

### 1 Exemples d'introduction

Dans lesquels on essaie de vous convaincre de l'utilité de la notion de *polynôme*.

#### Exercice 1



Pour fabriquer une boîte parallélépipédique, on dispose d'une feuille de carton fort qui est un carré de 30 cm de côté; on découpe 4 coins carrés de côté  $x$  cm.

1. À quel intervalle appartient  $x$  ?
2. Calculez  $V(x)$ , le volume de la boîte, en fonction de  $x$ .
3. Construisez
  - un *tableau des images*
  - une *représentation graphique* de  $V$ .
 Qu'est-ce que vous observez ?
4. Afin de pouvoir *comparer*  $V(x)$  et  $V(5)$ , nous nous proposons d'étudier le *signe* du *polynôme*  $V(x) - V(5)$ .  
 Posons, pour simplifier la notation :  

$$V(x) - V(5) = P(x).$$
 Observons que 5 est un *zéro* de  $P(x)$ .  
 Essayons alors d'écrire le polynôme  $P(x)$  sous forme d'un *produit* de facteurs.
  - Vérifiez que  $x - 5$  est un *facteur* de  $P(x)$ .
  - *Factorisez* ensuite  $P(x)$ .
5. En déduire que le volume est *maximal* pour  $x = 5$ .
6. Retenez le *message* essentiel de l'exercice : pour résoudre un problème d'optimisation il faut parfois utiliser des *techniques algébriques* :
  - *factoriser* un polynôme
  - *étudier le signe* d'un polynôme (factorisé).

#### Exercice 2

Pour fabriquer une boîte parallélépipédique, on dispose d'une feuille de carton fort qui est un rectangle de dimensions 80 cm  $\times$  50 cm; on découpe 4 coins carrés de côté  $x$  cm.

1. À quel intervalle appartient  $x$  ?
2. Calculez  $V(x)$ , le volume de la boîte en fonction de  $x$ .
3. Construisez un *tableau des images* de  $V$ .
4. Pour quelle valeur de  $x$  le volume est-il *maximal*? Notons cette valeur  $\alpha$ .
5. Démontrez votre assertion en
  - *factorisant* le polynôme  $V(x) - V(\alpha)$
  - *étudiant le signe* de ce polynôme factorisé.

### 2 Division euclidienne

#### Exercice 3

Effectuez la *division euclidienne* de  $A(x)$  par  $B(x)$  (en précisant le *quotient*  $Q(x)$  et le *reste*  $R(x)$ ).

1.  $A(x) = 30x^2 + 17x + 2;$   
 $B(x) = 6x + 1$
2.  $A(x) = 15x^3 + 36x^2 + 12x - 2;$   
 $B(x) = 3x^2 + 6x + 1$
3.  $A(x) = 21x^4 + 57x^3 + 43x^2 + 17x - 2;$   
 $B(x) = 7x^2 + 5x + 2$
4.  $A(x) = 6x^3 - 11x^2 + 6x - 1;$   
 $B(x) = 2x^2 - 3x + 1$
5.  $A(x) = 8x^4 - 14x^3 + 5x^2 - 8x - 3;$   
 $B(x) = 4x^2 - x + 3$
6.  $A(x) = 18x^4 - 45x^3 + 34x^2 + 5x - 20;$   
 $B(x) = 6x^2 - 5x - 5$
7.  $A(x) = 28x^5 - 29x^4 + 12x^3 + 6x^2 - 17x + 7;$   
 $B(x) = 4x^2 - 3x + 2$
8.  $A(x) = 21x^7 - 28x^6 + x^5 + \frac{27}{2}x^4 + 7x^3 + 4x^2 - \frac{15}{2}x + 9;$   
 $B(x) = 7x^3 - 2x + 3$
9.  $A(x) = 16x^7 - 40x^3 + 17x^2 + 10x + 1;$   
 $B(x) = 4x^3 - 5x - 1$

### 3 Racines d'un polynôme

#### Exercice 4

Déterminez si le nombre  $\alpha$  est *racine* du polynôme  $P$ .

	$P(x)$	$\alpha$	$P(\alpha)$
1°	$4x^3 + 2x^2 - 3x + 18$	-2	
2°	$2x^2 - x - 6$	$-\frac{3}{2}$	
3°	$x^2 - 2x - 1$	$1 + \sqrt{2}$	
4°	$4x^2 - 4x - 1$	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$	

#### Exercice 5

Quels sont les *zéros* (les *racines*) des polynômes suivants ?

- |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|
| 1° $(x + 2) \cdot (x - 2)$ | 2° $9x^2 - 16$             |
| 3° $(x + \sqrt{3})^2$      | 4° $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$  |
| 5° $x^2 + x - 6$           | 6° $(x^2 + x - 6)(2x - 1)$ |
| 7° $x^2 - 4x - 5$          | 8° $x^2 - x - 6$           |
| 9° $x^2 - 3x + 2$          | 10° $2x^2 + 3x - 2$        |

4 Loi du reste — Le schéma de Horner

Exercice 6

Évaluez  $P(\alpha)$  à l'aide du schéma de Horner :

	$P(x)$	$\alpha$	$P(\alpha)$
1°	$x^3 - x^2 + 2x - 6$	3	
2°	$x^3 + 3x^2 + 3x + 3$	-2	
3°	$2x^3 - x + \frac{1}{2}$	1	
4°	$x^3 + 4x^2 - 4x + 5$	-1	
5°	$2x^3 + 5x^2 - 2x + 3$	$-\frac{1}{2}$	

Exercice 7

Étudiez si le polynôme  $A(x)$  est divisible par le binôme  $B(x)$  (en appliquant la loi du reste) :

	$A(x)$	$B(x)$	divisible ?
1°	$x^2 - x - 6$	$x - 3$	
2°	$x^3 + 3x^2 + 3x + 3$	$x + 2$	
3°	$2x^3 - x + 2$	$x - 1$	
4°	$x^3 + 4x^2 - 4x + 5$	$x + 5$	
5°	$2x^3 + 5x^2 - 2x + 3$	$x + 3$	

Exercice 8

Effectuez la division de  $P$  par  $Q$  à l'aide de la grille de Horner.

	$P(x)$	$Q(x)$
1°	$x^4 - 3x^2 + 5x - 3$	$x - 1$
2°	$3x^3 - 8x + 5$	$x - 1$
3°	$2x^3 - 4x^2 + 5x - 10$	$x - 2$
4°	$2x^3 - 4x^2 + 5x - 10$	$x + 2$

Exercice 9

Déterminez les racines des polynômes suivants.

- 1°  $3x^3 - 11x^2 + 9x - 1$
- 2°  $2x^5 - 7x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 6x$
- 3°  $x^3 - 3x^2 - 9x + 2$
- 4°  $7x^3 + 6x^2 + x$
- 5°  $-21x^4 - 5x^3 + 26x^2 + 5x - 5$
- 6°  $x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 5$
- 7°  $x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 4x + 4$
- 8°  $x^6 + 4x^5 + 3x^4 - 3x^2 - 12x - 9$
- 9°  $8x^6 - 27$

5 Fractions algébriques

Exercice 10

Simplifiez les fractions suivantes :

- 1°  $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$
- 2°  $\frac{2x^2 + 3x - 2}{4x^2 - 1}$
- 3°  $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 4}$
- 4°  $\frac{3x^3 - 4x^2 - x + 2}{3x^2 - 6x + 3}$
- 5°  $\frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 - 2x - 3}$
- 6°  $\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^3 - 3x - 2}$
- 7°  $\frac{4x^3 + 8x^2 - 9x - 18}{2x^2 + 7x + 6}$
- 8°  $\frac{3x^2 - 2x - 5}{-x^2 - 3x - 2}$
- 9°  $\frac{2x^2 - 13x - 7}{4x^2 + 4x + 1}$
- 10°  $\frac{x^3 + x^2 - 14x - 24}{x^2 - 2x - 8}$

Exercice 11

Résolvez les équations suivantes en réduisant d'abord au même dénominateur.

- 1°  $\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{35}$
- 2°  $\frac{4}{x^2 - 1} + \frac{3}{x + 1} = \frac{2}{x - 1} + 1$
- 3°  $\frac{x - 3}{x - 1} + \frac{x - 1}{x - 3} = \frac{25}{12}$
- 4°  $\frac{2x - 1}{3} + \frac{3}{x - 8} = \frac{x - 5}{x - 8} + 3$
- 5°  $\frac{8x - 3}{x + 3} - 2x = 4 - \frac{3x^2}{x + 3}$
- 6°  $\frac{x + 2}{x - 1} + \frac{x - 4}{2x} = \frac{4}{2x^2 - 2x}$
- 7°  $\frac{x + 3}{x + 2} - \frac{x + 2}{x + 3} = \frac{x^2 - 75}{x^2 + 5x + 6}$
- 8°  $\frac{x - 2}{3(x - 1)} + \frac{x - 1}{4(x - 2)} = \frac{x + 2}{x^2 - 3x + 2}$

6 Inéquations

Exercice 12

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes.

- 1°  $x - 1 > 0$
- 2°  $2x - 1 > 0$
- 3°  $-x - 1 > 0$
- 4°  $-2x - 1 > 0$
- 5°  $x + 1 > 0$
- 6°  $2x + 1 > 0$
- 7°  $-x + 1 > 0$
- 8°  $-2x + 1 > 0$
- 9°  $x - 3 \leq 0$
- 10°  $2x - 3 \leq 0$
- 11°  $-x - 3 \leq 0$
- 12°  $-2x - 3 \leq 0$
- 13°  $x + 3 \leq 0$
- 14°  $2x + 3 \leq 0$
- 15°  $-x + 3 \leq 0$
- 16°  $-2x + 3 \leq 0$

## Exercice 13

Résoudre les inéquations suivantes.

1°  $x^2 + 2x - 15 > 0$       2°  $x^2 - 5x + 4 < 0$

3°  $-2x^2 + 3x + 2 > 0$       4°  $-3x^2 + 7x - 2 < 0$

5°  $x^2 + 31x + 150 > 0$       6°  $x^2 - 10 > 3x$

7°  $-x^2 < x - 12$       8°  $x^2 + 7 > 3x$

9°  $x^2 < 8 - 7x$       10°  $x^2 < 4$

11°  $100 > x^2$       12°  $x^2 > 3x$

13°  $x(x + 2) < 3x$       14°  $3x(x - 3) > 5(x - 3)$

15°  $(2 - x)(4x - 5) < 0$

## Exercice 14

Résoudre les inéquations suivantes.

1°  $\frac{x-3}{x+2} < 0$       2°  $\frac{x+5}{5-x} > 0$

3°  $\frac{3x+1}{3-x} \geq 0$       4°  $\frac{1}{4x^2-x-3} < 0$

5°  $\frac{2x+1}{x-3} \geq 1$       6°  $\frac{x}{2x+3} > \frac{1}{2}$

7°  $\frac{2}{x-3} < \frac{1}{x}$       8°  $\frac{x^2+1}{x^2-2x-3} > 0$

9°  $\frac{x-1}{x^2-2x-8} < 0$