

Exercices sur les racines n ièmes

Exercice 1

Calculer ou simplifier formellement les expressions suivantes :

- (1) $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt{49}$, $\sqrt[6]{-36}$, $-\sqrt[4]{16}$, $\sqrt{(-4)^2}$, $\sqrt[3]{-64}$, $\sqrt{0,0016}$, $\sqrt[5]{-1024}$, $\sqrt[5]{0}$;
- (2) $\sqrt[5]{3072}$, $\sqrt[8]{229635}$, $\sqrt[3]{5400}$, $\sqrt[5]{3'200'000}$, $\sqrt[4]{12 \cdot 36 \cdot 81 \cdot 18}$;
- (3) $\sqrt{11^4}$, $\sqrt[8]{24^0}$, $\sqrt[3]{15^3}$, $\sqrt[6]{(-2)^6}$, $\sqrt[7]{9^{-7}}$, $(-\sqrt[3]{-16^2})^2$, $\sqrt[4]{(-3)^8}$;
- (4) $\sqrt{9^3}$, $\sqrt[3]{27^2}$, $\sqrt[5]{12^3}$, $\sqrt[10]{8^7}$, $\sqrt[4]{72^{-5}}$, $\sqrt{-18^3 \cdot (-2)}$, $\sqrt[9]{90^6}$, $\sqrt[4]{2^7 \cdot 3^{15}}$;
- (5) $\sqrt{\frac{25}{36}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{216}}$, $\frac{\sqrt{441}}{\sqrt[3]{8}}$, $\sqrt{169^{-1}}$, $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$, $\frac{\sqrt{25^{-1}}}{\sqrt[3]{125}}$, $\sqrt[6]{\frac{(-3)^{-9}}{-2^{-12}}}$;
- (6) $\sqrt[4]{7^2}$, $\sqrt[4]{2^{15}}$, $\sqrt[15]{16^5}$, $\sqrt[8]{(-10)^6}$, $\sqrt[8]{2^9 \cdot 81^5}$, $\sqrt[7]{-32^9}$;
- (7) $\sqrt{2^3 + 17}$, $(2\sqrt{2} + \sqrt[3]{4})^2$, $\sqrt[4]{2^4 + 3^4}$, $(\sqrt[3]{5} - 2)^3$;
- (8) $\sqrt{27} + \sqrt[3]{54} + \sqrt{12} - \frac{5}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$;

Exercice 2

Ecrire aussi simplement les expressions suivantes que possible : le résultat ne doit contenir aucune puissance à exposant négatif ou fractionnaire.

- (1) $2^{\frac{1}{3}}$, $3^{\frac{4}{5}}$, $5^{\frac{4}{3}}$, $12^{\frac{7}{2}}$, $-4^{\frac{8}{3}}$, $2^{-\frac{1}{4}}$, $3^{-\frac{2}{5}}$, $6^{-\frac{9}{7}}$;
- (2) $6^{\frac{2}{5}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[4]{4}$, $18^{\frac{3}{2}} \cdot 16^{\frac{5}{4}} \cdot 3^{-1}$, $25^{-\frac{1}{2}} \cdot 5^{-\frac{1}{3}} \cdot 15^{\frac{4}{3}}$, $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[4]{8}$, $\sqrt[5]{16} \cdot 2^{-\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{12}$;
- (3) $-\frac{4^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}}$, $\frac{6}{\sqrt{2} \cdot 3^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{5^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{5}}$, $\frac{8^{-\frac{3}{2}}}{2^{-\frac{7}{4}}}$, $\frac{12^{-\frac{1}{3}}}{(3^{-1} \cdot 4^{-2})^{\frac{1}{2}}}$;
- (4) $(3^{\frac{1}{3}})^5$, $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$, $(4^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{\sqrt[4]{7^{13}}}$, $(49^{\frac{5}{6}})^{-\frac{1}{5}}$, $(54^{-\frac{5}{4}})^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{8}}}$;
- (5) $\frac{3^{-\frac{1}{2}} \cdot 243^{\frac{3}{5}}}{27^{-\frac{2}{3}}}$, $\frac{(6^{\frac{3}{2}} \cdot 12^{-\frac{1}{4}})^{-2}}{\sqrt[3]{2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}}}$, $\frac{\sqrt[3]{2} \cdot 40^{-\frac{5}{2}}}{5^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{24^{-\frac{1}{3}}}{-2}\right)^{-2}$;

Exercice 3

Sachant que chaque lettre désigne un réel strictement positif, simplifier les expressions suivantes : le résultat ne doit contenir aucune puissance à exposant négatif ou fractionnaire.

- (1) $\sqrt[3]{a^3}$, $\sqrt[4]{b^7}$, $\sqrt[5]{-a^5}$, $\sqrt[3]{a^5 b^{-6}}$, $\sqrt{4a^6 \sqrt{b}}$, $\sqrt[3]{b^2 \sqrt{ab}}$, $\sqrt[3]{48x^6}$, $(\sqrt[6]{2x^2 y})^9$;
- (2) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}}$, $(2a)^{\frac{3}{4}} \cdot (2b)^{\frac{1}{4}}$, $2a^{-1} \cdot \sqrt[5]{32a^6}$, $\sqrt[3]{(3a^{-1})(9b^{-6})}$, $\sqrt[3]{x^4 \sqrt[4]{x^3}}$;

- (3) $\sqrt[4]{1296x^7y^8z^3}$, $\sqrt[4]{\sqrt{a^8z^9}}$, $(\sqrt[3]{2x^3y})^4$, $\sqrt[3]{4a^2} \cdot \sqrt[3]{2a^2} \cdot \sqrt[3]{a}$;
- (4) $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{32x^2}}$, $\frac{\sqrt{8xy^3}\sqrt[3]{x^4y^5}}{2\sqrt[4]{y\sqrt{x^2}}}$, $\left(\frac{x^{-1}y}{\sqrt{xy^3}}\right)^2 \sqrt[3]{135x\sqrt{y}}$;
- (5) $(4a\sqrt{x})^{-2} \frac{\sqrt[3]{32a^{-2}x^{-1}}}{2^{-2}}$, $\frac{x^2y^{-1}\sqrt{75x}}{\sqrt[6]{9xy^4}}$; $\frac{1}{(24x^3)^{\frac{1}{2}}}$;

Exercice 4

Rendre rationnel le dénominateur (et calculer si nécessaire) :

- (1) $\frac{2}{\sqrt{6}}$, $\frac{-1}{3\sqrt{5}}$, $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{16}}$, $\frac{\sqrt[3]{-4}}{\sqrt[6]{16}}$, $\frac{1}{\sqrt[5]{25}}$, $\frac{5}{\sqrt{3\sqrt{2}}}$, $\frac{2}{\sqrt{3\sqrt[4]{81}}}$;
- (2) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$, $\frac{2}{2\sqrt{7}+\sqrt{2}}$, $\frac{5\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}-9}$;
- (3) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$, $\frac{x-3\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}}$ ($x > 0$) ;
- (4) $\frac{1}{5\sqrt[3]{9}} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt[3]{81}}{6} + \frac{3}{2\sqrt{3}+1}$;
- (5) $\frac{5}{\sqrt{2}-1} - \left(\sqrt{8} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 + \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt{2}+1} - 2\sqrt[6]{32}$;

Exercice 5

Sachant que $x \in \mathbb{R}$ et n et p sont deux entiers naturels ≥ 2 , donner les conditions d'existence pour les expressions suivantes :

- | | |
|---|--|
| (1) $\sqrt{3x+8}$ | (9) $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x^3+x^2}$ |
| (2) $\sqrt[4]{x^2-4}$ | (10) $\frac{\sqrt{x+8}}{\sqrt[4]{4-2x}}$ |
| (3) $\sqrt{3x-2} - 4\sqrt[3]{x}$ | (11) $\sqrt[3]{(-3)^p}$ |
| (4) $\sqrt{x+1} + \frac{1}{x-2}$ | (12) $\sqrt[p]{x^{-1}}$ |
| (5) $\frac{\sqrt{x+3}-1}{\sqrt[3]{x^2+2x}}$ | (13) $\sqrt[4]{x^{2p+1}}$ |
| (6) $\frac{1}{\sqrt[6]{12x-6}}$ | (14) $\sqrt[3]{2^p x^3}$ |
| (7) $\sqrt{\frac{3+2x}{4-x}}$ | (15) $\frac{1}{\sqrt[p]{x+1}}$ |
| (8) $\sqrt[8]{\frac{1}{x}-3}$ | |

Exercice 6

Résoudre les équations suivantes :

- (1) $x^3 = -1$
- (2) $x^4 = 8$
- (3) $x^5 = -32^3$
- (4) $x^9 = 27$
- (5) $3x^2 = -2$
- (6) $x^2 - 5 = 0$
- (7) $x^3 = 12x$
- (8) $(x^4 - 7) \cdot (x^3 - 2) = 0$
- (9) $x^6 = \sqrt{64}$
- (10) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$
- (11) $x^5 - x^4 - 3x + 3 = 0$
- (12) $(x^3 + 2)^2 = 9$
- (13) $(x^4 + 8)^3 = 10$
- (14) $16x^4 = 8x^2 - 1$
- (15) $(x^2 + \sqrt{17})^4 = 18^2$

Solutions

Exercice 1

- (1) 2 ; 7 ; n'existe pas ; -2 ; 4 ; -4 ; 0,04 ; -4 ; 0 ;
- (2) $4^{\sqrt[5]{3}}$, $3^{\sqrt[8]{35}}$, $6^{\sqrt[3]{25}}$, 20, $18^{\sqrt[4]{6}}$;
- (3) 121, 1, 15, 2, $\frac{1}{9}$, $32^{\sqrt[3]{2}}$, 9 ;
- (4) 27, 9, $2^{\sqrt[5]{54}}$, $4^{10\sqrt{2}}$, $\frac{1}{72^{\sqrt[4]{72}}} = \frac{1}{72 \cdot \sqrt[4]{8} \cdot \sqrt{3}}$, 108, $3^{\sqrt[3]{300}}$, $54^{\sqrt[4]{216}}$;
- (5) $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{21}{2}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{4\sqrt{3}}{9}$;
- (6) $\sqrt{7}$, $8^{\sqrt[4]{8}}$, $2^{\sqrt[3]{2}}$, $\sqrt[4]{1000}$, $18 \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt{3}$, $-64^{\sqrt[7]{8}}$;
- (7) 5, $8 + 8 \cdot \sqrt[6]{2} + 2 \cdot \sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{97}$, $-3 + 12 \cdot \sqrt[3]{5} - 6 \cdot \sqrt[3]{25}$;
- (8) $\frac{25\sqrt{3}}{6} + \frac{15^{\sqrt[3]{2}}}{6}$;

Exercice 2

- (1) $\sqrt[3]{2}, \sqrt[5]{81}, 5\sqrt[3]{5}, 3456\sqrt{3}, -32\sqrt[3]{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt[5]{9}}, \frac{1}{\sqrt[6]{36}}$;
- (2) $3^{10}\sqrt[5]{12^{15}\sqrt{3}}, 567\sqrt{2}, 3\sqrt[3]{3}, 6^{12}\sqrt[3]{2}, 2^{15}\sqrt[4]{\sqrt{3}}$;
- (3) $-\sqrt[3]{4}, \sqrt{2}\sqrt[3]{3}, \frac{1}{\sqrt[6]{5}}, \frac{1}{4\sqrt[4]{8}}, 2\sqrt[3]{2}\sqrt[6]{3}$;
- (4) $\sqrt[3]{243}, \sqrt[6]{2}, \sqrt[4]{8}, 7^{12}\sqrt[7]{7}, \frac{1}{\sqrt[3]{7}}, \frac{1}{3^{12}\sqrt[32]{4\sqrt{3}}}, \sqrt[8]{2}$;
- (5) $8\sqrt[6]{3}, \frac{1}{3^{12}\sqrt[32]{4\sqrt{3}}}, \frac{\sqrt[3]{9}}{1000\sqrt[6]{2}}$;

Exercice 3

- (1) $a, b\sqrt[4]{b^3}, -a, \frac{a\sqrt[3]{a^2}}{b^2}, 2a^3\sqrt[4]{b}, \sqrt[6]{ab^5}, 2x^2\sqrt[3]{6}, 2x^3y\sqrt{2y}$;
- (2) $a \cdot \sqrt[6]{a}, 2\sqrt[4]{a^3b}, 4\sqrt[5]{a}, \frac{3}{b^2\sqrt[3]{a}}, x^{12}\sqrt[7]{x^7}$;
- (3) $6xy^2\sqrt[4]{x^3z^3}, az\sqrt[8]{z}, 2x^4y\sqrt[3]{2y}, 2a\sqrt[3]{a^2}$;
- (4) $\frac{1}{2^{15}\sqrt{x}}, \sqrt{2xy^2} \cdot \sqrt[12]{x^7y^{11}}, \frac{3\sqrt[3]{5}}{x^2\sqrt[3]{x^2}\sqrt[6]{y^5}}$;
- (5) $\frac{1}{2a^2x}\sqrt[3]{\frac{4}{a^2x}}, \frac{5x^2\sqrt[6]{x^5}}{2\sqrt{2}\sqrt[3]{3y}}$;

Exercice 4

- (1) $\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{-\sqrt{5}}{15}, \sqrt[3]{2}, \frac{\sqrt[3]{4}}{4}, -1, \frac{\sqrt[5]{125}}{5}, \frac{5\sqrt[4]{2}\sqrt{6}}{6}, \frac{2\sqrt{3}}{9}$;
- (2) $\sqrt{5} + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{3}, \frac{2\sqrt{7} - \sqrt{2}}{13}, -\frac{48 + 49\sqrt{3}}{69}$;
- (3) $\frac{x + \sqrt{x}}{x - 1}, \frac{x - 5\sqrt{x} + 6}{x - 4} (x > 0)$;
- (4) $\frac{17\sqrt[3]{3}}{30} + \frac{17\sqrt{3}}{11} - \frac{3}{11}$;
- (5) $5\sqrt{2} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} + 4\sqrt[6]{2} - 3$;

Exercice 5

- (1) $x \in \left[\frac{-8}{3}, +\infty \right[$
- (2) $x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$
- (3) $x \in \left[\frac{2}{3}, +\infty \right[$
- (4) $x \in [-1, +\infty[\setminus \{2\}$

- (5) $x \in [-3, +\infty[\setminus \{0, -2\}$
- (6) $x \in \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$
- (7) $x \in \left[-\frac{3}{2}, 4 \right[$
- (8) $x \in \left] 0, \frac{1}{3} \right]$
- (9) $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$
- (10) $x \in [-8, 2[$
- (11) p est pair ou n est impair
- (12) $(x \neq 0$ et p est impair) ou $(x > 0)$
- (13) $x \geq 0$ (car $2p + 1$ est impair)
- (14) $x \geq 0$ ou n est impair
- (15) $x > -1$ ou $(x \neq -1$ et p est impair)

Exercice 6

- (1) $S = \{-1\}$
- (2) $S = \{\pm\sqrt[4]{8}\}$
- (3) $S = \{-8\}$
- (4) $S = \{\sqrt[3]{3}\}$
- (5) $S = \emptyset$
- (6) $S = \{\pm\sqrt{5}\}$
- (7) $S = \{0, \pm 2\sqrt{3}\}$
- (8) $S = \{\pm\sqrt[4]{7}, \sqrt[3]{2}\}$
- (9) $S = \{\pm\sqrt{2}\}$
- (10) $S = \emptyset$
- (11) $S = \{\pm\sqrt[4]{3}, 1\}$
- (12) $S = \{1, -\sqrt[3]{5}\}$
- (13) $S = \emptyset$
- (14) $S = \left\{ \pm \frac{1}{2} \right\}$
- (15) $S = \left\{ \pm \sqrt{3\sqrt{2} - \sqrt{17}} \right\}$

