Exercices sur
les figures et triangles semblables,
& sur le théorème de Thalès

A. Figures et triangles semblables

Exercice 1

Les figures suivantes sont-elles toujours semblables ? Justifier ! Sinon, sous quelle(s) condition(s) supplémentaires ces figures sont-elles semblables ?

(1) Deux rectangles ;

(2) Deux parallélogrammes ;

(3) Deux triangles rectangles ;

(4) Deux trapèzes dont tous les côtés sont deux à deux parallèles.

Exercice 2

(1) Deux triangles Δ et Δ' ont des côtés mesurant respectivement 24, 50, et 42 cm pour Δ ainsi que 25, 21 et 12 cm pour Δ'. Ces triangles sont-ils semblables ? Si oui, quel est le rapport de similitude qui permet de passer de Δ à Δ' ? de Δ' à Δ ? Quel est le rapport des aires des deux triangles ?

(2) Même question lorsque les côtés de Δ mesurent 16, 30 et 26 cm et ceux de Δ' 20, 22.5 et 12 mm.

Exercice 3

Deux triangles Δ et Δ' ont tous les deux un angle de 45° compris entre deux côtés mesurant respectivement 30 et 60 mm pour Δ et 13 et 26 mm pour Δ'. Ces triangles sont-ils semblables ? Si oui, quel est le rapport de similitude qui permet de passer de Δ à Δ' ?

Exercice 4

Deux triangles ABC et $A'B'C'$ rectangles en A et A' respectivement vérifient : $\overline{AB} = 78$, $\overline{AC} = 18$, $\overline{A'B'} = 91$, $\overline{A'C'} = 21$. Sont-ils semblables ? Justifier avec un critère approprié.

Exercice 5

(1) Deux rectangles ont les dimensions 30 x 14 cm et 42 x 90 cm. Ces rectangles sont-ils semblables ? Si oui, quel est le rapport des périmètres de ces deux rectangles ?

(2) Même question lorsque les dimensions des rectangles sont 10 x 3 m et 15 x 5 m.

Exercice 6

Construire un triangle isocèle Δ dont la base mesure 6 cm et dont les angles à la base mesurent 70°. Construire un triangle Δ' semblable à Δ et tel que le rapport de similitude de Δ à Δ' soit 1,5. Que peut-on dire de Δ' ? Justifier !

Exercice 7

Construire un rectangle dont la longueur mesure le double de la largeur. Construire un deuxième rectangle semblable au premier. Possède-t-il aussi cette propriété ? Justifier !

Exercice 8

Construire deux triangles ***non semblables*** ayant tous les deux un angle de 20° et deux côtés mesurant 8 et 5 cm.

Exercice 9

(1) On fait un agrandissement d'un losange dont les diagonales mesurent respectivement 5 et 6 cm au rapport 125%. Déterminer l'aire et le périmètre du losange image.

(2) On fait une réduction d'un triangle équilatéral dont les côtés mesurent 12 cm au rapport 80 %.

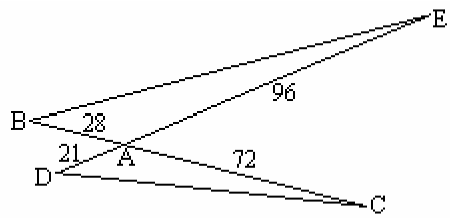
   a) Calculer la longueur d'un côté du triangle image.

   b) Calculer les longueurs des hauteurs du triangle initial et du triangle image.

Exercice 10

(1) Démontrer que les triangles DAC et BAE ci-contre sont semblables (les mesures sont en mm).

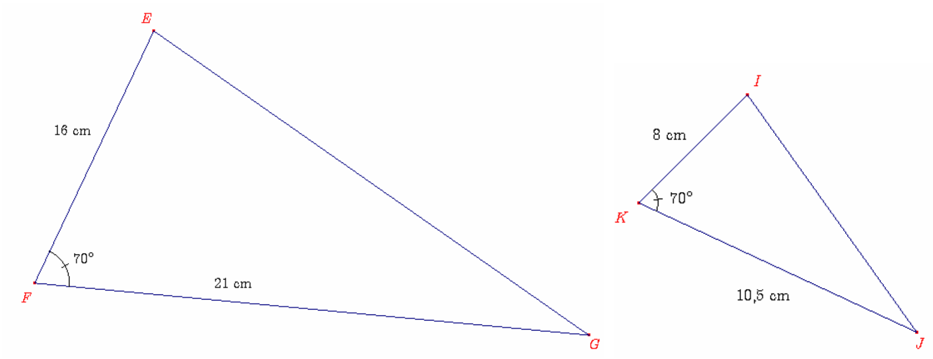
(2) Quel est le rapport des aires de ces deux triangles ?



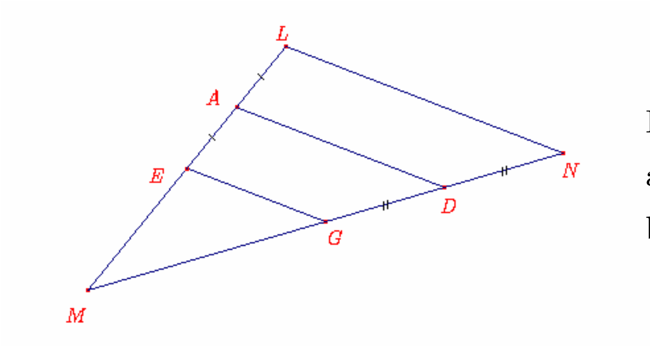
Exercice 11

Y a-t-il des triangles semblables sur les figures suivantes ? Justifier ! Si oui, préciser le rapport de similitude qui permet de passer de l'un à l'autre.

(1)



(2)

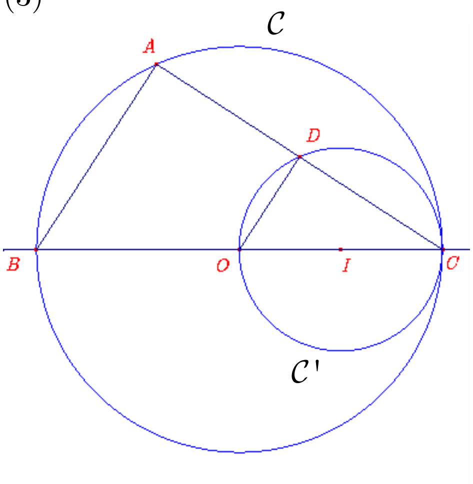


Données :

a) $A = \text{mil}[EL]$ et $D = \text{mil}[GN]$;

b) $E = \text{mil}[ML]$ et $G = \text{mil}[MN]$.

(3)

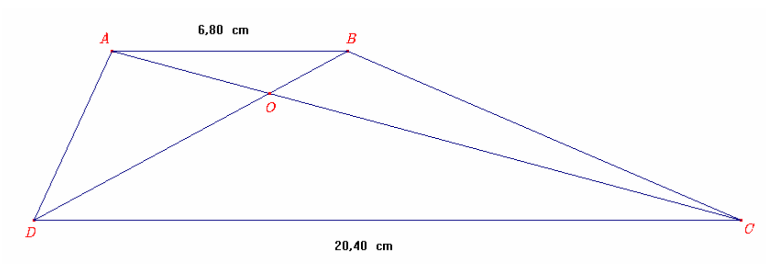


Données :

a) O est le centre du cercle $\mathcal{C}$ et I est le centre du cercle $\mathcal{C}'$;

b) A est un point du cercle $\mathcal{C}$ et D est un point d'intersection de AC et du cercle $\mathcal{C}'$.

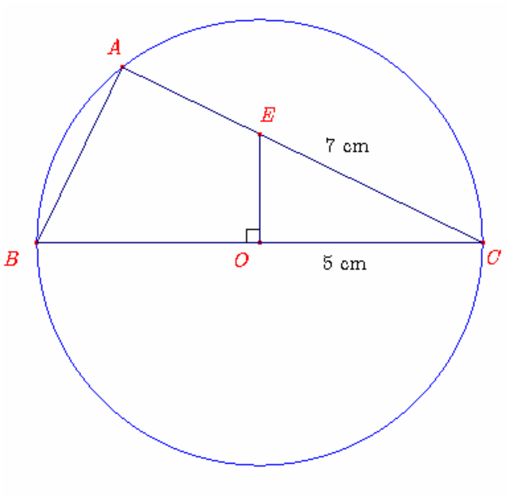
(4)



Données :

$ABCD$ est un trapèze de bases parallèles $[AB]$ et $[CD]$.

(5)



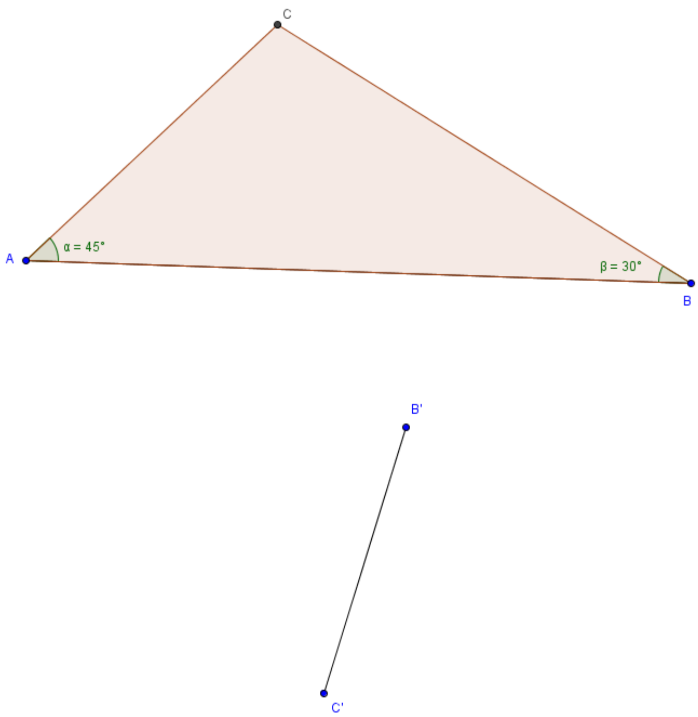
Données :

a) O est le centre du cercle $\mathcal{C}$;

b) $\overline{EC} = 7$ cm et $\overline{OC} = 5$ cm ;

c) $EO \perp BC$.

Exercice 12



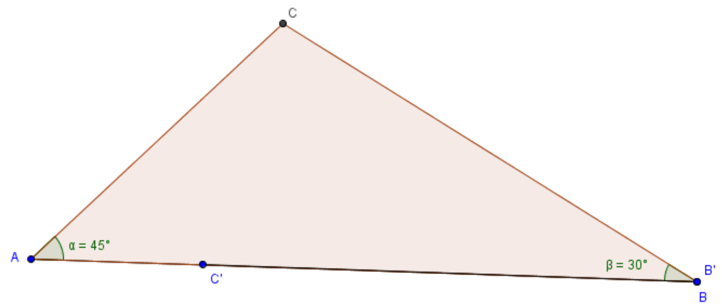
(1) a) Construire sur la figure ci-dessus le point A' tel que :

$$ABC \overset{\text{dir.}}{\sim} A'B'C'.$$

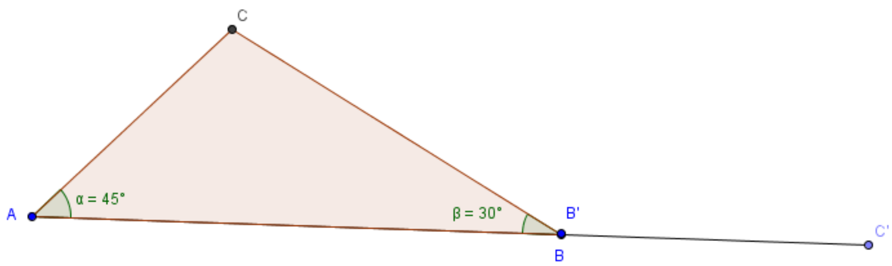
b) Construire sur même figure le point A'' tel que :

$$ABC \overset{\text{inv.}}{\sim} A''B'C'.$$

(2) Même exercice dans le cas de la figure ci-dessous :



(3) Même exercice dans le cas de la figure ci-dessous :



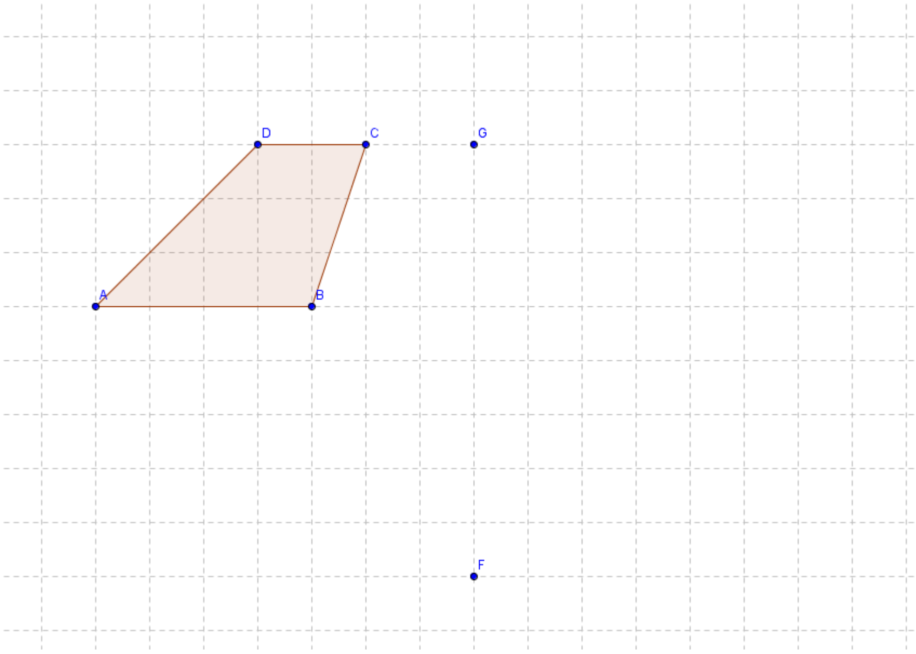
Exercice 13

Sur la figure ci-dessous, une similitude s transforme le trapèze $ABCD$ en le trapèze ***inversement*** semblable $FGHI$. On suppose que $s(A) = F$ et $s(B) = G$ (sommets homologues).

a) Quel est le rapport de la similitude s ?

b) Construire avec précision le trapèze $FGHI$ en utilisant la grille.

c) Déterminer les aires et les périmètres des deux trapèzes.



Exercice 14

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A.

(1) Démontrer que les triangles ABC, HBA et HAC sont semblables.

(2) En déduire que : a) $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{BC} \cdot \overline{AH}$

b) $\overline{HA}^2 = \overline{HB} \cdot \overline{HC}$

c) $\overline{AB}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BC}$

d) $\overline{AC}^2 = \overline{CH} \cdot \overline{BC}$

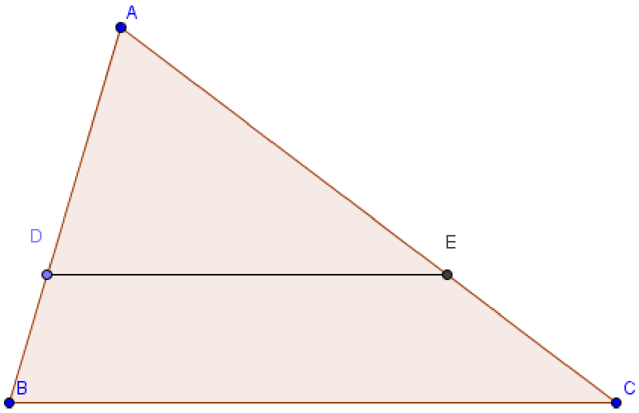
(3) Additionner membre par membre les deux dernières égalités et en déduire une nouvelle démonstration du théorème de Pythagore.

Exercice 15

$ABCD$ étant un parallélogramme, une droite comprenant A coupe BC en P et CD en Q. Démontrer que $\overline{BP} \cdot \overline{DQ} = \overline{AB} \cdot \overline{AD}$

B. Théorème de Thalès et réciproque

Exercice 16



Sur cette figure on fait l'hypothèse que DE // BC. Calculer les longueurs manquantes parmi $\overline{AD}$, $\overline{DB}$, $\overline{AB}$, $\overline{AE}$, $\overline{EC}$, $\overline{AC}$, $\overline{DE}$, $\overline{BC}$ dans les cas suivants :

(1) $\overline{AD} = 5\,,\ \overline{DB} = 3\,,\ \overline{AE} = 6\,,\ \overline{BC} = 12\,.$

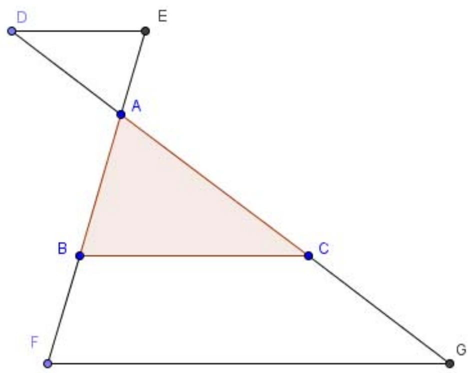
(2) $\overline{AE} = 15,\ \overline{AC} = 20,\ \overline{DB} = 6,\ \overline{DE} = 18$

(3) $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = \dfrac{2}{3},\ \overline{AB} = 7,\ \overline{EC} = 3,\ \overline{BC} = 15$

(4) $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = 3,\ \overline{AB} = 16,\ \overline{AE} = 18,\ \overline{BC} = 20$

(Les dimensions ne sont pas respectés sur la figure.)

Exercice 17

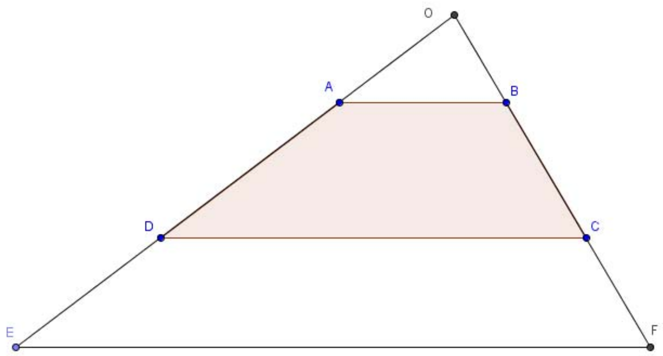


Sur la figure ci-dessus, on donne :

$\overline{DE} = 6\,,\ \overline{FG} = 16\,,\ \overline{AD} = 7\,,\ \overline{AC} = 8\,,\ \overline{EB} = 12\,.$

Calculer $\overline{CG}\,,\ \overline{AB}\,,\ \overline{BF}\,,\ \overline{BC}\,.$

Exercice 18

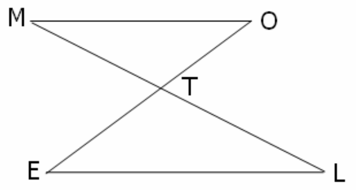


Sur la figure ci-dessus, on suppose que $AB // DC // EF$ et on donne dimensions du trapèze $ABCD$: $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 4$, $\overline{CD} = 8$, $\overline{DA} = 5$.

(1) Déterminer le périmètre du triangle OAB.

(2) Sachant que $\overline{DE} = 3$, déterminer le périmètre du trapèze $CDEF$.

Exercice 19



On donne :

$\overline{MT} = 18$ cm

$\overline{OT} = 7{,}6$ cm

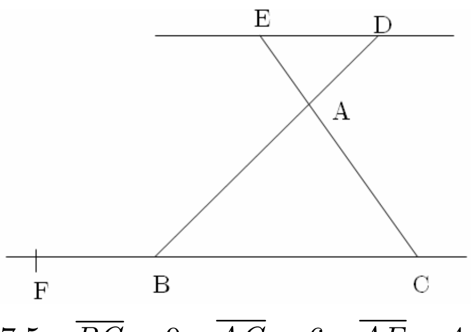
$\overline{TE} = 5$ cm

$\overline{TL} = 12$ cm

Les droites MO et EL sont-elles parallèles ?

Exercice 20

Sur la figure ci-dessous, l'unité de longueur est le centimètre.



On donne : $\overline{AB} =$ 7,5 ; $\overline{BC} = 9$; $\overline{AC} = 6$; $\overline{AE} = 4$; $\overline{BF} = 6$.

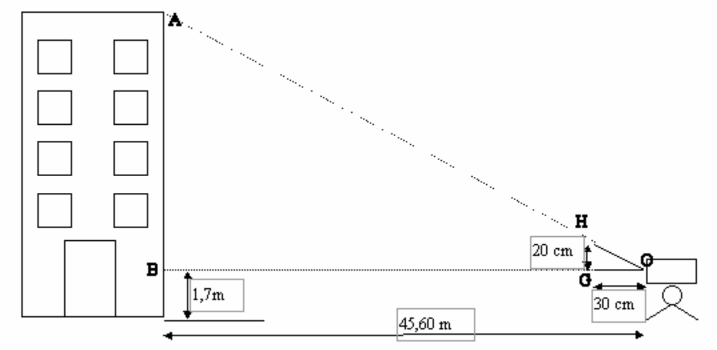
Les droites DE et BC sont parallèles.

(1) Calculer $\overline{AD}$.

(2) Démontrer que les droites EF et AB sont parallèles.

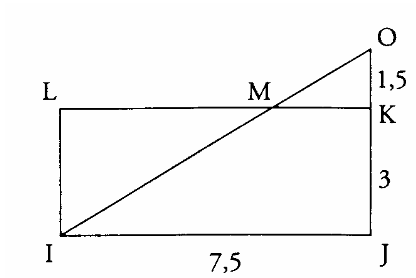
(3) En déduire la nature du quadrilatère $EDBF$.

Exercice 21



Quelle est la hauteur de la tour ?

Exercice résolu 22



Sur la figure ci-dessus, qui n'est pas en vraie grandeur, $IJKL$ est un rectangle. O, M et I sont alignés ainsi que O, K et J. Les mesures en cm sont : $\overline{IJ} = 7{,}5$; $\overline{KJ} = 3$; $\overline{OK} = 1{,}5$. Calculer les valeurs exactes de $\overline{MK}$ et de $\overline{OI}$, puis l'arrondi de $\overline{OI}$ au mm.

Corrigé :

$MK \,//\, IJ$, donc d'après le théorème de Thalès on a :

$$\frac{\overline{OK}}{\overline{OJ}} = \frac{\overline{MK}}{\overline{IJ}} \Leftrightarrow \frac{1,5}{1,5+3} = \frac{\overline{MK}}{7,5}$$
$$\Leftrightarrow 4,5 \cdot \overline{MK} = 11,25$$
$$\Leftrightarrow \overline{MK} = \frac{11,25}{4,5} = 2,5$$

La longueur $\overline{MK}$ est de 2,5 cm.

Dans le triangle OIJ rectangle en J, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$\overline{OI}^2 = \overline{OJ}^2 + \overline{JI}^2$

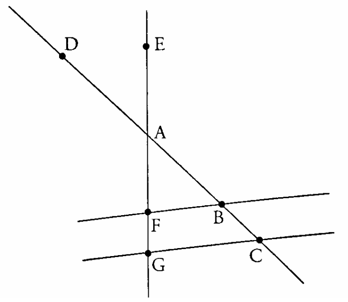
$\overline{OI}^2 = 4{,}5^2 + 7{,}5^2 = 76{,}5$

$\overline{OI} = \sqrt{76{,}5}$ cm

$\overline{OI} \approx 8{,}7$cm

La longueur $\overline{OI}$ est égale à $\sqrt{76{,}5}$ cm c.-à-d. à environ 8,7cm.

Exercice résolu 23



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas dessinée en vraie grandeur, les droites BF et CG sont parallèles.

(1) On donne : $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 4$ et $\overline{AF} = 3$. Calculer $\overline{AG}$ puis $\overline{FG}$.

(2) On donne : $\overline{AD} = 7$ et $\overline{AE} = 4{,}2$. Démontrer que les droites ED et BF sont parallèles.

Corrigé :

(1) Comme $FB \; // \; CG$, on a, d'après la propriété de Thalès :

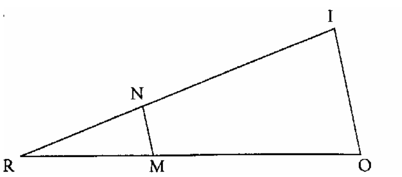
$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{3}{\overline{AG}} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow 5 \cdot \overline{AG} = 3 \cdot 9 \Leftrightarrow \overline{AG} = \frac{27}{5}$$

$$\overline{GF} = \overline{AG} - \overline{AF} = \frac{27}{5} - 3 = \frac{27}{5} - \frac{5}{5} = \frac{22}{5}$$

(2) $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AF}} = \dfrac{4{,}2}{3} = 1{,}4$ et $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \dfrac{7}{5} = 1{,}4$

Donc, d'après la réciproque de la propriété de Thalès, les doites EF et BD sont parallèles.

Exercice résolu 24



Sur la figure ci-contre, ROI est un triangle tel que $\overline{RO} = 8$ cm $\overline{RI} = 7$ cm et $\overline{OI} = 3$ cm. Soit M un point de $[RO]$. On trace par M la parallèle à OI qui coupe RI en N. On pose : $\overline{RM} = x$ avec $0 \leq x \leq 8$.

(1) Exprimer les longueurs $\overline{RN}$ et $\overline{MN}$ en fonction de x.

(2) Montrer que le périmètre p_1 du triangle RMN est égal à $\dfrac{9}{4}x$.

(3) Montrer que le Périmètre p_2 du trapèze $MOIN$ est égal à $18 - \dfrac{3}{2}x$.

(4) Déterminer x pour que les deux périmètres soient égaux.

Corrigé :

(1) D'après la propriété de Thalès on a :

$$MN \,//\, IO \Rightarrow \frac{\overline{RM}}{\overline{RO}} = \frac{\overline{RN}}{\overline{RI}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{IO}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{8} = \frac{\overline{RN}}{7} = \frac{\overline{MN}}{3}$$

Donc : $\overline{RN} = \dfrac{7x}{8}$ et $\overline{MN} = \dfrac{3x}{8}$.

(2) $p_1 = \overline{RM} + \overline{MN} + \overline{RN} = x + \dfrac{3x}{8} + \dfrac{7x}{8} = \dfrac{18x}{8} = \dfrac{9x}{4}$.

(3) $p_2 = \overline{MO} + \overline{OI} + \overline{IN} + \overline{MN} = (8-x) + 3 + (7 - \dfrac{7x}{8}) + \dfrac{3x}{8} = ... = 18 - \dfrac{3x}{2}$

(4) $p_1 = p_2$

$\Leftrightarrow \dfrac{9x}{4} = 18 - \dfrac{3x}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{9x}{4} + \dfrac{3x}{2} = 18$

$\Leftrightarrow \dfrac{9x}{4} + \dfrac{6x}{4} = 18$

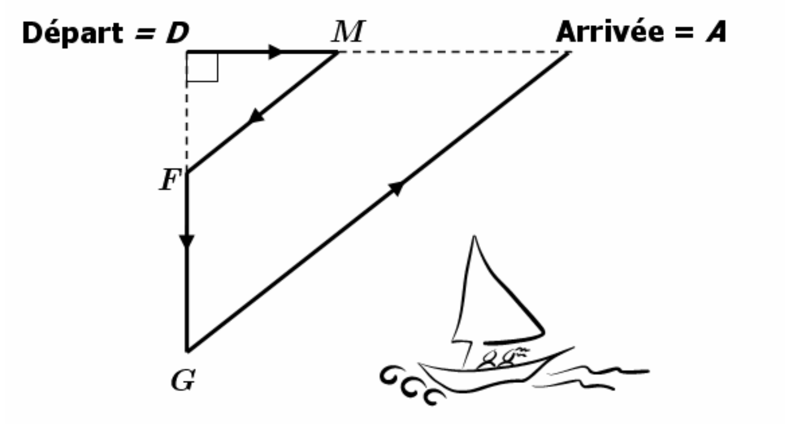
$\Leftrightarrow \dfrac{15x}{4} = 18$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{72}{15} = \dfrac{24}{5} = 4{,}8$

Les deux périmètres p_1 et p_2 sont égaux si x est égal à 4,8 cm.

Exercice 25

Des bateaux participent à une régate. Ils doivent suivre le parcours suivant (en gras et fléché sur la figure) :



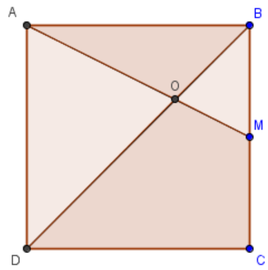
On donne : - $\overline{DM} = 8$ km

- $\overline{DF} = 6$ km
- $\overline{MA} = 2 \cdot \overline{DM}$
- $\widehat{FDM} = 90°$
- $F \in DG$ et $M \in DA$
- les droites FM et AG sont parallèles.

(1) Calculer $\overline{FM}$, $\overline{FG}$ et $\overline{AG}$.

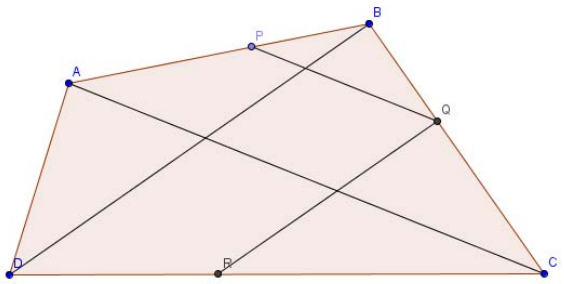
(2) Vérifier que la longueur de la régate est de 60 km.

Exercice 26



Le carré $ABCD$ ci-contre est subdivisé en 4 morceaux. Sachant que M est le milieu du côté $[BC]$ et que la longueur d'un côté du carré mesure 1, on demande de calculer l'aire des 4 morceaux.

Exercice 27



Sur la figure ci-contre, $PQ\ //AC$ et $QR\ //BD$.

(1) Démontrer que :

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{RC}}{\overline{RD}}.$$

(2) Que peut-on dire de R lorsque $P = \text{mil}[AB]$?

Exercice 28

Dans un trapèze convexe $ABCD$, la grande base $[CD]$ mesure le double de la petite base $[AB]$. Démontrer que si O est le point d'intersection des côtés non parallèles BC et AD, alors $A = \text{mil}[OD]$ et $B = \text{mil}[OC]$.

Exercice 29

(1) Dans un triangle quelconque ABC, la bissectrice intérieure de l'angle $\hat{A}$, notée b, coupe le côté $[BC]$ en I. La parallèle à b passant par C coupe AB en B'. Faire une figure.

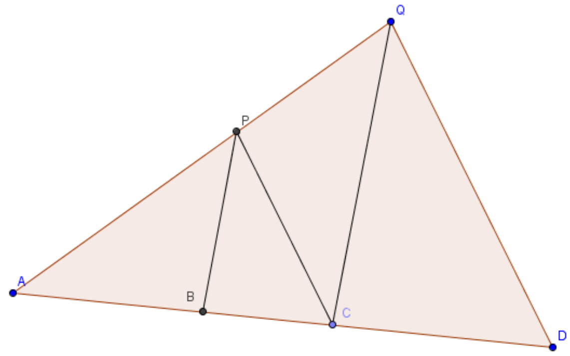
(2) Montrer que le triangle $AB'C$ est isocèle en raisonnant sur les angles.

(3) En déduire à l'aide du théorème de Thalès que :

$$\frac{\overline{IB}}{\overline{IC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

(4) Enoncer le théorème ainsi démontré.

Exercice 30



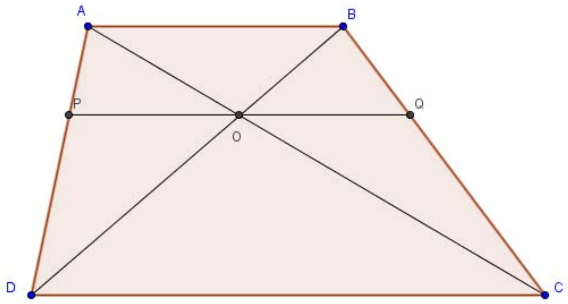
Sur la figure on fait les hypothèses : $BP // CQ$ et $CP // DQ$.

Démontrer que :

(1) $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{BC} \cdot \overline{AC}$

(2) $\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AD}$

Exercice 31



Sur la figure ci-contre $ABCD$ est un trapèze de bases parallèles $[AB]$ et $[CD]$. Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en O. La parallèle aux deux bases du trapèze passant par O coupe $[AD]$ en P et $[BC]$ en Q.

(1) Montrer que : $O = \text{mil}[PQ]$. ***Indication*** : Appliquer le théorème de Thalès dans les triangles ACD et BCD.

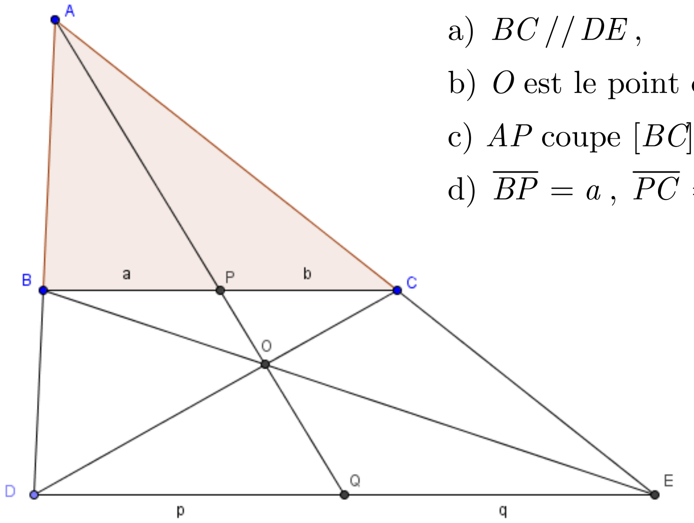
(2) En déduire ***le théorème du papillon*** : Si AB // CD, alors les deux triangles OAD et OBC ont même aire.

Exercice 32

(1) Montrer que si a, b, p et q sont des réels ***strictement positifs*** alors :

$$\begin{cases} \dfrac{a}{p} = \dfrac{b}{q} \\ \dfrac{a}{q} = \dfrac{b}{p} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} a = b \\ p = q \end{cases}$$

(2) Sur la figure suivante on fait les hypothèses que :



a) $BC // DE$,

b) O est le point d'intersection de BE et CD,

c) AP coupe $[BC]$ en P et $[DE]$ en Q,

d) $\overline{BP} = a$, $\overline{PC} = b$, $\overline{DQ} = p$ et $\overline{QE} = q$.

Montrer que sous ces hypothèses $\dfrac{a}{p} = \dfrac{b}{q}$ et $\dfrac{a}{q} = \dfrac{b}{p}$.

Que peut-on en déduire quant aux points P et Q ?