âgés de 12 ans et de 8 ans. Dans combien d'années, l'âge du père sera-t-il supérieur ou égal à la somme des âges de ses enfants ?

(8) On place un capital à 4%. Quel doit être ce capital pour produire un intérêt annuel au moins égal à 100 € ?

(9) On place un capital à 5% d'intérêts annuels. Après 2 ans ce capital devient au moins 4900 €. Quel était le capital initial ?

(10) Une fontaine remplit un bassin en 6 h, une autre en 8 h et une troisième en 10 h. Elles coulent ensemble pendant 2 h et il manque moins de 26 hl pour que le bassin soit entièrement rempli. Quelle peut être la capacité de ce bassin ?

C. Systèmes d'inéquations

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes d'inéquations suivants :

(1) $\begin{cases} 4(5+x) > 5(x+3) \\ \dfrac{2x}{5} - \dfrac{2x-17}{3} < 10 - \dfrac{2x-6}{2} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 8x + \dfrac{14x}{5} \geq 66 - \dfrac{12x}{5} \\ \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{7x}{4} + x\right) > x - \dfrac{13}{2} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{2x-7}{4} - \dfrac{x+1}{8} \leq \dfrac{x-5}{2} \\ \dfrac{3x-14}{12} - \dfrac{2-3x}{4} < \dfrac{2x-1}{3} \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \dfrac{2x-7}{4} - \dfrac{x+1}{8} \leq \dfrac{x-5}{2} \\ \dfrac{3x-14}{12} - \dfrac{2-3x}{4} > \dfrac{2x-1}{3} \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x+1 \geq \dfrac{x}{2} \\ \dfrac{x}{3} - 1 \leq 2x+5 \\ x+4 > \dfrac{x}{5} \end{cases}$

Exercice 8

Résoudre les problèmes suivants à l'aide d'un système d'inéquations :

(1) On ajoute 5 à un nombre donné, on multiplie la somme par 2 puis on retranche 21 du produit. On obtient un résultat compris entre 45 et 50. Que peut-on dire du nombre donné ?

(2) La longueur d'un rectangle est 8 cm, sa largeur est 5 cm. On prolonge l'une des deux largeurs d'une certaine distance et on obtient un trapèze dont l'aire est comprise entre 48 et 50 cm^2. Quelle peut être la distance ajoutée à la largeur initiale ?

(3) Paul a 14 ans, sa sœur Isabelle a 12 ans et leur mère en a 36. Dans combien d'années l'âge de chacun des deux enfants est supérieur aux deux tiers de l'âge de leur mère ?

D. Inéquations réductibles au 1^er degré

Exercice 9

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

> ***Les identités remarquables*** :
> $$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
> $$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$
> $$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

(1) $x^2 \leq 3x$

(2) $(2x-3)(5-7x) < 0$

(3) $(x-1)^3(4-5x)^5(2-x)^2 \geq 0$

(4) $x^2 \geq 2x - 1$

(5) $9x^2 - 6x > -1$

(6) $(8x-2)^2 > 9x^2$

(7) $-4(1-2x)^2 + 9(x-5)^2 \geq 0$

(8) $\left(x^2-9\right)(5x-8)^3 \leq 0$

(9) $(2x-1)^2(4x+7)^4 \leq 0$

(10) $x^2 - 1 \leq (x-1)^2$

(11) $x^2 - x + (2x-3)(1-x) > 0$

(12) $(3x-4)^2 < 5(4-3x)(2+7x)$

(13) $x^3 - 4x \leq 4 - x^2$ (***Indication*** : factoriser d'abord les 2 membres)

(14) $9 - 30x + 25x^2 > 4(2x-1)^2$

(15) $x^4 \geq 16x^2$

(16) $5 \cdot (2x-1) \geq -12x^2 + 12x - 3$

Exercice 10

Résoudre les inéquations fractionnaires suivantes dans $\mathbb{R}$ après avoir précisé leur domaine.

(1) $\dfrac{2x-3}{3x+5} \geq 0$

(2) $\dfrac{3}{4-x} \geq 8$

(3) $\dfrac{1-2x}{3+x} \leq 1$

(4) $\dfrac{(x-3)(x+4)}{x-1} + 2 > x$

(5) $x + \dfrac{1}{x} \leq 2$

(6) $\dfrac{x}{2x+1} \geq \dfrac{x-1}{2x-1}$

(7) $1 + \dfrac{5}{x(x+3)} \geq \dfrac{3}{x}$

(8) $\dfrac{9}{4(x-1)(x+2)} \geq -1$

(9) $\dfrac{81-25x^2}{(3x-1)^3\left(3x^2+6x+3\right)} \leq 0$

Remarque importante : Dans les exemples suivants il faudra d'abord factoriser tous les dénominateurs, puis seulement chercher le dénominateur commun !

(10) $\dfrac{7}{x^2-x}-\dfrac{5}{2x^2+2x}\geq\dfrac{6}{1-x^2}$

(11) $\dfrac{49x^2-14x+1}{x^2-6x+9}\leq 4$

(***Indication*** : factoriser aussi le numérateur dans le membre de gauche.)

(12) $\dfrac{4}{x^2}\leq\dfrac{3}{x^2-1}$

(13) $\dfrac{3}{x^3-2x^2+x}-\dfrac{1+2x}{3x^2-6x+3}\geq\dfrac{1}{3x(1-x)}$

(14) $\dfrac{1}{4+8x}+\dfrac{7}{4-16x^2}\geq\dfrac{2}{x-2x^2}$

E. Majorations. Minorations. Encadrements

Exercice 11

(1) Sachant que $x<3$ et $y\leq 6$ que peut-on dire de

a) $2x$ b) $-3y$ c) $\dfrac{x}{2}+5y$ d) x^2+y^2 e) $x-y$ f) $x\cdot y$?

(2) Sachant que $3<a\leq 4$, que peut-on dire de

a) a^2 b) $\dfrac{1}{a}$ c) $2a-\dfrac{3}{10-2a}$ d) $\dfrac{a-2}{a^2+a-3}$?

(3) Sachant que $b<-5$, que peut-on dire de

a) $3b-4$ b) b^2+1 c) $-\dfrac{4}{5b+1}$ d) $-2(b-1)(2b+1)$?

(4) Sachant que

$$\begin{cases}-\dfrac{5}{4}<x\leq-\dfrac{1}{2}\\ 1\leq y<\dfrac{3}{2}\end{cases},$$

donner un encadrement de

a) $3x-2y+8$ b) $\dfrac{xy}{3}$ c) $\dfrac{4x}{2y+3}$ d) $\dfrac{x-1}{3y}$ e) x^2-y^2 f) $\dfrac{x-2y}{x^2}$

(5) Sachant que

$$\begin{cases}1<a\leq\dfrac{5}{2}\\ -3\leq b\leq -2\end{cases},$$

donner un encadrement de :

a) $\dfrac{1}{a}-\dfrac{2}{b^2}$ b) $\dfrac{a+1}{2a-b^3}$ c) $(a+b)^2$

Exercice 12

Résoudre les problèmes suivants en utilisant les opérations sur les inégalités :

(1) Je vais acheter aujourd'hui entre 5 et 6 kilos de coings et entre 3,5 et 4,5 kilos de mirabelles pour faire de la confiture. Je sais qu'un kilo de coings coûte 4,6 € et un kilo de mirabelles coûte entre 3,80 et 4,30 €. Pouvez-vous m'aider à encadrer ma dépense ?

(2) Sophie a mis 4 h en voiture pour rentrer de vacances. Elle a fait une pause de 30 à 45 minutes et sa vitesse était toujours comprise entre 110 et 130 km/h. Encadrer la distance que Sophie a parcourue en voiture.

(3) Albert et Bertrand rentrent de vacances. Tous les deux ont 320 km à faire jusqu'à leur domicile. Bertrand est parti à 8 h le matin et sa vitesse moyenne est de 100 km/h. Albert part seulement à 8 h 30. Quelle doit être sa vitesse moyenne minimale pour être rentré avant Bertrand ?

(4) Le côté d'un carré est compris entre 7,1 et 7,2 cm. Que peut-on dire de l'aire et de la circonférence de ce carré ?

(5) Sachant que le rayon d'un disque est compris entre 19,8 et 19,9 cm et que $3{,}1415 < \pi < 3{,}1416$, donner un encadrement de l'aire de ce disque. (Rappel : l'aire d'un disque est $A = \pi \cdot R^2$, où R est le rayon.)

(6) Une plaque rectangulaire en acier a pour dimensions : $L \approx 4{,}53$ cm et $l \approx 2{,}37$ cm. Son épaisseur est de $h \approx 3{,}6$ mm. Ces mesures ont été faites à $\pm\, 0{,}1$ mm près avec un pied à coulisse. Sachant que la masse volumique de l'acier est de 7'850 kg/m^3, on demande d'encadrer la masse de cette plaque métallique.

Solutions

Exercice 1

(1) $[-3,0]$

(2) $]-5,4[$

(3) $]-\infty,-2[$

(4) $]-\infty,3[\,\cup\,\{5\}$

(5) $]-6,1[\,\cup\,[4,6]$

(6) $[-8,-5[\,\cup\,]-2,1]\,\cup\,[4,6]$

(7) $\{-8,2,3\}\bigcup[-2,1]\cup[4,+\infty[$

Exercice 2

(1) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, 3 \le x \le 8\}$

(2) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 7\}$

(3) $\{x \in \mathbb{R} \,/ -9 \le x < 4\}$

(4) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 4 \text{ ou } x = 2\}$

(5) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x > -3 \text{ ou } x < -8\}$

(6) $\{x \in \mathbb{N} \,/\, 4 \le x \le 11\}$

(7) $\{x \in \mathbb{R} \,/ -3 < x \le 0 \text{ ou } 1 < x \le 5\}$

(8) $\{x \in \mathbb{Z} \,/ -2 \le x \le 4\}$

Exercice 3

Les figures sont à faire par l'élève !

(1) $A =]-3,3[$

(2) $B = [5,+\infty[\cup]-\infty,2]$

(3) $C = [4,6[\cup]6,8]$

(4) $D =]-\infty,3]$

(5) $E = \{0,1,2,3,4,5,6\}$

(6) $F =]3,7] \cup]10,+\infty[$

(7) $G = \varnothing$

Exercice 4

Les figures sont à faire par l'élève !

(1) $]2,5]$

(2) $[1,6[$

(3) $[3,8[$

(4) $\mathbb{R}$

(5) $[-3,8[$

(6) $\varnothing$

(7) $[-5,3]$

(8) $\varnothing$

(9) $[-4,+\infty[$

(10) $]-2,+\infty[$

(11) $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

(12) $]-12,12]$

(13) $\varnothing$

Tous les ensembles sont des intervalles, sauf le (11) !

Exercice 5

(1) $S =]-\infty,12]$

(2) $S = \left]-\infty,-\frac{21}{8}\right]$

(3) $S =]19,+\infty[$

(4) $S = \left]-\infty,-\frac{9}{8}\right]$

(5) $S = \mathbb{R}$

(6) $S = \left[-\frac{5}{18},+\infty\right[$

(7) $S = \left]-\infty,\frac{3}{5}\right]$

(8) $S = \left]\frac{59}{32},+\infty\right[$

(9) $S = \varnothing$

(10) $S =]-\infty,0]$

Exercice 6

(1) Soit x la part de A. La part de B est donc $360 - x$. Comme A obtient au moins le double de B :

$$x \geq 2(360 - x) \Leftrightarrow x \geq 720 - 2x \Leftrightarrow 3x \geq 720 \Leftrightarrow x \geq 240$$

Donc A obtient au moins 240 € et B obtient au plus 120 Euros.

(2) Soit x la longueur du 3^e^ côté. D'après l'inégalité triangulaire :

$$x < 4 + 6 \Leftrightarrow x < 10 \text{ cm}$$

Le 3^e^ côté mesure donc moins de 10 cm.

(3) Soit x la mesure en degrés d'un angle à la base. L'angle au sommet est alors $180 - 2x$. Donc :

$$180 - 2x \leq 24 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x \geq 78$$

Les angles à la base mesurent au moins 78°.

(4) Soit x le nombre de clous que je peux acheter :

$$25 - 0{,}02x \geq 0 \Leftrightarrow 0{,}02x \leq 25 \Leftrightarrow x \leq \frac{25}{0{,}02} = 1250$$

Je peux donc acheter au plus 1250 clous.

(5) Soit x l'avoir initial de Pierre. Après avoir dépensé le tiers, il lui reste $\frac{2}{3}x$. Un cinquième du reste est donc $\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}x = \frac{2}{15}x$. D'où :

$$x - \frac{1}{3}x - \frac{2}{15}x > 20 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x > 37{,}5$$

Pierre avait plus de 37,5 €.

(6) Soit x le nombre cherché :

$$\frac{5x - 24}{6} + 13 \geq x \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x \leq 54$$

Le nombre cherché est au plus égal à 54.

(7) Supposons que ce soit dans x années :

$$38 + x \geq (12 + x) + (8 + x) \Leftrightarrow x \geq 18$$

Dans 18 années, l' âge du père sera au moins égal à la somme des âges de ses enfants.

(8) Soit x le capital initial, l'intérêt annuel est de $x \cdot \frac{4}{100} = \frac{x}{25}$.

$$\frac{x}{25} \geq 100 \Leftrightarrow x \geq 2500$$

Le capital initial doit donc être au moins égal 2500 €.

(9) Soit x le capital initial. Le capital après un an s'élève à :

$$x + x \cdot \frac{5}{100} = \frac{21x}{20}$$

Après deux ans le capital est :

$$\frac{21x}{20} + \frac{21x}{20} \cdot \frac{5}{100} = \frac{441x}{400}$$

Donc :

$$\frac{441x}{400} \geq 4900 \Leftrightarrow x \geq 4444{,}\overline{4}$$

Le capital initial doit donc être au moins égal 4444,45 €.

(10) Soit x la capacité du bassin, en hl. La 1re fontaine remplit en 2 h : $2 \cdot \frac{x}{6} = \frac{x}{3}$ hl, la 2e, $2 \cdot \frac{x}{8} = \frac{x}{4}$ hl et la 3e, $2 \cdot \frac{x}{10} = \frac{x}{5}$ hl, donc :

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} > x - 26 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x < 120$$

Il y a moins de 120 hl dans le bassin.

Exercice 7

(1) $S =]-\infty, 5[$

(2) $S = [5, 12[$

(3) $S = \varnothing$

(4) $S = [5, +\infty[$

(5) $S = [-2, +\infty[$

Exercice 8

(1) Soit x le nombre donné.

$$\begin{aligned} & 45 \leq (x+5)\cdot 2 - 21 \leq 50 && /+21 \\ \Leftrightarrow\ & 66 \leq (x+5)\cdot 2 \leq 71 && /:2 \\ \Leftrightarrow\ & 33 \leq x+5 \leq 35{,}5 && /-5 \\ \Leftrightarrow\ & 28 \leq x \leq 30{,}5 \end{aligned}$$

Le nombre donné est compris entre 28 et 30,5.

(2) Soit x la distance ajoutée à la largeur. Les deux bases parallèles du trapèzes mesurent donc $x+5$ et 5 cm, sa hauteur est de 8 cm. Donc :

$$\begin{aligned} & 48 \leq \frac{x+5+5}{2}\cdot 8 \leq 50 \\ \Leftrightarrow\ & 48 \leq 4\cdot(x+10) \leq 50 \\ \Leftrightarrow\ & 12 \leq x+10 \leq 12{,}5 \\ \Leftrightarrow\ & 2 \leq x \leq 2{,}5 \end{aligned}$$

La distance ajoutée est comprise entre 2 et 2,5 cm.

(3) Soit x le nombre d'années cherché.

$$\begin{cases} 14 + x \geq \frac{2}{3}(36+x) & (1) \\ 12 + x \geq \frac{2}{3}(36+x) & (2) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow x \geq 30$

$(2) \Leftrightarrow x \geq 36$ Donc, dans 36 ans seulement.

Exercice 9

(1) $S = [0, 3]$

(2) $S = \left]-\infty, \frac{5}{7}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$

(3) $S = \left[\frac{4}{5}, 1\right] \cup \{2\}$

(4) $S = \mathbb{R}$

(5) $S = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

(6) $S = \left]-\infty, \frac{2}{11}\right[\cup \left]\frac{2}{5}, +\infty\right[$

(7) $S = \left[-13, \frac{17}{7}\right]$

(8) $S =]-\infty, -3] \cup \left[\frac{8}{5}, 3\right]$

(9) $S = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}\right\}$

(10) $S =]-\infty, 1]$

(11) $S =]1, 3[$

(12) $S = \left]-\frac{3}{19}, \frac{4}{3}\right[$

(13) $S =]-\infty, -2] \cup [-1, 2]$

(14) $S = \left]-\infty, \frac{5}{9}\right[\cup]1, +\infty[$

(15) $S =]-\infty, -4] \cup \{0\} \cup [4, +\infty[$

(16) $S = \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

Exercice 10

(1) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{3}\right\}$ $\qquad S = \left]-\infty, -\frac{5}{3}\right[\cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$

(2) $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ $\qquad S = \left[\frac{29}{8}, 4\right[$

(3) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ $\qquad S = \left]-\infty, -3\right[\cup \left[-\frac{2}{3}, +\infty\right[$

(4) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $\qquad S = \left]-\infty, 1\right[\cup \left]\frac{7}{2}, +\infty\right[$

(5) $D = \mathbb{R}^*$ $\qquad S = \left]-\infty, 0\right[\cup \{1\}$

(6) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$ $\qquad S = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

(7) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, -3\}$ $\qquad S = \left]-\infty, -3\right[\cup \left[-2, 0\right[\cup \left[2, +\infty\right[$

(8) $D = \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$ $\qquad S = \left]-\infty, -2\right[\cup \left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup \left]1, +\infty\right[$

(9) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-1, \frac{1}{3}\right\}$ $\qquad S = \left[-\frac{9}{5}, -1\right[\cup \left]-1, \frac{1}{3}\right[\cup \left[\frac{9}{5}, +\infty\right[$

(10) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$

$$\frac{7}{x^2 - x} - \frac{5}{2x^2 + 2x} \geq \frac{6}{1 - x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{x(x-1)} - \frac{5}{2x(x+1)} \geq \frac{6}{(1-x)(1+x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{14(x+1)}{2x(x+1)(x-1)} - \frac{5(x-1)}{2x(x-1)(x+1)} \geq -\frac{12x}{2x(x-1)(1+x)}$$

$$\Leftrightarrow \ldots$$

$$\Leftrightarrow \frac{21x + 19}{2x(x+1)(x-1)} \geq 0$$

Ensuite il faut faire un tableau du signe. On trouve :

$S = \left]-\infty, 1\right[\cup \left[-\frac{19}{21}, 0\right[\cup \left]1, +\infty\right[$

(11) $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$$\frac{49x^2 - 14x + 1}{x^2 - 6x + 9} \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \ldots$$

$$\Leftrightarrow \frac{(7x-1)^2 - 4(x-3)^2}{(x-3)^2} \leq 0$$

Le numérateur est une différence de 2 carrés …

$S = \left[-1, \frac{7}{9}\right]$

(12) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$

$$\frac{4}{x^2} \leq \frac{3}{x^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\left(x^2 - 1\right)}{x^2\left(x^2 - 1\right)} \leq \frac{3x^2}{x^2\left(x^2 - 1\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\left(x^2 - 1\right) - 3x^2}{x^2\left(x^2 - 1\right)} \leq 0$$

$\Leftrightarrow$ ...

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x^2\left(x^2-1\right)} \leq 0$$

...

$S = [-2,-1[\cup]1,2]$

(13) $D = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

$$\frac{3}{x^3-2x^2+x} - \frac{1+2x}{3x^2-6x+3} \geq \frac{1}{3x(1-x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x\left(x^2-2x+1\right)} - \frac{1+2x}{3\left(x^2-2x+1\right)} \geq \frac{1}{3x(1-x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x(x-1)^2} - \frac{1+2x}{3(x-1)^2} \geq -\frac{1}{3x(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{3x(x-1)^2} - \frac{x+2x^2}{3x(x-1)^2} + \frac{x-1}{3x(x-1)^2} \geq 0$$

$\Leftrightarrow$ ...

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(4-x^2\right)}{3x(x-1)^2} \geq 0$$

...

$S =]-\infty,-2] \cup]0,1[\cup]1,2]$

(14) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$

$$\frac{1}{4+8x} + \frac{7}{4-16x^2} \geq \frac{2}{x-2x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4(1+2x)} + \frac{7}{4\left(1-4x^2\right)} \geq \frac{2}{x(1-2x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4(1+2x)} + \frac{7}{4(1-2x)(1+2x)} - \frac{2}{x(1-2x)} \geq 0$$

...

$$\Leftrightarrow \frac{-(x+2)^2}{2x(1-2x)(1+2x)} \geq 0 \ /\cdot(-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{2x(1-2x)(1+2x)} \leq 0$$

...

$S = \{-2\} \cup]-\frac{1}{2},0[\cup]\frac{1}{2},+\infty[$

Exercice 11

(1) a) $2x < 6$

b) $-3y \geq -18$

c) $\dfrac{x}{2} + 5y < \dfrac{63}{2}$

d) $x^2 + y^2 < 45$

e) On ne peut rien dire de $x - y$ car $x < 3$ et $-y \geq -6$.

f) On ne peut rien dire de $x \cdot y$ car on ne connaît ni le signe de x ni de y

(2) a) $9 < a^2 \leq 16$

b) $\dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{3}$

c) $\dfrac{9}{2} < 2a - \dfrac{3}{10-2a} < \dfrac{29}{4}$

d) $\dfrac{1}{17} < \dfrac{a-2}{a^2+a-3} < \dfrac{2}{9}$

(3) a) $3b - 4 < -19$

b) $b^2 + 1 > 26$

c) $-\dfrac{4}{5b+1} < \dfrac{1}{6}$

d) $-2(b-1)(2b+1) > -108$

(4) a) $\dfrac{5}{4} < 3x - 2y + 8 \leq \dfrac{9}{2}$

b) $-\dfrac{5}{8} < \dfrac{xy}{3} \leq -\dfrac{1}{6}$

c) $-1 < \dfrac{4x}{2y+3} \leq -\dfrac{1}{3}$

d) $-\dfrac{3}{4} < \dfrac{x-1}{3y} < -\dfrac{1}{3}$

e) $-2 < x^2 - y^2 < \dfrac{9}{16}$

f) $-17 < \dfrac{x-2y}{x^2} < -\dfrac{8}{5}$

(5) Voir devoir n° 33 dans le répertoire « Devoirs 4e » sur ce site.

a) $-\dfrac{1}{10} \leq \dfrac{1}{a} - \dfrac{2}{b^2} < \dfrac{7}{9}$

b) $\dfrac{1}{16} < \dfrac{a+1}{2a-b^3} < \dfrac{7}{20}$

c) $0 \leq (a+b)^2 < 4$

Exercice 12

(1) Soit c la quantité de coings, m la quantité de mirabelles et p le prix d'un kilo de mirabelles. La dépense totale est : $d = 4{,}6c + pm$.

$$\begin{cases} 5 \leq c \leq 6 \\ 3{,}5 \leq m \leq 4{,}5 \\ 3{,}8 \leq p \leq 4{,}3 \end{cases}$$

On trouve : $36{,}3 \leq d \leq 46{,}95$.

(2) Soit t la durée pendant laquelle Sophie roule et v sa vitesse. La distance parcourue est $d = v \cdot t$.

$$\begin{cases} 3{,}3 \leq t \leq 3{,}75 \\ 110 \leq v \leq 130 \end{cases}$$

On trouve : $363 \leq d \leq 487{,}5$ (km).

(3) Bertrand rentre en $320/100 = 3{,}2$ h. Albert doit être rentré en t heures avec $t \leq 3{,}2 - 0{,}5 = 2{,}7$ h. Sa vitesse moyenne est $v = 320/t$.

Comme $0 < t \leq 2{,}7$, on a :

$$\frac{1}{t} \geq \frac{1}{2{,}7}, \text{ donc } v = \frac{320}{t} \geq \frac{320}{2{,}7} \approx 118{,}52$$

La vitesse moyenne minimale d'Albert doit donc être de $118{,}52$ km/h.

(4) Soit x la longueur d'un côté du carré.

$$7{,}1 \leq x \leq 7{,}2.$$

L'aire du carré est $A = x^2$ et on a : $50{,}41 \leq A \leq 51{,}84$ (cm^2).

La circonférence du carré est $P = 4x$ et on a : $28{,}4 \leq P \leq 28{,}8$ (cm).

(5) $1231{,}59 \leq A \leq 1244{,}11$ (cm^2)

(6) On a :

$$\begin{cases} 45{,}2 \leq L \leq 45{,}4 \\ 23{,}6 \leq l \leq 23{,}8 \qquad \text{(en mm)} \\ 3{,}5 \leq h \leq 3{,}7 \end{cases}$$

Le volume V de la plaque est $V = L \cdot l \cdot h$. On a :

$$3733{,}52 \leq V \leq 3997{,}924 \text{ (en mm}^3\text{)}$$

La masse volumique de l'acier est :

$$7'850 \text{ kg/m}^3 = 7'850'000 \text{ g/m}^3 = 0{,}00785 \text{ g/mm}^3.$$

La masse M de la plaque est égale à son volume multiplié par la masse volumique. Donc :

$$29{,}308132 \leq \mathrm{M} \leq 31{,}3837034 \text{ (en g)}$$

On arrondit de façon raisonnable :

$$29{,}3 < M < 31{,}4 \text{ (en g)}.$$